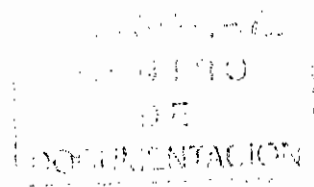


R 36424
N 39019



CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN

Nº 87

**DEPENDENCIA EN EL MODELO
INDIVIDUAL, APLICACIÓN
AL RIESGO DE CRÉDITO**

Autor: Marc Carreras Pijuan

Diciembre, 2004

ISBN: 84-89429-77-4

Depósito Legal: M-31.610-2004

Copyright: Fundación MAPFRE Estudios

Prohibida la reproducción total o parcial de este trabajo sin el permiso escrito del autor o de la FUNDACIÓN MAPFRE ESTUDIOS

LISTA DE CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN MAPFRE ESTUDIOS EDITADOS:

1. Filosofía Empresarial
2. Resultados de la Encuesta sobre "Altos Profesionales de Seguros" (A.P.S.)
3. Dirección y Gestión de la Seguridad
4. Los Seguros en una Europa cambiante: 1990-1995 (No disponible)
5. La Distribución Comercial del Seguro: Sus Estrategias y Riesgos
6. Elementos de Dirección Estratégica de la Empresa
7. Los Seguros de Responsabilidad Civil y su Obligatoriedad de Aseguramiento
8. La Implantación de un Sistema de Controlling Estratégico en la Empresa
9. Técnicas de Trabajo Intelectual
10. Desarrollo Directivo: Una Inversión Estratégica
11. El Concepto de Seguridad en la Ciencia y la Ciencia de la Seguridad
12. Los Seguros de Salud y la Sanidad Privada
13. Calidad Total y Seguridad
14. El Reaseguro de Exceso de Pérdidas
15. El Coste de los Riesgos en la Empresa Española 1991
16. La Legislación Española de Seguros y su Adaptación a la Normativa Comunitaria

Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1993

17. Medio Ambiente Seguro: Desarrollo Futuro
18. El Seguro de Crédito a la Exportación en los países de la OCDE (Evaluación de los resultados de los aseguradores públicos)
19. Una Teoría de la Educación
20. El Reaseguro en los Procesos de Integración Económica

Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1994

21. La Nueva Regulación de las Provisiones Técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. Provisiones Técnicas de Seguros de Vida en las Directivas Comunitarias
22. Rentabilidad y Productividad de Entidades Aseguradoras
23. Análisis de la Demanda de Seguro Sanitario Privado
24. El Seguro: Expresión de Solidaridad desde la Perspectiva del Derecho
25. El Reaseguro Financiero
26. El Coste de los Riesgos en la Empresa Española 1993
27. La Calidad Total como Factor para elevar la Cuota de Mercado en Empresas de Seguros
28. La Naturaleza Jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil
29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal

Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1995

30. El Tiempo del Directivo
31. Tipos Estratégicos, Orientación al Mercado y Resultados Económicos: Análisis Empírico del Sector Asegurador Español

32. Decisiones Racionales en Reaseguro
33. La función del Derecho en la Economía
34. El Coste de los Riesgos en la Empresa Española 1995
35. El Control de Riesgos en Fraudes Informáticos
36. Cláusulas Limitativas de los Derechos de los Asegurados y Cláusulas Delimitadoras del Riesgo Cubierto. Las Cláusulas de Limitación Temporal de la Cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil

Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1996

37. La Responsabilidad Civil por Accidente de Circulación. Puntual Comparación de los Derechos Francés y Español
38. Legislación y Estadísticas del Mercado de Seguros en la Comunidad Iberoamericana
39. Perspectiva Histórica de los Documentos Estadístico-Contables del Órgano de Control: Aspectos Jurídicos, Formalización y Explotación
40. Resultados de la Encuesta sobre la Organización y Gestión de la Seguridad en la Empresa (1996)
41. De Maastricht a Amsterdam: Un paso más en la integración europea

Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1997

42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento
43. Resultados de la Encuesta sobre Disponibilidad de Instalaciones de Protección contra Incendios en la Empresa 1997”
44. Resultados de la Encuesta sobre Implantación en la Empresa de la Ley de Prevención de Riesgos Laborales
45. Los Impuestos en una Economía Global

46. Evolución y Predicción de las Tablas de Mortalidad Dinámicas para la Población Española
47. El Fraude en el Seguro del Automóvil: Cómo detectarlo
48. Matemática Actuarial no Vida con MapleV
49. Solvencia y Estabilidad Financiera en la Empresa de Seguros: Metodología y Evaluación Empírica mediante Análisis Multivariante
50. Mixturas de Distribuciones: Aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la Empresa Aseguradora
51. Seguridades y Riesgos del joven en los grupos de edad
52. La Estructura Financiera de las Entidades de Seguros
53. Habilidades Directivas: Estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación
54. El Corredor de Reaseguro y su legislación específica en América y Europa
55. Resultados de la Encuesta: “La Seguridad contra Intrusión (Seguridad Privada) en la Empresa. 1999”
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España
57. Informe final. Encuesta: “La Organización y Gestión de la Seguridad en la Empresa. 1999”
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro
59. Estudios sobre el Euro y el Seguro
60. Análisis Técnico y Económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea

61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros
62. Seguridad Social. Temas generales y régimen de clases pasivas del Estado
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial
64. Fundamentos técnicos de la Regulación del Margen de Solvencia
65. Ética Empresarial y Globalización
66. Encuesta: "Seguridad contra Incendios en la empresa. 2000"
67. Gestión Directiva en la Internacionalización de la Empresa
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica
69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados: Métodos Estadísticos de Cálculo
70. El Cuadro de Mando Integral para las entidades aseguradoras
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español
75. Incidencia de la Nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas

77. Resultados de la Encuesta sobre *"El Coste de los Riesgos en la Empresa Española. 2001"*
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos
80. Los Planes y Fondos de Pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización
81. El Seguro de Dependencia. Una visión general
82. Informe Final. Encuesta: "La Organización y Gestión de la Seguridad en la Empresa 2002"
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficiencia de un Sistema Bonus-Malus
85. La Matriz Valor-Fidelidad en el Análisis de los Asegurados en el Ramo del Automóvil
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica
87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito

DEPENDENCIA EN EL MODELO INDIVIDUAL, APLICACIÓN AL RIESGO DE CRÉDITO

Autor: Marc Carreras Pijuan

Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Barcelona

Para la realización de este trabajo la Fundación MAPFRE ESTUDIOS concedió a su autor una Beca de Investigación Riesgo y Seguro.

**Dependencia en el modelo individual,
aplicación al riesgo de crédito**

Marc Carreras Pijuan

Departamento de matemática económica financiera y actuarial

Universitat de Barcelona

Resumen: Este trabajo pretende demostrar la validez de la metodología actuarial en un contexto nuevo: la valoración de carteras de seguros de crédito. La idea central consiste en desarrollar las hipótesis del modelo individual de teoría del riesgo, de forma que sea posible obtener eficientemente información acerca de la distribución conjunta de n riesgos dependientes. Para ello es necesario invertir la función generatriz de momentos multivariante del modelo individual mediante el algoritmo *fast Fourier transform*. La calibración del modelo propuesto se ha realizado valorando una cartera de riesgos perteneciente a una compañía española de seguro de crédito. En los resultados se observa la variación progresiva del capital de solvencia a medida que aumenta la dependencia entre los riesgos de la cartera, modelizada mediante cópulas de la familia Gumble. Se incluye una revisión sobre sistemas de *rating* interno.

Palabras clave: riesgo de crédito, teoría del riesgo, cópulas, dependencia, capital de solvencia.

Clasificación JEL: C49, G11, G32

Proyecto de investigación financiado por la FUNDACIÓN MAPFRE ESTUDIOS, en el marco de la convocatoria de las becas riesgo y seguro 2002/2003.

Contribución a la tesis doctoral del autor dirigida por Antoni Alegre Escolano, catedrático de matemática económica, financiera y actuarial de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Barcelona.

Tutor designado por la Fundación Mapfre Estudios: Francisco Arenas Ros. Responsable de Análisis de Grandes riesgos de Mapfre Caución y Crédito.

Correspondencia: mcarreras@actuaris.org

Índice

1	Introducción.....	3
2	Revisión.....	5
2.1	Sistemas de rating interno.....	5
2.2	Principios generalmente aceptados.....	7
2.3	Arquitectura y diseño operativo.....	9
2.4	Obtención de probabilidades.....	17
2.5	Teoría del riesgo.....	26
3	Metodología.....	34
3.1	Cóputas.....	34
3.2	Distribución del número de insolvencias.....	36
3.2	Distribución de la severidad.....	38
3.3	Esperanza matemática y varianza.....	38
4	Resultados.....	39
5	Discusión.....	42
6	Bibliografía.....	44

1. Introducción

Desde un punto de vista financiero existen dos grandes líneas teóricas relacionadas con la cuantificación del riesgo de crédito. La primera de ellas comprende los llamados modelos estructurales, el punto de conexión entre los integrantes de este grupo es la aceptación de las hipótesis microeconómicas establecidas por *Merton (1974)* respecto la evolución de la estructura de capital de una compañía. Incluye diversos modelos, por ejemplo *J.P. Morgan, CreditMetrics (1998)* o *KMV (1997)* y supone el tratamiento estándar en el sector. La segunda línea comprende los modelos llamados reducidos, intensivos o estadísticos. Sus distintas denominaciones hacen referencia al hecho que no se establecen hipótesis económicas complejas, concentrando el análisis en la probabilidad o intensidad de insolvencia. Pertenecen a este grupo el modelo *Credit Suisse First Boston, CreditRisk+ (1997)* o el de *Jarrow y Turnbull (1995)*.

Salvando las diferencias de nomenclatura, numerosa bibliografía por ejemplo *Arvanitis (2001)*, *Nyfelser (2000)* o bien *Ong (1999)*, concluye que la expresión generalizada de las pérdidas acumuladas por insolvencias de una cartera es:

$$L_p = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N E_i \cdot LGD_i \cdot I_i \quad (1)$$

L_p , pérdida total por insolvencias de la cartera. L_i , pérdida individual asociada al riesgo i . E_i , exposición inicial. $LGD_i = 1 - \delta_i$, severidad en caso de incumplimiento (*Loss given default*). δ_i , ratio de recuperación. $I_i \sim b(p_i)$, es una variable aleatoria de *Bernoulli* que actúa como indicador de insolvencia.

En el ámbito del sector asegurador, la teoría del riesgo permite hacer frente al estudio de la acumulación de pérdidas en una cartera de riesgos según una suma de variables aleatorias del tipo:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^N B_i I_i \quad (2)$$

S , pérdida total por siniestros de la cartera. $X_i = B_i I_i$, pérdida individual asociada a cada riesgo (B_i puede ser una variable aleatoria (no negativa) o una cantidad cierta, en ambos casos recoge la cuantía de la insolvencia del riesgo i). $I_i \sim b(q_i)$ es una variable aleatoria de *Bernoulli*.

La coincidencia entre ambas expresiones permite plantear el estudio de la distribución de una cartera de créditos bajo el enfoque (actuarial) de teoría

del riesgo. El modelo corporativo *CreditRisk+* del grupo *Credit Suisse First Boston*, aplicado en la práctica con buenos resultados, es un ejemplo de ello.

No obstante determinados aspectos del modelo podrían ser mejorados. En primer lugar, dadas las especiales características del riesgo de crédito, se debería especificar correctamente el efecto de la dependencia sobre las variables. En referencia a este punto *CreditRisk+* asume independencia, añadiendo posteriormente hipótesis correctivas que distorsionan el tratamiento de las correlaciones. Un segundo problema aparece como consecuencia del método utilizado para la obtención de la función de distribución de la cartera (aproximación *Poisson* compuesta del modelo individual y posterior aplicación del algoritmo recursivo de *Panjer*), puesto que produce errores de cálculo al incluir en la cartera riesgos de baja calidad *Gordy (2000)*.

El objetivo de este trabajo, tal como se presentó a la Fundación Mapfre Estudios, es el de demostrar la validez de la metodología actuarial en la valoración de carteras de seguros de crédito. La idea central consiste en desarrollar las hipótesis del modelo individual de teoría del riesgo de forma que sea posible obtener eficientemente información acerca de la distribución conjunta de n riesgos dependientes. Complementariamente se propone valorar bajo estos supuestos una cartera compuesta por varios riesgos perteneciente a una compañía española de seguro de crédito.

Actualmente todo lo relacionado con la gestión del riesgo de crédito está en proceso de cambio, entre otros factores influyen la próxima entrada en vigor de las normativas Basilea II y Solvencia II. Por todo ello se hace especialmente interesante añadir nuevos puntos de vista al tratamiento cuantitativo de la cuestión.

La estructura del trabajo combina el artículo original y la revisión, las secciones son: introducción, revisión, metodología, aplicación a una cartera de riesgos (resultados) y por último discusión de los aspectos más relevantes de la investigación así como de sus limitaciones e implicaciones. Ha sido necesaria la incorporación de una revisión de la literatura sobre sistemas de *rating* interno (sección segunda) no prevista inicialmente. También se ha incluido en esta sección el análisis de las hipótesis fundamentales de teoría del riesgo. El lector suficientemente familiarizado con ambos temas e interesado exclusivamente en la modelización estadística debería dirigirse directamente a la sección metodología.

2. Revisión

La obtención de probabilidades de insolvencia individuales es un proceso previo a la construcción de un modelo de cartera. Cuando una entidad dispone de tales probabilidades puede plantearse la obtención de correlaciones, asociaciones entre riesgos u otros parámetros de riesgo global.

Esta sección adicional se ha dedicado a la revisión de diferentes aspectos relacionados con los sistemas de *rating* interno. La idea es comparar las diferentes variantes existentes en cuanto a arquitectura, diseño operativo y metodología estadística. De esta forma se pretende ofrecer algunas soluciones a la falta de información histórica acerca de probabilidades de insolvencia, común en gran parte de las entidades financieras y aseguradoras. Para ello se propone sintetizar algunas de las revisiones de mayor entidad publicadas los últimos años: *Krahn y Weber (2001)*, en lo referente a conceptos fundamentales, *Treacy y Carey (1998)* en lo referente a arquitectura y diseño operativo y *Brunner, Krahn y Weber (2000)* y *Laffarga y Mora (2002)* en lo referente a metodología estadística. Debe tenerse en cuenta que la revisión no es exhaustiva y que los artículos anteriores hacen referencia a sistemas de *rating* interno utilizados exclusivamente en el sector financiero, por tanto es necesario realizar un pequeño esfuerzo de imaginación en trasladar la operativa al campo del seguro de crédito.

Se añade a la revisión una subsección adicional (2.5) con el fin de profundizar en las hipótesis básicas del modelo individual de teoría del riesgo, especialmente en la aproximación *Poisson* compuesta, puesto que es la base del planteamiento del modelo *CreditRisk+*.

2.1. Sistemas de rating interno

El artículo 69 (SECCIÓN SÉPTIMA) de la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de contrato de seguro, define el seguro de crédito: *Por el seguro de crédito el asegurador se obliga, dentro de los límites establecidos por la Ley y en el contrato, a indemnizar al asegurado las pérdidas finales que experimente a consecuencia de la insolvencia definitiva de sus deudores.*

Excepto en lo referido a la disponibilidad de información¹, el riesgo asumido por una compañía aseguradora al asegurar un crédito no es sustancialmente diferente del asumido por una entidad financiera al conceder un préstamo. Por

¹ El acceso del asegurador a la información financiera del riesgo es imperfecto, puesto que este no está directamente asociado al asegurado sino a una tercera compañía o firma a quien el asegurado vende a crédito.

tanto, si el problema es de naturaleza similar ¿es posible aplicar algunas de las soluciones utilizadas en el sector bancario? En respuesta a la pregunta, la utilización de sistemas de *rating* interno o de sus derivados permite a las entidades financieras obtener medidas de riesgo, seleccionar posibles prestatarios, analizar la suficiencia de provisiones, establecer sistemas de incentivos u obtener la distribución global de sus carteras de créditos. Su utilización además ayuda a los organismos supervisores a conocer el riesgo asumido por una entidad en relación a su capital.

Un sistema de *rating* se puede definir como una clasificación de la probabilidad de insolvencia asociada a un crédito en un número discreto de categorías o calidades crediticias. Es habitual distinguir entre dos acepciones del término, la primera de ellas hace referencia a la clasificación de un crédito en función de la probabilidad de insolvencia asociada al prestatario. La segunda hace referencia a la clasificación del crédito en función de la severidad o probabilidad de no recuperación en caso de insolvencia, en este caso asociada al tipo de exposición o instrumento. En esta sección se hace referencia exclusivamente a la primera definición.

Por tanto, la clasificación asignada a un crédito es función de su probabilidad de insolvencia, que conceptualmente es una variable aleatoria continua, equivalente a la frecuencia de ocurrencia de un suceso relacionado con el incumplimiento de la contraprestación del crédito. Por ejemplo impago de principal o intereses durante un periodo de 30 días. Además forma parte de la función pérdidas esperadas por una entidad que concede un crédito a una compañía i durante determinado intervalo temporal:

$$E[L] = p_i \cdot E[LGD], \quad p_i \in [0, 1]. \quad (3)$$

Aunque teóricamente la ordenación y segmentación de la probabilidad de insolvencia define las diferentes categorías, en la práctica y especialmente en el caso de las agencias de *rating* externo el proceso habitual es el inverso: la probabilidad de insolvencia de un grado determinado se infiere mediante frecuencias de insolvencia observadas.

Las agencias de *rating* externo han sido pioneras en el establecimiento de sistemas de clasificación, *Moody's*, *Standard & Poor's* y *Fitch IBCA* son las mayores agencias mundiales y cuentan con una dilatada experiencia en la clasificación de compañías, generalmente entidades de gran tamaño emisoras de deuda en los mercados de capitales. Las etiquetas *Aaa / AAA* identifican con la mejor calidad crediticia y por tanto con la menor probabilidad de impago, los futuros flujos de capital asociados a determinado crédito.

La reforma iniciada por el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea respecto

la normativa sobre solvencia de entidades financieras, incide especialmente en la importancia de los sistemas de *rating* externos e internos, fomentando su desarrollo y aplicación a todo tipo de exposiciones crediticias.

A pesar su creciente importancia, en muchos casos la antigüedad de los sistemas de *rating* interno no excede de los 7 años, además no es habitual revelar su funcionamiento interno, puesto que su desarrollo se considera una ventaja competitiva.

2.2. Principios generalmente aceptados

La serie que sigue a continuación está compuesta por 14 axiomas de tipo general, formulados en el trabajo *Generally accepted rating principles: a primer* de *Krahn* y *Weber (2001)*. Forman un conjunto de principios de buena práctica que deberían exigirse a todo sistema de *rating*:

1. **Integridad.** Un sistema de *rating* debe ser capaz de valorar todos los clientes de una entidad, pasados, actuales y futuros, independientemente de sus características. Es necesario intentar imaginar toda la tipología posible, no debería suceder que una compañía no se puede clasificar por que es extranjera o por que opera en determinado sector.
2. **Exhaustividad.** Es necesario valorar todos los clientes, actuales y pasados. Obvio en el caso de clientes actuales, no obstante en el caso de clientes pasados su mantenimiento en la base de datos permite estimar correctamente los parámetros de riesgo y conocer el alcance de la capacidad predictiva de los modelos. Utilizar sólo las compañías supervivientes en la base de datos produce estimaciones incorrectas de los parámetros, dando lugar al sesgo conocido en el sector como *survivorship bias*.
3. **Complejidad.** Se combinarán tantos sistemas de *rating* como sea necesario y al mismo tiempo los mínimos posibles. Las razones para seleccionar el número de sistemas deben ser transparentes. En términos de robustez estadística es indiferente utilizar una sola función, suficientemente compleja como para valorar todo tipo de riesgos, que utilizar diferentes funciones aplicables a diferentes grupos. El uso de una única función aplicable a toda la cartera puede resultar complicado, además existen variables importantes para las valoración de determinadas compañías, por ejemplo inmobiliarias, sin ningún valor predictivo en otros sectores. Por otra parte, la segmentación excesiva puede provocar duplicidades en los criterios de selección, una compañía puede cumplir los criterios para ser incluida en más de un grupo, o bien la aparición de grupos demasiado reducidos para el correcto tratamiento estadístico. Es necesario definir un equilibrio adecuado y transparente entre ambos aspectos.
4. **Definición.** Las probabilidades de insolvencia deben estar correctamente

definidas. Implica definir previamente el suceso insolvencia, si se trata de impago del principal, de intereses, durante que periodo de tiempo etc. Por otra parte existen diferentes horizontes temporales posibles para el cálculo. El período habitual en las entidades financieras es anual, no obstante no es evidente que tengan una orientación a corto plazo. Las agencias de *rating* externo consideran diferentes escenarios a lo largo del ciclo económico.

5. **Monotonidad.** La clasificación en grados debe inferirse a partir de las probabilidades de insolvencia. Dadas dos compañías X e Y, la relación entre las escalas cardinal y ordinal debe cumplir las siguientes propiedades:
 - $p(X) = p(Y) \Rightarrow \text{Rating}(X) \sim \text{Rating}(Y)$.
 - $p(X) < p(Y) \Rightarrow \text{Rating}(X) \succsim \text{Rating}(Y)$.
 - $\text{Rating}(X) \succ \text{Rating}(Y) \Rightarrow p(X) < p(Y)$.
6. **Precisión.** El sistema de *rating* debe ser tan preciso como sea necesario. La precisión depende del número de grados, que estará determinado por el uso posterior de la clasificación. El número mínimo es de dos ("buenos" "malos" prestatarios) y el máximo y en cierto modo óptimo supone el mapeo completo de la probabilidad de insolvencia. La viabilidad del *back-testing* posterior también debe ser tenida en cuenta al definir el número de categorías.
7. **Fiabilidad.** El sistema de *rating* debe ser fiable. La clasificación de un prestatario debe estar en función únicamente de su solvencia, independiente del profesional que la asigne o del momento del tiempo en que ésta se realice. Implica asumir estacionariedad en las probabilidades de insolvencia.
8. **Back-testing.** La probabilidad *ex-ante* estimada mediante el sistema no debe ser significativamente diferente de la realización *ex-post* de la frecuencia de insolvencia. Algunos de los tests que permiten comprobar la idoneidad de un sistema son los siguientes:
 - Las tasas de insolvencia *ex-post* para un grado determinado deben superar las de los grados considerados mejores en términos de calidad crediticia.
 - Las tasas de insolvencia *ex-post* deben aumentar con el horizonte temporal. Como es obvio la tasa de insolvencia observada a cinco años debe ser mayor o como mínimo igual a la tasa a un año.
 - Cuando el crédito cotice en mercados de capitales, resulta útil contrastar el *spread* ofrecido por el mercado con la probabilidad *ex-ante* asignada por el sistema. En el caso de múltiples créditos además puede compararse la ordenación de riesgos realizada por el mercado con la ordenación asignada internamente.
9. **Eficiencia.** La clasificación debe ser asignarse de manera eficiente, modelizando correctamente toda la información disponible. El sistema debe ser capaz de evitar sesgos documentados en la literatura.
10. **Desarrollo.** Un sistema de *rating* debe ser mejorado continuamente. Si existen evidencias de posibles cambios en la estructura de las variables que

intervienen en la valoración, o en las hipótesis asumidas es conveniente actuar de inmediato, sin esperar la aparición de señales de alarma.

11. **Data management.** Agilidad en la disponibilidad de *ratings* pasados y actuales. Debido a la dimensión de las bases de datos necesarias, sin un sistema de gestión de la información eficiente resulta imposible obtener clasificaciones de calidad. Son momentos especialmente delicados el cambio de sistema informático o la fusión entre entidades.
12. **Compatibilidad con los sistemas de incentivos.** Es necesario cuidar especialmente el sistema interno de incentivos cuando éste se base en clasificaciones asignadas y al mismo tiempo retribuya a quien las asigna o participa en el proceso de asignación (responsables de unidad, comerciales, etc.)
13. **Control interno.** La distribución de los *ratings* debería ser constantemente controlada por unidades internas capaces de encontrar desviaciones significativas en las asignaciones, tanto de tipo transversal como temporal. La idea de referencia son los sistemas estadísticos de control de calidad en producción industrial. En relación con el requerimiento anterior, el algoritmo de generación de las muestras aleatorias a inspeccionar no debería ser completamente transparente para los niveles organizativos que proporcionan información subjetiva.
14. **Control externo.** La calidad de los *ratings* debería ser controlada por entidades especializadas, externas y neutrales. El requerimiento es de naturaleza similar al anterior. Persigue dotar de credibilidad las asignaciones e implica la evaluación de un organismo externo supervisor.

2.3. *Arquitectura y diseño operativo*

Los conceptos *arquitectura y diseño operativo* aparecen aplicados a sistemas de *rating* en el artículo *Credit Risk Rating at Large U.S. Banks* de Treacy y Carey (1998), el término *arquitectura* hace referencia a la definición de las probabilidades de insolvencia, la estructura de la función de pérdidas, el número de grados de la clasificación y la utilización o no de grados administrativos y etiquetas *watch*. La expresión *diseño operativo* comprende la organización del proceso de clasificación y de los instrumentos de control interno, el tipo de exposiciones clasificadas, los factores de riesgo considerados y el papel de los modelos estadísticos.

El buen funcionamiento de un sistema de clasificación depende en gran medida del uso posterior del mismo. La exigencia de nuevos *outputs* para los que no han sido desarrollados, por ejemplo la parametrización de modelos de cartera o el análisis de rentabilidad, fácilmente puede generar estrés sobre los sistemas y propiciar la aparición de sesgos inesperados².

² Exceptuando los sesgos derivados de la modelización estadística, los posibles erro-

El trabajo *Credit Risk Rating at Large U.S. Banks* de Treacy y Carey (1998) compara arquitectura y diseño operativo de los sistemas implementados por las 50 entidades financieras de mayor tamaño de Estados Unidos, analizando detalladamente la relación entre forma funcional y uso posterior. La representatividad de la muestra es considerable y las características de los sistemas examinados difieren sustancialmente, las siguientes subsecciones resumen las principales cuestiones abordadas.

2.3.1. Definición de la probabilidad de insolvencia

Existen dos criterios generalmente aceptados:

1. **Criterio *Through the cycle*.** Considera diferentes escenarios posibles a lo largo del ciclo económico o industrial, valorando su impacto sobre la estructura financiera del prestatario. La probabilidad asignada expresa el riesgo existente en el peor escenario posible. Es el criterio utilizado por las agencias de *rating* externo.
2. **Criterio *Point in time*.** Asigna la probabilidad de insolvencia según la condición económico-financiera del prestatario en el momento de la valoración. El 100% de las entidades encuestadas aplican este criterio.

La determinación del horizonte temporal que mejor se ajusta a la duración de las operaciones es clave en la elección de uno u otro criterio. Tradicionalmente los usuarios de la información generada por agencias de *rating* externo están interesados en la clasificación de emisiones de deuda a largo plazo³ y por tanto el criterio *Through the cycle* es completamente coherente con sus objetivos. No obstante en el caso de las entidades financieras, la definición de un horizonte temporal adecuado parece más confusa, el 25% de las entidades encuestadas considera un periodo anual, otro 25% considera un periodo más largo, relacionado con la vida de la operación y el 50% restante no considera un horizonte temporal específico.

Es discutible que las entidades financieras tengan una clara orientación a corto plazo, especialmente si se tiene en cuenta el incremento de la duración de las operaciones de crédito durante las últimas dos décadas, por lo que el criterio *Point in time* no parece el más acorde con la estructura del riesgo. Si bien algunas entidades valoran la condición del prestatario bajo situaciones de estrés o en escenarios desfavorables, este tipo de análisis sólo se utiliza en el origen de la operación (concesión del crédito) y no en la asignación de grado. La

res o imprecisiones de un sistema están relacionados con el uso posterior de la clasificación en tanto que medida de riesgo. Es decir, el sesgo previsible es completamente diferente si el sistema se utiliza para la asignación de incentivos o bien para la valoración de provisiones de insolvencia.

³ A mantener hasta el vencimiento.

explicación a la operativa del sector sin duda tiene que ver con las dificultades tecnológicas y con los elevados costes que representaría un cambio de criterio.

2.3.2. Definición de la función de pérdidas

Tal como expresa la ecuación (3), el producto de la probabilidad de insolvencia p_i por la severidad $E[LGD]$ es igual a la pérdida porcentual esperada $E[L]$, expresión del riesgo de crédito implícito de una exposición durante un periodo determinado. La probabilidad de insolvencia depende de la estructura financiera del prestatario, mientras que la severidad indica el valor esperado no recuperable en caso de incumplimiento y está asociada al tipo de exposición o instrumento.

En esta cuestión las entidades encuestadas están divididas, en el 60 % de los casos los grados del sistema de clasificación pretenden reflejar directamente una estimación de la pérdida esperada $E[L]$ (sistema unidimensional). Para el 40 % restante la escala únicamente aproxima la probabilidad de insolvencia p_i , tratando de forma separada la cuantificación de la severidad (sistema bidimensional).

Todas las entidades, además de las agencias de *rating* externo manejan elementos de la ecuación (3) en la construcción de sus clasificaciones, no obstante parece existir cierta confusión de conceptos. Por ejemplo algunas entidades financieras afirman basar sus clasificaciones en la probabilidad de insolvencia p_i utilizando un sistema unidimensional. Por otra parte, tal como sugieren *Treacy y Carey (1998)*, las agencias *Moody's* y *Standard & Poor's* definen sus sistemas de clasificación de forma imprecisa⁴, lo que crea sospechas sobre el funcionamiento de los grados como indicadores de la pérdida esperada en sentido estricto.

El criterio bidimensional es el más correcto, puesto que separa de forma clara las estimaciones de la probabilidad de insolvencia y de la severidad. Tal como se propone en las siguientes secciones, el criterio bidimensional es adecuado para los modelos basados en teoría del riesgo, cuya metodología insiste especialmente esta dicotomía.

⁴ Definición de *Moody's*: "Ratings are intended to serve as indicators or forecasts of the potential for *credit loss* because of failure to pay, a delay in payment, or partial payment" Definición de *Standard & Poor's*: "Opinion of the general creditworthiness of an obligor, or...of an obligor with respect to a particular...obligation... based on relevant risk factors". Fuente: *Treacy y Carey (1998)*

2.3.3. Número de grados

La variación del número de grados comprendidos en la categoría *Pass*⁵ oscila entre los 4 y los 20 grados, siendo la mediana de 5. Aún cuando el número es coincidente, el riesgo asociado a grados equivalentes en la escala ordinal es casi siempre diferente. Como ejemplo de ello la tabla 1 muestra las tasas medias anuales de insolvencia por grados de las agencias *Moody's* y *Standard & Poor's*.

El mantenimiento de un mayor número de grados supone siempre un mayor coste operativo, debido al trabajo adicional necesario para obtener distinciones precisas a partir de las características de los activos. Un número de grados relativamente reducido es suficiente para procesos de reporting interno, no obstante las entidades técnicamente más avanzadas tienden a utilizar intensivamente modelos cuantitativos, asumiendo los costes adicionales derivados de mantener un mayor número de grados.

Para un número elevado de entidades (16), aproximadamente la mitad de las exposiciones se concentra en una categoría simple, lo que significa poca sensibilidad a los diferentes perfiles de riesgo.

La proporción de grados destinados a activos de poco riesgo (grado de inversión) en relación a los destinados a activos más arriesgados (grado especulativo) varía en función del mix de negocio de cada entidad. No es habitual redefinir la escala de la clasificación, debido a los elevados costes que ello supone, no obstante las entidades que deciden hacerlo tienden a aumentar el número de grados de tipo especulativo de la clasificación.

También es importante la inclusión o no de etiquetas *watch* y su correspondencia con los grados administrativos exigidos por organismos de supervisión. Las listas *watch* identifican aquellos activos que debido a su elevado riesgo o a sus características especiales necesitan mecanismos de control adicionales, como por ejemplo revisiones trimestrales del estatus o informes especiales de los comités de riesgos. En determinados casos, aunque no necesariamente, los activos sujetos a control especial por parte de la entidad coinciden con los activos definidos legalmente como dudosos y para los que se exige algún tipo de provisión. Todas las entidades de la encuesta identifican internamente sus activos conflictivos y aproximadamente la mitad de ellas mantiene etiquetas *watch* en todas las escalas del sistema. Sin ser obligatorio, 48 de las 50 entidades mantienen para los activos conflictivos 3 o 4 categorías equivalentes o directamente relacionables con la escala reguladora⁶.

⁵ Riesgo aceptable desde un punto de vista legal.

⁶ Las categorías y porcentajes de provisión de la escala reguladora son: *Loss* 100 %, *Doubtful* 50 %, *Substandard* 15 %, *Other Assets Especially Mentioned* (sin recomendación). Todos los activos no incluidos en los grupos anteriores pertenecen desde un

Categoría	Moody's	p_1	Standard & Poor's	p_2
Grado de Inversión	Aaa	0.00	AAA	0.00
	Aa, Aa1, Aa2, Aa3	0.03	AA+, AA, AA-	0.00
	A, A1, A2, A3	0.01	A+, A, A-	0.07
	Baa, Baa1, Baa2, Baa3	0.13	BBB+, BBB, BBB-	0.25
Grado Especulativo	Ba, Ba1, Ba2, Ba3	1.42	BB+, BB, BB-	1.17
	B, B1, B2, B3	7.62	B+, B, B-	5.39
	Caa, Ca, C	—	CCC, CC, C	19.96
Default	D	—	D	—

(Tabla 1. Fuente: Treacy y Carey (1998))

p_1 : Tasa media anual de insolvencia. Periodo 1970-95 (en porcentaje). p_2 : Tasa media anual de insolvencia. Periodo 1981-94 (en porcentaje).

2.3.4. Exposiciones

La mayoría de entidades clasifica la totalidad de sus créditos comerciales e institucionales, además de determinados créditos a particulares cuando el volumen o el proceso de generación es similar al de los tipos anteriores. Los activos clasificados incluyen entre otros créditos comerciales inmobiliarios, créditos a entidades financieras, créditos concedidos por unidades de banca privada, etc. En general se trata de operaciones cuya generación implica un proceso de análisis importante.

2.3.5. Clasificación y revisión

La organización y estructura jerárquica de las diferentes unidades implicadas en la clasificación, aprobación de la operación y posterior revisión del *rating* reflejan la orientación de negocio de cada entidad y determinan la estructura operativa del sistema. Generalmente los procesos anteriores son definidos según criterios de eficiencia, consistencia y minimización de costes y en todos los casos el análisis financiero realizado por personal de la entidad juega un papel importante.

Aunque clasificación y aprobación son procesos diferentes, están completa-

punto de vista legal a la categoría *Pass*.

mente interrelacionados. El proceso de clasificación es previo al de aprobación, puede ser realizado por una unidad comercial y supervisado posteriormente por la dirección de su línea de negocio⁷, o bien por una unidad especializada o *credit staff*. El proceso de aprobación está influido por la clasificación inicial del crédito y se completa mediante la firma de uno o varios responsables, el número y nivel jerárquico de los cuales dependerá del volumen y riesgo de la operación. Habitualmente la unidad que ha asignado el grado es responsable del control posterior del mismo, realizando los ajustes necesarios si se observan cambios en las condiciones financieras del prestatario.

Las unidades especializadas o *credit staff* son independientes de las unidades comercial y de marketing, habitualmente pertenecen a una división diferente. Como norma básica su eficiencia se valora según la calidad de la exposición global de la entidad antes que por el volumen de créditos gestionados. En determinados casos es responsable del proceso de clasificación, especialmente en las operaciones volumen elevado.

El mix de negocio de la entidad determina la responsabilidad principal en la asignación del grado. Las entidades que acostumbran a actuar en el mercado de pymes prefieren eficiencia informativa y reducción de costes por lo que, debido a su mayor proximidad al cliente, sitúan la responsabilidad principal en la unidad comercial. Para este tipo de entidades informar a una unidad especializada resultaría más costoso, por tanto la responsabilidad del *credit staff* acostumbra a limitarse a la revisión de las asignaciones efectuadas, especialmente para las exposiciones de elevado volumen. Las entidades que asignan mayor responsabilidad al *credit staff* actúan mayoritariamente en el mercado de grandes empresas. Prefieren seguridad, consistencia y la garantía de que la asignación de grado se realizará únicamente en función del riesgo de la exposición. Por otra parte el coste de mantener una unidad especializada es comparativamente menor si se tiene en cuenta la mayor rentabilidad de las operaciones en el mercado de grandes empresas. Existen casos de responsabilidad compartida a partes iguales, una unidad especializada clasifica exposiciones de grandes empresas y en función de los mismos criterios la unidad comercial clasifica exposiciones de pymes. No obstante la diferente naturaleza de ambas unidades y de las exposiciones clasificadas parece generar divergencias de manera inevitable.

Independientemente de la unidad responsable, la asignación de grado supone:

- Valoración del riesgo asociado al prestatario y al instrumento.
- Inclusión en el grado más acorde al perfil resultante. Implica comparar con los estándares de cada grado, asignando el peso correspondiente a cada variable analizada. En numerosos casos el proceso de análisis consiste sim-

⁷ Las líneas de negocio acostumbran a estar definidas en función del tamaño del prestatario, del sector económico o del tipo de instrumento comercializado.

plemente en incluir el crédito en el grupo más acorde según un conjunto de variables financieras. No obstante, la mayoría de entidades como mínimo está experimentando con modelos de *credit-scoring* aplicables al mercado minorista⁸. Aunque técnicamente la valoración basada en factores de riesgo puede realizarse mediante un modelo mecánico, las entidades encuestadas plantean 3 tipos de objeciones:

1. Son necesarios diferentes modelos aplicables a diferentes tipos de activos y en algunos casos a diferentes áreas geográficas.
2. Las series de datos necesarias para estimar los modelos raramente están disponibles.
3. Conseguir modelos razonablemente fiables comporta un periodo de tiempo durante el cual la entidad no conoce con seguridad el riesgo asumido.

A pesar de las objeciones anteriores, las pocas entidades que han decidido implementar sistemas automáticos afirman haber logrado mayor consistencia en las asignaciones y una reducción clara de costes, en tanto que la cantidad de trabajo necesaria en el proceso es menor.

Entre las entidades encuestadas, las de gran tamaño o muy dispersas geográficamente creen necesario plantear como uno de los objetivos principales del sistema la contribución al mantenimiento de cierta cultura de riesgo. Esto significa cumplir determinados estándares de calidad en las asignaciones frente a las presiones de incrementar beneficios o penetrar en nuevos mercados. Para ello algunas entidades cuentan con el detalle escrito de la selección de factores de riesgo relevantes, su ponderación y demás pasos del proceso. No obstante, debido a la complejidad de la cuestión, a menudo la definición de los pesos de los factores es demasiado imprecisa. La calidad y alcance de los criterios escritos determina la formalidad del proceso y por contraposición la cantidad de información que se transmite por mecanismos informales. Frecuentemente se registra la justificación escrita de las asignaciones efectuadas, incluso algunas entidades utilizan para ello un modelo de formulario específico, con el objetivo de concentrar la atención del clasificador en puntos concretos y de una manera ordenada, sea cual sea la línea de negocio o área geográfica en la que se genere la operación.

El control de la uniformidad y consistencia de las asignaciones se realiza de tres maneras diferentes:

1. Control periódico realizado por la unidad responsable de la asignación de grado, unidad comercial o *credit staff*.
2. Revisiones regulares o periódicas de determinados grupos de exposiciones, habitualmente realizadas por una unidad especializada. Por ejemplo revisiones trimestrales de activos de riesgo elevado, activos incluidos en listas

⁸ Exposiciones cuyo volumen individual no excede de un determinado valor de corte.

watch o en la escala regulatoria.

3. Inspección selectiva de muestras de determinadas líneas de negocio. Realizadas por una segunda unidad especializada en la inspección y el control interno de las asignaciones o *loan unit review*.

Dado que en las entidades encuestadas la definición operativa de los grados acostumbra a transmitirse por medios informales y no por procedimientos escritos, aparecen las unidades de inspección y control interno, cuya función principal es velar por la uniformidad y consistencia en las asignaciones. Esta unidad tiene un punto de vista global sobre la entidad, más allá de unidades de negocio, tipos de exposiciones o áreas geográficas y es la máxima autoridad en la asignación de grado, por este motivo ejerce una influencia importante en el mantenimiento de la disciplina. Como unidad goza de un alto nivel de independencia, informa a alta dirección y tiene su soporte. Entre sus funciones principales figura la mediación en los conflictos entre unidad comercial y *credit staff* y el examen de unidades de negocio, políticas de suscripción y adherencia a criterios administrativos. Acostumbran a inspeccionar muestras aleatorias, normalmente sesgadas hacia los activos más arriesgados (activos de alto riesgo o bien activos incluidos en la escala reguladora). Si no existen problemas importantes como una fusión, cambio de la estructura de la clasificación o introducción de nuevos usos, la unidad sólo propone modificaciones aproximadamente en el 10 % de las operaciones inspeccionadas. Aunque el número de modificaciones parece bajo, es indicativo de la uniformidad de criterios y de que la definición de cada grado se entiende claramente. Otro elemento indicativo del buen funcionamiento del sistema es la expectativa por parte del clasificador que la asignación de grado será revisada. La actuación de esta unidad es menos crítica cuando existe un *credit staff* y cuando el número de grados de la clasificación es bajo, puesto que la posibilidad de discrepancias respecto al riesgo asignado es menor. En cierto modo se entiende que la pugna entre diversas unidades con intereses contrapuestas es beneficiosa para la consistencia global de las asignaciones.

2.3.6. Factores de riesgo

El proceso de clasificación se fundamenta en los criterios que definen cada grado, estructurados como estándares para un conjunto específico de factores de riesgo. Dichos factores pueden incluir medidas del endeudamiento, liquidez, estructura financiera, tamaño, sector económico, posición en el sector, fiabilidad de la información contable, calidad de la gestión, estructura del instrumento etc. y pueden estar en forma de ratio o no.

El análisis pretende determinar la capacidad del prestatario para cubrir los pagos futuros mediante la proyección de su *cash flow* no comprometido. A mayor diferencia entre ambas magnitudes, más favorable *rating*. Se analizan

especialmente conceptos financieros como el endeudamiento y la liquidez del balance, con definiciones exactas para el valor de los ratios utilizados, también se analizan los ingresos y el acceso a fuentes de financiación.

Las características del sector económico son objeto de especial atención; sensibilidad al ciclo económico, volatilidad, flujos de caja, beneficios etc. Si el sector está en declive se asigna mayor riesgo. Por otra parte se valora positivamente la diversificación del negocio y en términos de poder de mercado, se entiende que una posición dominante supone menor vulnerabilidad a presiones competitivas y por tanto menor riesgo.

Otras reglas habituales respecto la valoración de factores de riesgo son las siguientes:

1. **Tamaño.** Se considera que las grandes empresas tienen un mejor acceso a fuentes de financiación y en caso de dificultades disponen de activos liquidables sin implicar la interrupción del proceso productivo. La información financiera genera mayor confianza cuando está auditada. Por ambos motivos reciben comparativamente mejores clasificaciones.
2. **Calidad de gestión.** El criterio de valoración es generalmente subjetivo e incluye debilidades en las áreas de competencia, integridad, sucesión, marcha de individuos clave y actitud respecto la entidad prestamista.
3. **Riesgo país.** El país donde opera el prestatario influye en la clasificación, especialmente si existe riesgo país apreciable. Como norma general el grado asignado al prestatario no puede superar el asignado al país.
4. **Colateral.** Puede aumentar o disminuir el grado. Si existe un garante, el grado asignado al prestatario no puede superar el asignado al garante.
5. **Duración.** La duración de la operación sólo es utilizada ocasionalmente como factor de riesgo.

La mayor parte de las entidades encuestadas creen que los factores de riesgo significativos varían en función de las características del prestatario. Nuevamente existen reticencias respecto la implantación de modelos estadísticos que estimen la probabilidad de insolvencia agregando de forma mecánica un conjunto fijo de variables financieras. No obstante introduciendo cierta flexibilidad en los parámetros, los modelos deberían funcionar correctamente con una mínima inclusión de criterios subjetivos.

2.4. Obtención de probabilidades

La subsección anterior se basa en una encuesta realizada a las 50 entidades de mayor tamaño de Estados Unidos, publicada en el trabajo de *Treacy y Carey (1998)*. En la descripción de las distintas arquitecturas y diseños implementados se menciona la existencia de modelos estadísticos capaces de inferir

la probabilidad de insolvencia mediante el proceso automático de factores de riesgo. Esta práctica reduce enormemente el coste económico del proceso de clasificación y está especialmente diseñada para colectivos numerosos compuestos por pequeñas exposiciones, por ejemplo pymes. Este tipo de riesgos supone una parte importante del negocio de las entidades financieras encuestadas.

En la construcción de un modelo, la metodología estadística escogida supone la aceptación de determinadas hipótesis acerca de la relación funcional entre probabilidades y factores de riesgo e implica determinados requerimientos de información. Tal como se indicaba en la introducción existen 2 grandes familias:

1. **Modelos estructurales.** Permiten obtener probabilidades de insolvencia asociadas a grandes compañías o a exposiciones relacionadas con activos que coticen en mercados de capitales. No obstante no es aplicable a grandes colectivos de pequeños riesgos, puesto que su *input* básico de información es la cotización de la compañía. En el apartado siguiente se analiza el funcionamiento del modelo *KMV(1997)*, basado en hipótesis estructurales.
2. **Modelos reducidos, intensivos o estadísticos.** No establecen hipótesis económicas complejas. A continuación se describe la generalización de la metodología *scoring* propuesta en el trabajo *Information Production in Credit Relationships: On the Role of Internal Ratings in Commercial Banking* de Brunner, Krahn y Weber (2000). Consiste en el enunciado de una norma general válida para las principales metodologías de agregación de factores de riesgo: análisis discriminante, lógit, próbit etc. También se añade un amplio inventario de modelos estadísticos de predicción del “fracaso empresarial” como suceso general que contiene diversas definiciones de insolvencia, *Los modelos de predicción de la insolvencia empresarial: un análisis crítico*, realizado por las autoras Laffarga y Mora (1998). Debido al escaso papel que juega la teoría económica en los estudios empíricos sobre predicción de la insolvencia empresarial a partir de datos contables, los modelos anteriores (también los de *scoring*) son incluidos en la categoría “estadísticos” o “reducidos”

La metodología descrita en esta subsección hace referencia exclusivamente a la estimación de la probabilidad de insolvencia. Cuestiones relativas a la severidad, a la estructura de agregación de los riesgos en una cartera y al tipo de asociación se abordan en las secciones siguientes.

En numerosos casos es imposible parametrizar correctamente un modelo, ya sea por razones técnicas o por insuficiencia de información, por este motivo se añade un último apartado en el que se analiza una técnica utilizada como paso intermedio por algunas entidades, consistente en relacionar sus sistemas

internos con las clasificaciones de alguna agencia externa. También según el trabajo de *Treacy y Carey (1998)*.

2.4.1. Modelos estructurales, *KMV*

El modelo de valoración de *KMV* es uno de los más utilizados por las instituciones del sector, permite calcular probabilidades de insolvencia mediante la estimación de la medida *EDF (Expected Default Frequency)*, obtenida de la relación entre el valor de mercado de los activos de una empresa y su nivel de endeudamiento.

El valor de mercado de los activos y su volatilidad asociada, valores normalmente no observables, son deducidos utilizando la metodología cuantitativa de valoración de opciones, por tanto es necesario citar como referencias teóricas básicas el modelo de valoración de opciones de *Black y Scholes (1973)* y sus aplicaciones a la valoración de deuda con riesgo propuestas por *Merton (1974)*.

El proceso es el siguiente, en primer lugar es necesario obtener el valor de mercado de los activos y su volatilidad, para a continuación calcular la distancia hasta el valor contable de la deuda de la empresa, finalmente se contrasta la distancia resultante mediante datos históricos, obteniendo la frecuencia esperada de insolvencia o *EDF*.

Es necesario suponer que los activos de la empresa cumplen los requisitos exigidos al activo subyacente en el modelo de *Black y Scholes (1973)*. La entidad cuya probabilidad de insolvencia es objeto de análisis tiene la siguiente estructura patrimonial:

Balance	
Activos	Capital
	Deuda

(Tabla 2. Fuente: Nyfeler (2000))

Siguiendo el trabajo de *Merton (1974)*, en el modelo de *KMV* se establece que la evolución del valor de mercado de los activos de una empresa respecto su nivel de endeudamiento y su capital es idéntica a la evolución del beneficio del comprador de una opción de compra europea (*Call*). Tal como muestra el gráfico 1:

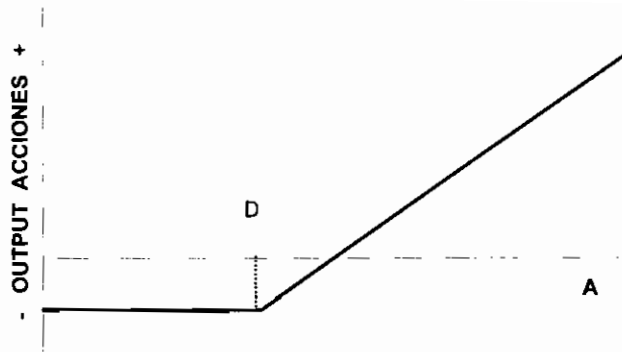


Gráfico 1

Si en un vencimiento concreto T , el valor de mercado de los activos de la empresa supera el nivel de deuda definido $A_T > D$, el reembolso es posible, puesto que el valor de la acción es positivo $A_T - D > 0$. No obstante, si el valor de mercado de los activos no cubre la cuantía de la deuda $A_T < D$, no existe suficiente riqueza para hacer frente a las obligaciones, por lo que la empresa deberá escoger entre la insolvencia o la solicitud de capital adicional a los accionistas. La función está truncada por la izquierda debido a la hipótesis de responsabilidad limitada.

De la interpretación anterior, se deduce que el valor del capital de una empresa E_T equivale a la prima de una *Call* sobre sus activos, a precio de ejercicio igual a su nivel de endeudamiento:

$$Call_T = \text{máx}(A_T - D, 0) = E_T \quad (4)$$

Donde el valor de mercado del capital es función de cinco variables:

$$\bar{E}_T = f(\bar{A}_T, \bar{D}, \bar{r}, \sigma_A, \bar{t}) \quad (5)$$

A_T , valor de mercado de los activos. D , valor de la deuda. r , tasa de interés sin riesgo. σ_A , volatilidad de los activos. t , vencimiento. La barra sobre las variables indica que son directamente observables.

Es necesario tener en cuenta que, si bien el valor de la deuda es un dato contable, no siempre es fácil determinar la estructura de las obligaciones. En este modelo, el nivel de deuda durante el periodo es fijo y equivale al valor total de las obligaciones a corto plazo más la mitad del *book value* (valor de las obligaciones a largo). Por tanto, según esta definición de insolvencia el valor de mercado de los activos A_T puede ser inferior a la deuda D durante el periodo $t < T$.

La sustitución de la función f anterior por la fórmula de valoración de *Black y Scholes (1973)*, permite despejar (para $t = 0$) el valor no observable de los activos a partir del valor de mercado de las acciones:

$$E_t = A_t \phi(d_1) - D e^{-r(T-t)} \phi(d_2) \quad (6)$$

d_1 y d_2 coeficientes de *Black y Scholes (1973)*. ϕ , distribución normal (0,1).

En el modelo se asume que existe la siguiente relación entre la volatilidad (observable) de las acciones de una empresa y la de sus activos:

$$\sigma_E = \frac{A_0}{E_0} \phi(d_1) \sigma_A \quad (7)$$

Las dos últimas ecuaciones forman un sistema. Deducidos los valores de A_T y σ_A , la distancia que separa la empresa de la insolvencia es:

$$DD = \frac{A_T - D}{\sigma_A} \quad (8)$$

La distancia anterior es una medida normalizada que depende de la volatilidad de los activos. Comparando este resultado con datos históricos sobre insolvencias de empresas con idéntica distancia se obtiene la frecuencia esperada *EDF*, que equivale a la probabilidad de insolvencia estimada.

El sistema también permite generar frecuencias esperadas considerando dependencia entre el comportamiento de los activos de N empresas pertenecientes a una misma cartera.

Por último es necesario tener en cuenta las siguientes cuestiones:

- Debido a la mínima cantidad de información necesaria y a la naturaleza de su fuente principal, el mercado de valores, la sensibilidad del método es excelente. Existe una variante del modelo adaptada a empresas que no cotizan.
- La teoría de valoración de opciones es un instrumento analítico ampliamente contrastado.
- El modelo viola sus propias hipótesis iniciales puesto que los activos de la empresa no son negociables, condición indispensable en valoración de opciones.
- En situaciones de crisis económica la probabilidad de insolvencia experimenta saltos difícilmente modelizables a partir del movimiento Browniano.
- Resulta complicado desarrollar las hipótesis referidas a la estructura de las obligaciones y a la responsabilidad limitada.

2.4.2. Modelos estadísticos

La clasificación de un bono negociable en un mercado de deuda, realizada por una agencia externa y de un préstamo ilíquido en la cartera de una entidad, a pesar de su diferente naturaleza, derivan de un proceso estadístico similar.

En ambos casos el *rating* total asociado a un prestatario refleja la probabilidad de insolvencia y se obtiene de la agregación de un determinado número de criterios, mediante una función de ponderación generalmente lineal. En el caso de las agencias, la precisión de la estimación está garantizada por su posición en el mercado, entre emisores de deuda e inversores⁹. En el caso de las entidades financieras nace de su propio interés en evitar una selecciones adversas y mantener el control del riesgo asumido.

La siguiente igualdad expresa una regla general de agregación simple:

$$v(a) = \sum_i k_i v_i(a_i) \quad (9)$$

a , individuo en proceso de clasificación. i , criterio o factor de riesgo. v_i , función predefinida a aplicar sobre el factor i . k_i , peso asignado a cada factor.

La agregación también puede realizarse en dos etapas:

$$v(a) = \sum_j k_j v_j(a_j) = \sum_j k_j \sum_i k_{ji} v_{ji}(a_{ji}) \quad (10)$$

j , sub-*rating* a agregar. k_j , peso asignado a cada sub-*rating* j .

Como ejemplo de agregación simple, el *Z-score* de *Altman* (1968) basado en análisis lineal discriminante, permite clasificar posibles futuros prestatarios en “buenos” o “malos” a partir de un determinado punto de corte.

$$Z = 1,2X_1 + 1,4X_2 + 3,3X_3 + 0,6X_4 + 0,999X_5 \quad (11)$$

X_1 , fondo de maniobra /total activos. X_2 , beneficio retenido/ total activos. X_3 , EBIT/ total activos. X_4 , valor de mercado capital/ valor contable exigible. X_5 , ventas /total activos. Se obtiene como resultado una puntuación (*score*), el punto 1,81 corta a su izquierda los clientes potencialmente insolventes, el

⁹ La relación inversa entre el grado asignado a una emisión y el *spread* de mercado, expresa el valor económico de la reputación de una agencia. *Blume, Lim y MacKinlay (1998)*.

punto 2,99 deja a su derecha los clientes óptimos. Fuente: *Caouette, Altman y Narayanan (1998)*

En la actualidad los mecanismos de agregación-ponderación de factores de riesgo constituyen el principal sistema automático de clasificación. Si bien existen numerosos factores de riesgo de diferente naturaleza, el conjunto global utilizado por las entidades financieras no difiere significativamente, tampoco difiere del utilizado por las agencias de *rating* externo, tal como se aprecia en la tabla 3 siguiente:

S&P	Moody's	Entidad "estándar"
Riesgo financiero: Balance, contabilidad Política financiera Beneficio Estructura capital Cash flow Flexib. financiera	Riesgo financiero: Cash flow Liquidez Estructura exigible Capital y reservas	Factores económicos: Situación operativa (Cash flow, benef, etc.) Situación financiera (Deuda, liquidez, etc.)
Riesgo de negocio: Características sector Posición compet.	Compet. / operacional: Situación competitiva Diversificación Ventas, costes, res.op. Vol. ventas / compras Estructura corp. / legal: Inclusión cías asociadas	Situación corporativa: Evaluación del sector Posición compet. Producto / rango Riesgos especiales Predicciones fin. Estructura
Management:	Calidad management: Planificación y control Experiencia Estructura Organización sucesión	Management: Experiencia Sucesión Calidad control fin.
		Comercial / contable

(Tabla 3. Fuente: Brunner, Krahn y Weber (2000))

La concreción de las ecuaciones (9) y (10) anteriores, da lugar a diferentes técnicas estadísticas¹⁰. Sobre esta cuestión resulta muy aconsejable revisar el trabajo de *Laffarga y Mora (2002)*, donde se realiza un análisis crítico de 55 modelos de predicción originalmente desarrollados en Estados Unidos, Reino Unido y Australia. Sin ser exhaustivo, el trabajo contiene la práctica totalidad de los modelos aplicados en España. Se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

1. **Autor.**
2. **Técnica econométrica.** Modelos univariantes, multivariantes paramétricos (análisis discriminante, lógit y próbit) y multivariantes no paramétricos (particiones recursivas y redes neuronales), etc.
3. **Tipo de empresa.** Sobre la que se realiza la predicción: grandes, pequeñas o pymes.
4. **Emparejamiento de datos.** Por sector, tamaño, localización geográfica, etc.
5. **Definición de la variable dependiente.** Quiebra legal, suspensión de pagos, etc.
6. **País.**
7. **Periodo en el que se realiza el estudio.**
8. **Mejores ratios (factores de riesgo).** Ratios financieros básicos, ratios de rentabilidad, ratios de rotación, ratios de generación de recursos, ratios de estructura, ratios de endeudamiento y otros ratios.
9. **Capacidad de predicción.** El porcentaje de acierto oscila entre el 70 y el 99%.

El trabajo destaca la ausencia de una teoría general sobre el fracaso empresarial y el desacuerdo existente en la definición del concepto y por tanto en la definición de la variable dependiente. De las tres situaciones descritas por *Altman (1981)* fracaso económico o ausencia de rentabilidad, fracaso financiero o insolvencia técnica y fracaso legal o insolvencia definitiva (quiebra) la última es la más utilizada como variable dependiente. Ello es debido a la mayor objetividad y rigurosidad del concepto y a la mayor disponibilidad de datos, al menos en el caso español.

Respecto las variables independientes, se citan como limitaciones nuevamente la ausencia de una línea teórica aceptada, limitaciones estadísticas diversas y las diferencias existentes por tamaño y por sector. Destacan por su poder predictivo los ratios relacionados con la rentabilidad y con la generación de recursos.

La mayoría de los modelos analizados en el trabajo de *Laffarga y Mora (1998)* no generan directamente probabilidades de insolvencia. No obstante, en la práctica el resultado se interpreta como una medida de riesgo a partir de

¹⁰ No están incluidos los modelos de tipo no lineal (discriminantes cuadráticos o redes neuronales).

la cual es posible generar una escala de clasificación y estimar a posteriori probabilidades de insolvencia para cada uno de los grados existentes.

Por último es necesario mencionar la creciente inclusión de variables macroeconómicas y cualitativas en los modelos estadísticos, con el objetivo de suavizar la fuerte influencia de los procedimientos contables sobre los factores de riesgo de tipo cuantitativo.

2.4.3. Correspondencia con las categorías definidas por una agencia externa

En un sistema de clasificación suficientemente preciso y consistente, diferentes activos con un nivel similar de riesgo deberían clasificarse en el mismo grado. Alcanzar tal nivel de precisión no es fácil, sobre todo teniendo en cuenta que p_i , $E[LGD]$ y $E[L]$ no son observables ex-ante. En el proceso de ajuste surgen principalmente dos problemas, en primer lugar como comprobar que una colección de activos de un mismo tipo, clasificados en un mismo grado, se comportan de forma equivalente en términos de insolvencia y en segundo lugar, como uniformizar criterios de clasificación que hacen referencia a factores de riesgo asociados a activos diferentes.

Por otra parte, exceptuando el caso de los modelos de tipo estructural, para los que los requerimientos de información histórica son menores, existen otros problemas relacionados con la disponibilidad de datos; pocas entidades disponen de información sobre un ciclo económico completo, frecuentemente las entidades han retenido alguna información sobre sus pérdidas pero no según el grado, o bien se han fusionado distorsionando los criterios de clasificación y la información de sus bases de datos.

En el caso de la severidad la situación es relativamente mejor, la estimación de parámetros sólo requiere información histórica de los activos que han causado insolvencia. Lo que supone un volumen de información mucho menor y más a menudo disponible. Algunas entidades ya han empezado a recolectar información sobre la severidad basada en su propia experiencia.

En ausencia de bases de datos consistentes, la impresión de *Treacy y Carey (1998)* es que la creación de los estándares que definen cada grado y su posterior calibración recae en gran medida sobre el criterio subjetivo del personal de unidades técnicas, especialmente del personal *senior* con antigüedad superior a un ciclo económico. Procedimiento de utilidad discutible si el objetivo es modelizar el comportamiento estadístico de un sistema de clasificación complejo.

Como solución a estos problemas existe la posibilidad de establecer un sistema de correspondencia, también conocido como *mapping*, entre la escala de clasificación interna y la escala de una agencia de *rating* externo. Gracias

a la antigüedad de las agencias en el mercado existe suficiente información histórico-estadística sobre el comportamiento de los diferentes grados. Además la consistencia de su análisis está ampliamente contrastada.

Las entidades encuestadas fundamentan la correspondencia entre ambas escalas en una o varias de las siguientes premisas:

1. Algunos de los clientes de las entidades financieras son también emisores de deuda clasificados por una agencia.
2. Las agencias frecuentemente publican series históricas de emisiones clasificadas, junto con las características concretas de los títulos. *Standard & Poor's* ha publicado incluso series indicativas del valor de ratios financieros para cada grado.
3. Criterios subjetivos.

La principal dificultad que plantea este método es consecuencia de la diferente concepción de las probabilidades de insolvencia. Las agencias consideran diferentes escenarios posibles a lo largo del ciclo económico o industrial, valorando su impacto sobre la estructura financiera del prestatario y asignando la probabilidad asociada al peor escenario posible. En cambio las entidades financieras asignan probabilidades de insolvencia según la condición económico-financiera del prestatario en el momento de la valoración.

La diferencia entre arquitecturas se manifiesta por ejemplo en el diferente volumen de migraciones. Las entidades que utilizan este sistema, generalmente sobrestiman o infraestiman el riesgo en función del momento del ciclo económico en el que se establece la correspondencia y del riesgo intrínseco de cada grado.

2.5. Teoría del riesgo

Diversas referencias bibliográficas ofrecen un amplio desarrollo de las características del modelo individual de teoría del riesgo, por ejemplo *Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt (1997)*, *Daykin, Pentikäinen y Pesonen (1994)*, *Klugman, Panjer y Willmot (1998)* o *Panjer y Willmot (1992)*. De forma breve, las principales hipótesis que de algún modo tendrán implicación en el análisis del riesgo de crédito son las siguientes:

El número de riesgos de la cartera se conoce previamente. La expresión de las pérdidas totales por siniestros (en este caso insolvencias) es:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad (12)$$

S , es la pérdida total de la cartera y X_1, X_2, \dots, X_n , es un conjunto de variables aleatorias no negativas definidas como,

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases} \quad (13)$$

En la expresión anterior, $I_i \sim b(q_i)$, es una variable aleatoria de *Bernoulli* cuya función de cuantía es

$$P(I_i = 1) = q_i, P(I_i = 0) = 1 - q_i = p_i \quad (14)$$

Si $I_i = 1$, se produce una insolvencia derivada del riesgo i -ésimo y por lo tanto la cartera soporta una pérdida de cuantía B_i . Contrariamente si $I_i = 0$, no hay pérdida adicional, lo que implica $B_i = 0$. Bajo la influencia del indicador I_i , la variable aleatoria (no negativa) B_i cuya función de distribución es F_{B_i} , recoge la cuantía de la insolvencia del riesgo i -ésimo.

Generalmente se asume:

- Equidistribución entre los riesgos X_1, X_2, \dots, X_n (no estricta)
- Independencia entre los riesgos X_1, X_2, \dots, X_n
- Independencia entre las distribuciones F_{I_i} y F_{B_i}

También en las referencias anteriores, se describe el riesgo asociado a la variable i como $X_i = I_i B_i$. La existencia de una probabilidad p_i de ausencia de siniestros permite expresar X_i como variable condicionada por I , de la forma:

$$F_{X_i} = p_i + q_i F_{B_i} \quad (15)$$

Relación fundamental que abre diferentes posibilidades de trabajo. También se manifiesta a nivel de la función generatriz de momentos,

$$M_{X_i}(t) = p_i + q_i M_{B_i}(t) = P_{I_i}(M_{B_i}(t)) \quad (16)$$

Donde P_{I_i} , es la función generatriz de probabilidad (*fgp*) de la variable I_i .

La *fgp* de S (pérdida total de la cartera) se obtiene aplicando la hipótesis de independencia:

$$M_S(t) = E \left[e^{t(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} \right] = E \left[e^{tx_1} e^{tx_2} \dots e^{tx_n} \right] = \quad (17)$$

$$= E[e^{tx_1}] E[e^{tx_2}] \dots E[e^{tx_n}] = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

Lo que indica que la función de distribución agregada es la n -ésima convolución de las respectivas individuales,

$$F_S = F_{X_1} * F_{X_2} * \dots * F_{X_n} \quad (18)$$

Bajo hipótesis de independencia, las expresiones de la esperanza matemática y de la varianza se obtienen respectivamente por agregación de las individuales:

$$E[S] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \quad (19)$$

$$Var[S] = \sum_{i=1}^n Var[X_i] \quad (20)$$

La obtención de F_S directamente por convolución presenta algunos problemas, puesto que el tiempo de computación incrementa con el número de riesgos considerados. Existe la posibilidad de simplificar los cálculos utilizando métodos recursivos, como por ejemplo el de *Panjer y Willmot (1992)*. Otra solución consiste en aproximar F_S mediante la distribución normal, método descrito en *Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt (1997)*, no obstante la elevada asimetría observada en el caso del riesgo de crédito desaconsejaría este método. Una tercera vía es la aproximación *Poisson* compuesta del modelo individual, propuesta en *Panjer y Willmot (1992)* o en *Klugman, Panjer y Willmot (1998)*.

2.5.1. Aproximación *Poisson* compuesta

Permite, siempre que se cumplan las condiciones necesarias, obtener una aproximación del modelo individual mediante la distribución *Poisson* compuesta. Posibilita la aplicación posterior de métodos recursivo para aproximar la distribución de F_S .

Definición de transformada de Laplace:

La distribución de la transformada de *Laplace* de una variable X es $L_X(z) = E[e^{-zx}] = \int e^{-zx} dF(x)$

La relación anterior $F_{X_i} = p_i + q_i F_{B_i}$ también se cumple para la transformada de *Laplace* de X_i , la expresión agregada a nivel de cartera es:

$$L_S(t) = \prod_{i=1}^n (p_i + q_i L_{B_i}(t)) = \prod_{i=1}^n (1 + q_i (L_{B_i}(t) - 1)) \quad (21)$$

Para cada valor de t en el que $L_X(t)$ existe, la expansión en series del logaritmo de la ecuación anterior es:

$$\log L_S(t) = \sum_{i=1}^n \log(1 + q_i (L_{B_i}(t) - 1)) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (q_i (L_{B_i}(t) - 1))^k \quad (22)$$

Considerando solamente el primer orden de la expansión en series, se obtiene:

$$\log L_S(t) = \sum_{i=1}^n q_i (L_{B_i}(t) - 1) = \left(\sum_{i=1}^n q_i \right) \left[\frac{\sum_{i=1}^n q_i L_{B_i}(t)}{\sum_{i=1}^n q_i} - 1 \right] = \lambda [L_X(t) - 1] \quad (23)$$

La expresión anterior es el logaritmo de la transformada de *Laplace* de una distribución *Poisson* compuesta cuyo parámetro λ es:

$$\lambda = \sum_{i=1}^n q_i \quad (24)$$

$L_X(t)$ determina la transformada de *Laplace* de la función de composición (o cuantía),

$$L_X(t) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i L_{B_i}(t)}{\sum_{i=1}^n q_i} \quad (25)$$

Del mismo modo la función de distribución y la *fgp* se obtienen como media ponderada de las correspondientes individuales,

$$F_X(t) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i F_{B_i}(t)}{\sum_{i=1}^n q_i}, \quad P_X(t) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i P_{B_i}(t)}{\sum_{i=1}^n q_i} \quad (26)$$

Por tanto es posible aproximar el modelo individual mediante una distribución *Poisson* compuesta del tipo $F_S^{CP} = F_N(F(X))$, con fgp $P_{SPC} = e^{\lambda(P_X(t)-1)}$. Implica asumir que las probabilidades q_i son suficientemente pequeñas como para prescindir de la posibilidad que un individuo sea insolvente 2 o más veces.

Existen diversas estimaciones sobre la distancia máxima o error máximo cometido al aproximar, la primera de ellas en *Le Cam (1960)*. En el caso de independencia entre riesgos, *Gerber (1984)* propone la siguiente relación entre las dos distribuciones:

$$d(F_S^{ind}, F_S^{PC}) \leq \sum_{i=1}^n q_i^2 \quad (27)$$

La suma de la parte derecha de la inecuación indica el error máximo cometido en la aproximación, que será reducido siempre que las probabilidades de ocurrencia q_i y el número de riesgos n sean también reducidos. Por último es necesario tener en cuenta que el hecho de utilizar sólo la expansión en series de primer orden en la ecuación (22) implica que las probabilidades de ocurrencia individuales deben ser necesariamente pequeñas. Empíricamente es fácilmente contrastable que en el campo del riesgo de crédito este punto no siempre se cumple, especialmente para riesgos de calificación especulativa (*BB* o inferiores).

2.5.2. El modelo *CreditRisk+*

Desde la perspectiva del riesgo de crédito el modelo *CreditRisk+* es de tipo estadístico o reducido (no estructural). Desde un punto de vista actuarial, constituye un ejemplo de aproximación *Poisson* compuesta del modelo individual de teoría del riesgo. Con la particularidad que el indicador de insolvencia I_i se define de forma condicionada respecto su propio parámetro p_i ¹¹, el cual se considera aleatorio generando un modelo mixto.

CR+ permite obtener, sin recurrir a simulación, la aproximación analítica de la función de distribución de las pérdidas por insolvencia de una cartera $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$, para un horizonte temporal de un año. La información inicialmente necesaria es:

1. Exposición crediticia asociada a cada riesgo E_i .
2. Probabilidad de insolvencia asociada a cada riesgo p_i .

¹¹ En el modelo *Credit Risk+* y en general en todos los modelos de riesgo de crédito, el parámetro asociado al suceso principal (insolvencia) se denomina p . En contraposición, en los modelos de teoría del riesgo el parámetro asociado al suceso principal (siniestro) se denomina q .

3. Volatilidad de la probabilidad de insolvencia asociada a cada riesgo σ_{p_i} .
4. Ratio de recuperación δ_i (constante).

B_i es en este caso una cantidad cierta igual al producto de la severidad (LGD) por la exposición inicial $B_i = E_i LGD_i = E_i(1 - \delta_i)$, puesto que el ratio de recuperación δ_i se asume constante. B_i es independiente del indicador de insolvencia I_i .

El modelo utiliza unidades de exposición discretas $v_i \in N$, que se obtienen de redondear la exposición B_i al múltiplo entero más cercano de la unidad base v , $v_i = \frac{B_i}{v}$

La posible pérdida asociada a cada exposición es una variable aleatoria no negativa de la forma:

$$X_i = \begin{cases} v_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Donde $I_i \sim b(p_i)$

Las probabilidades de insolvencia p_i se definen como variables aleatorias continuas con una volatilidad determinada σ_{p_i} , causante de la variabilidad de las tasas a lo largo del ciclo económico. De esta forma los riesgos que integran la cartera X_1, X_2, \dots, X_n son estadísticamente independientes y la influencia de variables de carácter sistemático o factores subyacentes de naturaleza económica se manifiesta a través de las volatilidades σ_{p_i} . Por tanto no se utilizan explícitamente las posibles asociaciones entre riesgos.

El documento técnico de CR+ plantea en primer lugar un modelo restringido, de manera que cada riesgo i sólo puede ser afectado por un único factor R_j , de los $j (= 1, \dots, k)$ posibles, indica la pertenencia a un único sector económico, geográfico etc. De este modo se generan k subcarteras independientes de la forma:

$$S_j = X_{1j} + X_{2j} + \dots + X_{n_j} = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} \quad (29)$$

S_j definida según las hipótesis del modelo individual,

$$P_{S_j}(t) = \prod_{i=1}^{n_j} P_{X_{ij}}(t) = \prod_{i=1}^{n_j} q_{ij} + p_{ij} P_{v_{ij}}(t) \quad (30)$$

Si se aplica la aproximación propuesta en el apartado anterior:

$$P_{S_j}(t) \approx e^{\lambda_j(P_{X_j}(t)-1)} \quad (31)$$

con $P_{X_j}(t) = \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i=1}^{n_j} p_{ij} t^{v_{ij}}$ y $\lambda_j = \sum_{i=1}^{n_j} p_{ij}$

Es necesario tener en cuenta que la definición (aleatoria) de las probabilidades p_{ij} sobre la aproximación *Poisson* compuesta traslada la aleatoriedad al parámetro λ_j , condicionando la distribución de S_j y generando un modelo mixto:

$$P_{S_j|R_j}(t) = e^{\lambda_j P_{X_j}(t)-1} \quad (32)$$

$R_j \sim \Gamma(1, \sigma_j^2)$, factores de riesgo independientes *Gamma* distribuidos.

La distribución no condicionada se obtiene al incorporar la función de densidad (*Gamma*) del correspondiente factor de riesgo en la *fgp* e integrando respecto todos los posibles valores de R_j :

$$P_{S_j}(t) = \int_{r=0}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^{n_j} \bar{p}_i r_j (P_{X_j}(t)-1)} f(r) dr \quad (33)$$

Al substituir $f(r)$ por la densidad de *Gamma* la distribución se transforma en binomial negativa compuesta:

$$P_{S_j}(t) = \left[\frac{1 - \pi_j}{1 - \pi_j P_{X_j}(t)} \right]^{\frac{1}{\sigma_j^2}} \quad (34)$$

Donde $\pi_j = \frac{\sigma_j^2 \lambda_j}{1 + \sigma_j^2 \lambda_j}$

La cartera global se obtiene como una suma de binomiales negativas:

$$P_S(t) = \prod_{j=1}^k P_{S_j}(t) = \prod_{j=1}^k \left[\frac{1 - \pi_j}{1 - \pi_j P_{X_j}(t)} \right]^{\frac{1}{\sigma_j^2}}, \quad j = 1, \dots, k \quad (35)$$

La generalización resulta de asumir que existen K factores de riesgo R_1, \dots, R_k independientes entre sí generadores de la variabilidad de las probabilidades p_i :

$$p_i = \bar{p}_i \sum_{j=1}^k a_{ij} R_j \quad (36)$$

$R_j \sim \Gamma(1, \sigma_j^2)$, factores de riesgo independientes *Gamma* distribuidos. a_{ij} , medida de la sensibilidad del riesgo i respecto del factor j . Se cumple $\sum_{j=1}^k a_{ij} = 1$, para todo i .

Incorporando las respectivas densidades asociadas e integrando sucesivamente:

$$P_S(t) = \int_{R^+} \dots \int_{R^+} e^{\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} r_j (t^{v_i-1}) \right)} f_1(r_1) \dots f_k(r_k) dr_1 \dots dr_k \quad (37)$$

$$P_S(t) = \int_{R^+} \dots \int_{R^+} e^{(t^{v_i-1}) \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i a_{ij} \right) r_j} f_1(r_1) \dots f_k(r_k) dr_1 \dots dr_k \quad (38)$$

$$P_S(t) = \int_{R^+} \dots \int_{R^+} e^{(t^{v_1-1}) \lambda_1 r_1} f_1(r_1) \dots e^{(t^{v_k-1}) \lambda_k r_k} f_k(r_k) dr_1 \dots dr_k \quad (39)$$

Nuevamente la cartera global se obtiene como suma de binomiales negativas:

$$P_S(t) = \prod_{j=1}^k \left[\frac{1 - \pi_j}{1 - \pi_j P_{X_j}(t)} \right]^{\frac{1}{\sigma_j^2}} \quad (40)$$

Con $P_{X_j}(t) = \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i=1}^{n_j} \bar{p}_{ij} a_{ij} t^{v_i}$, $\lambda_j = \sum_{i=1}^{n_j} \bar{p}_{ij} a_{ij}$ y $\pi_j = \frac{\sigma_j^2 \lambda_j}{1 + \sigma_j^2 \lambda_j}$

La distribución binomial negativa aparece como consecuencia de la heterogeneidad del parámetro λ_j en distintos momentos del tiempo, *Daykin, Pentikäinen y Pesonen (1994)*. Heterogeneidad que se debe a la variabilidad de las tasas de insolvencia. Alternativamente y dada la naturaleza del riesgo de crédito, parece lógico interpretar la aparición de la distribución binomial negativa como una forma de contagio positivo tal como se describe en *Bühlmann (1970)*, no obstante la interrelación entre parámetros en este último caso no está demostrada.

La utilización del modelo CR+ requiere tener en cuenta previamente los siguientes aspectos, considerando su efecto en los cálculos resultantes:

- El condicionamiento a factores de riesgo Gamma distribuidos es una fórmula ampliamente utilizada en el sector asegurador. No obstante en el caso del riesgo de crédito no está justificada empíricamente *Nyfelner (2000)*.
- No se contempla el tratamiento estocástico del ratio de recuperación.

- Las probabilidades de insolvencia individuales no siempre son reducidas especialmente en el caso de riesgos de calificación especulativa, por este motivo la aproximación *Poisson* compuesta puede no funcionar correctamente llegando a generar probabilidades de insolvencia superiores a 1, *Gordy (2000)*.
- El hecho de utilizar este tipo de aproximación supone asumir un posible error que debería ser cuantificado. Para el caso independencia deberían utilizarse los máximos propuestos por *Gerber (1984)* o *Michel (1987)*. El efecto en términos de distancia generado por la transformación del modelo en mixto es de difícil evaluación. En caso de considerar dependencia débil o local existe una aproximación genérica del error *Chen (1975)*, la aplicación concreta al modelo individual está descrita en *Goovaerts y Dhaene (1996)*.

3. Metodología

Seguidamente se propone introducir algunas de las aportaciones de los autores: *Cossette, Gaillardetz, Marceau y Rioux (2002)* y *Genest, Marceau y Mesfioui (2003)* respecto la utilización de cópulas en el modelo individual, *Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas y Vincke (2002)* en lo referido al tratamiento del concepto de comonotonidad. También es necesario recurrir a *Wang (1998)* en lo referido a la aplicación del algoritmo *fast Fourier transform* (FFT) en este campo.

Mejorar la cuantificación de la dependencia implica establecer las hipótesis económicas adecuadas y determinar como se va a trasladar su efecto al modelo clásico de teoría del riesgo. En este sentido se asume que la evolución de las condiciones macroeconómicas ejerce una influencia común sobre todos los créditos incluidos en una cartera. Efecto que será incrementado o atenuado en función del nivel de diversificación de la cartera.

Teniendo en cuenta esta premisa, se propone asumir la existencia de asociación entre los indicadores de insolvencia individual I_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). Por tanto, la información sobre el tipo y grado de dependencia estará contenida en su función de distribución multivariante $F_{I_1, \dots, I_n}(i_1, \dots, i_n)$.

3.1. Cópulas

La denominación “cópula” hace referencia al nexo existente entre una distribución multivariante $H(x_1, \dots, x_n)$ y sus respectivas marginales F_1, \dots, F_n , relación determinada por la función $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$. Según la definición más extendida en la literatura, $C = C(u_1, \dots, u_n)$ es una función de distribución multivariante cuyas marginales se distribuyen uniformemente, $u_i \sim U(0, 1)$.

Su importancia reside en que la información sobre la estructura de dependencia implícita en $H(x_1, \dots, x_n)$ se cuantifica de forma aislada en la cópula, lo que permite expresar la función de distribución conjunta a partir de las marginales.

Teorema de Sklar:

Si H es una función de distribución n -dimensional cuyas marginales son F_1, \dots, F_n , existe una n -copula C tal que para todo $X \in R^n$,

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \tag{41}$$

Si F_1, \dots, F_n son continuas, C es única; si no C está únicamente determinada en $RanF_1 \times \dots \times RanF_n$ (donde $RanF$ es el rango de la función F). Inversamente si C es una n -copula y F_1, \dots, F_n son funciones de distribución, la función H definida anteriormente es una función de distribución n -dimensional, cuyas marginales F_1, \dots, F_n . Traducción de *Nelsen (1999)*.

El teorema de *Sklar* justifica teóricamente una estructura general de representación de distribuciones multivariantes y da lugar a diferentes métodos de generación de cópulas. La categoría *arquimedean* comprende una gran variedad de familias de características diversas que comparten un método específico de generación:

Si $\varphi : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ (generador de la cópula) es una función continua, convexa y estrictamente decreciente tal que $\varphi(1) = 0$, entonces la función:

$$C_\varphi(u) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \tag{42}$$

Donde φ^{-1} es la inversa de φ , es una *arquimedean* cópula. Ejemplos:

- Cópula independencia:

$$C^{IND}(u) = \exp \{ \ln u_1 + \dots + \ln u_n \} = u_1 \dots u_n \tag{43}$$

- Clayton cópula:

$$C_\alpha^{CL}(u) = \left(u_1^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} - (n - 1) \right)^{-1/\alpha}, \alpha \in [-1, \infty) / \{0\} \tag{44}$$

- Frank cópula:

$$C_{\alpha}^F(u) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1) \dots (e^{-\alpha u_n} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right), \alpha \in (-\infty, \infty) / \{0\} \quad (45)$$

▪ Gumble copula:

$$C_{\alpha}^G(u) = \exp \left\{ - [(-\ln u_1)^{\alpha} + \dots + (-\ln u_n)^{\alpha}]^{1/\alpha} \right\}, \alpha \in [1, \infty) \quad (46)$$

El valor del parámetro α , del cual depende el generador, determina el grado de asociación entre las variables. Otras características como la simetría o el nivel de dependencia entre sucesos extremos dependen de la estructura particular de cada familia.

Todas las cuestiones relacionadas con las propiedades de las cópulas se encuentran ampliamente desarrolladas en *Frees y Valdez (1998)*, *Joe (1997)* o *Nelsen (1999)*.

3.2. Distribución del número de insolvencias

Según las premisas anteriores, la distribución multivariante del número de insolvencias total en la cartera $F_{I_1, \dots, I_n}(i_1, \dots, i_n)$, se puede representar como:

$$F_{I_1, \dots, I_n}(i_1, \dots, i_n) = C(F_{I_1}(i_1), \dots, F_{I_n}(i_n)) \quad i_k = 0, 1; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (47)$$

Donde $C(u_1, \dots, u_n)$ es una cópula n -variante.

La ventaja de este tratamiento es que la selección de una u otra cópula permite diferentes y variadas estructuras de dependencia, cuantificando su efecto de forma aislada respecto las funciones de distribución marginales.

Para ello es necesario el desarrollo multivariante de la expresión:

$$M_{X_i}(t) = q_i + p_i M_{B_i}(t) = P_{I_i}(M_{B_i}(t)) \quad (48)$$

tal como se propone en *Cossette, Gaillardetz, Marceau y Rioux (2002)*,

$$M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = E[e^{t_1} \dots e^{t_n}] = P_{I_1, \dots, I_n}(M_{B_1}(t_1), \dots, M_{B_n}(t_n)) \quad (49)$$

Puesto que permite relacionar las expresiones de $M_{X_i}(t)$ y $M_S(t)$ con la fgp del vector I_i , ($i = 1, 2, \dots, n$)

De este modo las componentes del vector aleatorio X_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) estarán determinados por la estructura de dependencia asumida al calcular la distribución multivariante del vector I_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). La función generatriz de momentos de $M_S(t)$, se obtiene de forma inmediata aplicando el siguiente lema, también del trabajo de *Cossette et al. (2002)*.

Si $M_{Y_1, \dots, Y_n}(t_1, \dots, t_n) = E[e^{t_1 y_1} \dots e^{t_n y_n}]$ es la fgm multivariante del vector Y_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), entonces

$$\text{Si } Z = Y_1 + \dots + Y_n, \quad M_Z(t) = M_{Y_1, \dots, Y_n}(t, \dots, t)$$

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{t(Y_1 + \dots + Y_n)}] = E[e^{tY_1} \dots e^{tY_n}] = M_{Y_1, \dots, Y_n}(t, \dots, t) \quad (50)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} M_S(t) &= P_{I_1, \dots, I_n}(M_{B_1}(t_1), \dots, M_{B_n}(t_n)) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}} f_{I_1, \dots, I_n}(i_1, \dots, i_n) (M_{B_1}(t))^{i_1} \dots (M_{B_n}(t))^{i_n} \end{aligned} \quad (51)$$

La expresión anterior contiene la densidad multivariante del vector I , obtenida mediante recurrencias de la función de distribución.

Caso bivalente ($n=2$):

$$f_{I_1, I_2}(i_1, i_2) = F_{I_1, I_2}(i_1, i_2) - F_{I_1, I_2}(i_1 - 1, i_2) - F_{I_1, I_2}(i_1, i_2 - 1) + F_{I_1, I_2}(i_1 - 1, i_2 - 1) \quad (52)$$

$$\forall i_k = 0, 1 \quad ; (k = 1, 2)$$

Fórmula general:

$$f_{I_1, \dots, I_n}(\bar{i}) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \sum_{S \in \mathcal{P}_r^n} F_{I_1, \dots, I_n}(\bar{i} - I(s)) \quad (53)$$

Donde $P_r^n = \{S \subset \{1, \dots, n\} \mid \#S = r\}$, $I(S) = (j_1, \dots, j_n)$

$$j_k = \begin{cases} 0, & k \notin S \\ 1, & k \in S \end{cases}$$

Finalmente la expresión de $F_S(S)$, se obtiene de la inversión de $M_S(t)$ utilizando el método FFT descrito en *Klugman, Panjer y Willmot (1998)* o *Wang (1998)*.

3.3. Distribución de la severidad

Tal y como se pretende construir la cartera es necesario incorporar algún tipo de hipótesis respecto a la distribución de $B_i = E_i LGD_i = E_i(1 - \delta_i)$. Aunque la imprecisión de la misma definición de insolvencia y la existencia de criterios legales y jerárquicos relacionados con la recuperación dificultan la estimación de los cash-flows esperados, algunas de las posibilidades son las siguientes:

- $\delta_i = k$, $k \in [0, 1]$. Porcentaje fijo, *Credit Suisse First Boston, CreditRisk+* (1997). Aplicación de una media histórica, práctica habitual en el sector.
- $\delta_i \sim B(\alpha, \beta)$. Distribución beta, *J.P. Morgan, Creditmetrics (1997), Moody's (2002)*. Es la hipótesis más aceptada en los modelos de nueva generación, tanto por la idoneidad de su recorrido natural $[0, 1]$ para expresar un porcentaje, como por la flexibilidad de su función de distribución.

La elección debe tener en cuenta además otros factores como el tipo de exposición, el horizonte temporal de la operación, la sensibilidad de cada riesgo a las condiciones económicas o la evolución del ciclo crediticio. El acierto en el criterio afectará significativamente la capacidad predictiva del modelo.

3.4. Esperanza matemática y Varianza

La esperanza matemática no está afectada por la introducción de dependencia,

$$E[S] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \quad (54)$$

La varianza en cambio, si resulta afectada por el efecto de la dependencia, representado en el segundo término de la expresión:

$$Var [S] = Var \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n Var [X_i] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Cov (X_i, X_j) \quad (55)$$

La covarianza entre las variables X_i y X_j , viene definida $\forall i \neq j$ por la respectiva de las variables I_i y I_j ,

$$Cov (I_i, I_j) = E [I_i, I_j] - E [I_i] E [I_j] = f_{I_i, I_j} (1, 1) - p_i p_j \quad (56)$$

La relación entre ambas covarianzas es la siguiente:

$$\begin{aligned} Cov (X_i, X_j) &= E [X_i, X_j] - E [X_i] E [X_j] = \\ &= E [B_i] E [B_j] E [I_i, I_j] - E [B_i] E [B_j] E [I_i] E [I_j] = \\ &= E [B_i] E [B_j] Cov (I_i, I_j) \end{aligned} \quad (57)$$

Por tanto, la expresión de la varianza de S será:

$$\begin{aligned} Var [S] &= Var \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n Var [X_i] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left(f_{I_i, I_j} (1, 1) - p_i p_j \right) E [B_i] E [B_j] \end{aligned} \quad (58)$$

En el caso particular de variables aleatorias independientes, $f_{I_i, I_j} (1, 1) = p_i p_j$ y por tanto,

$$Var [S] = Var \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] \quad (59)$$

4. Resultados

Todos los riesgos que componen la siguiente subcartera, cumplen la doble condición de ser exposiciones (cúmulos) de la compañía española de seguro de crédito mencionada anteriormente, a 31/12/03 y al mismo tiempo emisores de deuda clasificados por *Standard & Poor's*. En este supuesto es posible establecer una correspondencia entre el riesgo asociado a cada activo y el riesgo asociado a los grados definidos por *Standard & Poor's* (tal como se plantea en el primer punto del apartado 2.4.3).

A cada cúmulo se le ha asignado la tasa media anual de insolvencia (tabla 1) que le corresponde según su *rating*. Las tasas anteriores actúan como estimadores de la probabilidad de insolvencia considerando el criterio *through the cycle*. La cartera resultante, expresada en miles de euros, es:

i	Cúmulo	Rating S&P	p_i S&P
1	39.267	A	0,0007
2	38.095	A	0,0007
3	11.717	A-	0,0007
4	21.305	A+	0,0007
5	28.001	A+	0,0007
6	4.531	BB+	0,0117
7	6.769	BBB-	0,0025
8	25.962	BBB+	0,0025
8	15.860	BBB+	0,0025
10	7.297	CCC+	0,1996

(Tabla 4)

El riesgo asociado a esta subcartera se ha valorado calculando la esperanza matemática $E[S]$, equivalente al valor medio a provisionar; la varianza $Var[S]$, indicador de la dispersión global respecto la esperanza y los percentiles de la distribución, obtenidos de $F_S(S)$, permiten determinar un capital de solvencia adicional para la cobertura de pérdidas inesperadas, por ejemplo en el 95 % o 99 % de los casos.

Los cálculos se han repetido asumiendo 2 hipótesis diferentes:

1. Riesgos estadísticamente independientes: No existen factores comunes que afecten al comportamiento conjunto de la cartera (modelo clásico). La cópula aplicada es C^{IND} .
2. Riesgos estadísticamente dependientes: Existen factores macroeconómicos cuya influencia común sobre la cartera puede generar, en caso de escenarios desfavorables, pérdidas extremas. Este tipo de asociación es modelizable mediante una cópula *Gumble* C_α^G . Para este caso se han realizado 3 pruebas aumentando progresivamente el valor del parámetro α , indicador del nivel de dependencia de la cartera.

No se asume una distribución estadística para la severidad. Teniendo en cuenta la inexistencia de colaterales en el caso del seguro de crédito, se considera un porcentaje fijo de recuperación del 25 % (severidad del 75 %).

Los resultados aparecen en la tabla 5 (en miles de euros) y en el gráfico 2 (valores de la función de distribución para los cuatro supuestos calculados en el eje vertical y pérdidas totales de la cartera en millones de euros en el eje horizontal) siguientes:

F(S)	Independencia	Gumble $_{\alpha=1,1}$	Gumble $_{\alpha=1,5}$	Gumble $_{\alpha=2,5}$
F(0)	0,7824	0,7892	0,7933	0,8004
F(2.000)	0,7824	0,7892	0,7933	0,8004
F(4.000)	0,7916	0,7955	0,7976	0,8004
F(6.000)	0,9887	0,9878	0,9874	0,9880
F(8.000)	0,9887	0,9878	0,9874	0,9880
F(10.000)	0,9916	0,9922	0,9928	0,9960
F(12.000)	0,9921	0,9929	0,9935	0,9961
F(14.000)	0,9940	0,9942	0,9944	0,9966
F(16.000)	0,9942	0,9944	0,9946	0,9966
F(18.000)	0,9952	0,9954	0,9955	0,9967
F(20.000)	0,9972	0,9965	0,9962	0,9967
F(30.000)	0,9997	0,9989	0,9985	0,9979
F(40.000)	1,0000	0,9995	0,9992	0,9984
F(50.000)	1,0000	0,9997	0,9994	0,9989
F(60.000)	1,0000	0,9997	0,9995	0,9990
F(70.000)	1,0000	0,9998	0,9997	0,9991
F(80.000)	1,0000	0,9998	0,9997	0,9993
F(90.000)	1,0000	0,9999	0,9998	0,9994
F(100.000)	1,0000	0,9999	0,9998	0,9994
F(148.000)	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
E[S]	1.195,90	1.195,90	1.195,90	1.195,90
V[S]	7,14E+06	1,01E+07	1,22E+07	1,99E+07
DESV[S]	2.672,18	3.179,49	3.497,70	4.456,90

(Tabla 5)

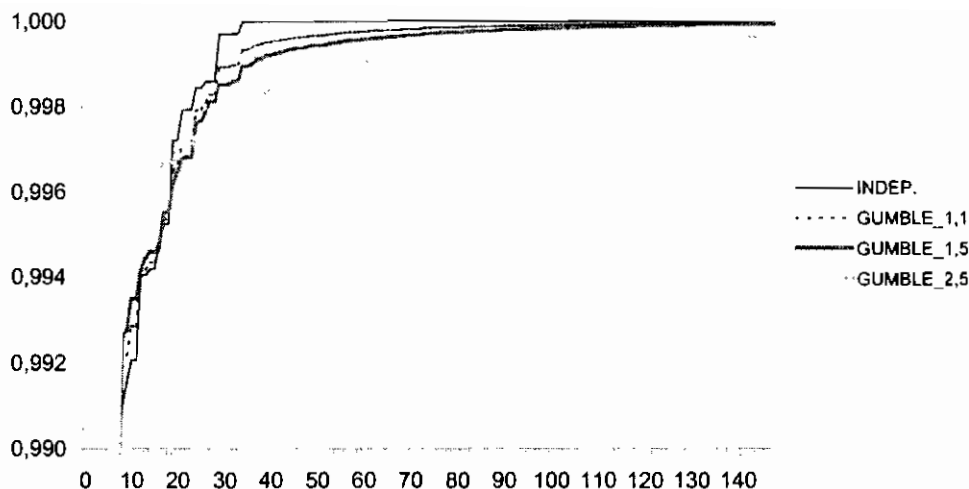


Gráfico 2

5. Discusión

La modelización basada en teoría del riesgo responde al mix de negocio de una compañía de seguros de crédito, principalmente por que permite combinar en una misma cartera exposiciones asociadas a firmas de diversa naturaleza ¹². Por otra parte es el tratamiento estándar en el sector asegurador para los ramos no vida.

Algunos de los puntos importantes a destacar sobre los resultados obtenidos son los siguientes:

- La compañía debería cobrar una prima de 1,19 millones de euros para cubrir las pérdidas anuales esperadas de esta cartera, más un capital de solvencia adicional en función del grado de cobertura deseado (un total de 10 millones de euros aproximadamente si la opción elegida es asegurar la cobertura de las pérdidas en el 99 % de los casos).
- Combinar probabilidades de tipo *through the cycle* y dependencia extrema es una hipótesis claramente conservadora. El 83 % del valor a provisionar es generado por el décimo riesgo, clasificado en el grado CCC+.
- Debido a la simplicidad de la cartera de ejemplo (10 exposiciones), a primera vista los resultados no son espectaculares, los percentiles 95 % y 99 % coin-

¹² Al tratarse de un modelo de agregación estadístico permite flexibilidad en el sistema de obtención de probabilidades de insolvencia individuales, sin excluir aquellas empresas que no cotizan en mercados de capitales ni son emisoras de deuda clasificada.

ciden para las cuatro distribuciones calculadas. No obstante, la progresiva inflación de la varianza y el desplazamiento de las pérdidas inesperadas hacia valores extremos respecto la hipótesis de independencia son evidentes, tal como se aprecia en el gráfico 2. Esto significa que el modelo cumple los requisitos básicos para estimar correctamente el riesgo de crédito, el aumento del tamaño de la cartera sin duda acentuaría los efectos observados.

- Respecto la calidad de los cálculos, la solución de la ecuación (42) mediante el algoritmo *fast Fourier transform* (FFT) permite evitar la aproximación *Poisson* compuesta, responsable de los problemas del modelo *CreditRisk+* descritos en *Gordy (2000)*. El resto de errores asumidos son los derivados de la utilización de las variables de doble precisión, del orden 10E-16 y los derivados de discretización de la severidad, paso ineludible tanto en el algoritmo de *Panjer* como en el FFT.
- La introducción generalizada de cópulas en el modelo individual, permite transparencia y flexibilidad. La principal ventaja respecto los modelos estructurales es la posibilidad de modelizar el comportamiento de la cartera mediante múltiples distribuciones, sin restringir a la normal multivariante. En el ejemplo se utiliza la cópula de *Gumble* puesto que a priori sus características parecen encajar con la estructura del riesgo de crédito, es capaz de modelizar correctamente un fenómeno asimétrico y el aumento gradual de la dependencia estadística provoca la aparición de una mayor cantidad de sucesos extremos. Sin embargo, es necesario profundizar en la investigación de los siguientes aspectos:
 1. Capacidad de las diferentes familias para explicar la variación conjunta de series históricas de insolvencia, por ejemplo sectoriales.
 2. La estimación del parámetro α reclama especial atención, en el caso de las *archimedean copulas* determina completamente los coeficientes *Kendall's tau* y *Spearman's rho*. Indicadores de la cantidad de asociación y signo de la misma. Su interpretación es idéntica a la del coeficiente de correlación lineal.
- La implantación de sistemas de rating interno, capaces de generar eficientemente probabilidades de insolvencia individuales (input básico y previo en un modelo de cartera), debería ser un objetivo prioritario.

Por último y desde nuestro punto de vista, algunas de las líneas de investigación a plantear en futuros trabajos, son las siguientes:

1. Recopilación de información histórica de calidad sobre ratios de recuperación y especialmente sobre insolvencias.
2. Estudiar el desarrollo de la hipótesis de un porcentaje fijo de recuperación utilizando la distribución Beta $\delta_i \sim B(\alpha, \beta)$. Tal como sugieren algunos estudios previos.

6. Bibliografía

Altman, E. (1968) "Financial Ratios, Discriminant Analysis and the prediction of Corporate Bankruptcy". *The Journal of Finance*, vol. XXIII, número 4, 589-609.

Altman, E. (1981) "Financial Handbook". New York, John Wiley & Sons, Inc

Arvanitis, A, J. Gregory (2001) "The complete guide to pricing, hedging and risk management". London, Risk Books.

Basel Committee on Banking Supervisión (2001c). Overview of the New Basel Capital Accord: Consultative Document. Bank for International Settlements. <http://www.bis.org/bcbs/index.htm>

Basel Committee on Banking Supervisión (2001d). The standardized Approach to Credit Risk: Consultative Document. Bank for International Settlements. <http://www.bis.org/bcbs/index.htm>

Black, F., M. Scholes (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of political economy* , número 81, (pp.637-654).

Blume, M.E., F.Lim, A.C. MacKinlay (1998) "The declining credit quality of U.S. corporate debt: Myth or reality". *Journal of finance*, número 53, 1389-1413.

Bowers, N.L, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbitt (1997) "Actuarial Mathematics". Istaca, The Society of Actuaries.

Brunner, A., J. P.Krahn, M. Weber (2000) "Information Production in Credit Relationships: On the Role of Internal Ratings in Commercial Banking"(Documento de trabajo). Center for Financial Studies.

Bülmann, H. (1970) "Mathematical methods in risk theory". New York, Springer Verlag.

Caouette, J., E. Altman, P. Narayanan (1998) "Managing credit risk: the next great financial challenge". New York, John Wiley & Sons, Inc

Chen, L.H.Y. (1975) "Poisson approximation for dependent trials". *Ann. Probab.*, número 3, 534 - 545.

Cossette, H., P. Gaillardetz, E. Marceau, J. Rioux (2002) "On two dependent individual models". *Insurance: Mathematics and Economics*, número 30, 153-166.

Credit Suisse First Boston, "CreditRisk+" (1997). Technical document, London / New York, <http://www.csfb.com>.

Daykin, C.D., T. Pentikäinen, M. Pesonen (1994) "Practical risk theory for Actuaries". Chapman & Hall.

Dhaene, J., M. Denuit, M. J. Goovaerts, R. Kaas, D. Vyncke (2002) "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory". Insurance: Mathematics and Economics, número 31, 3-33.

Frees, E.W., E.A. Valdez (1998) "Understanding relationships using copulas". North American Actuarial Journal, número 2, 1-25.

Genest, C., E. Marceau, M. Mesfioui (2003) "Compound Poisson approximations for individual models with dependent risks". Insurance: Mathematics and Economics, número 32, 73-91.

Gerber H. U. (1984) "Error bounds for the compound Poisson approximation". Insurance: Mathematics and Economics, número 3, 191-194.

Goovaerts, M.J., J. Dhaene (1996) "The compound Poisson approximation for a portfolio of dependent risks". Insurance: Mathematics and Economics, número 18, 81-85.

Gordy, M. (2000) "From CreditMetrics to CreditRisk+ and Back Again". Technical document, disponible en <http://www.defaultrisk.com>.

Jarrow, R., D.Lando, S.Turnbull (1997) "A Markov Model for the Term Structure of Credit Spreads". Review of financial studies, 481-523.

Joe, H. (1997) "Multivariate Models and Dependence Concepts". New York, Chapman and Hall.

Klugman, S.A., H.H. Panjer, G.H. Willmot (1998) "Loss Models: Form Data to Decisions". New York, John Wiley & Sons, Inc.

KMV Corporation (1997) "Modeling Default Risk". Technical document, San Francisco, <http://www.kmv.com>.

Le Cam, L. (1960) "An approximation theorem for the Poisson binomial distribution". Pacific J. Math, número 10, 1181-1197.

Krahnén, J.P., M. Weber (2001) "Generally accepted rating principles: A primer". Journal of Banking and Finance, número 25, 3-23.

Laffarga, J. A. Mora (1998) "Los modelos de predicción de la insolvencia empresarial: un análisis crítico". Incluido en la monografía: "El Riesgo Financiero

de la Empresa". Madrid, AECA.

Lindskog, F. (2000) "Modelling dependent Credit Risks". RiskLab, ETH Zürich, <http://www.risklab.com>

Merton, R.C. (1974) "On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates". The Journal of Finance, número 29, 449-470.

Moody's Investors Services (2002) "LossCalc: Moody's Model for Predicting Loss Given Default (LGD)". Technical document, New York.

Morgan, J.P. & Co. "Creditmetrics" (1997). Technical document, New York, <http://www.riskmetrics.com>.

Michel, R. (1987) "An improved error bound for the compound Poisson approximation of a nearly homogeneous portfolio". Astin bulletin, número 17, 165-169.

Nelsen, R.B. (1999) "An introduction to copulas". Lecture Notes in Statistics, vol.139. New York, Springer-Verlag.

Nyfelner, M. (octubre 2000) "Modelling Dependencies in Credit Risk Management". Swiss Federal Institute of Tecnology. Zurich, <http://www.risklab.com>.

Ong, M. K. (1999) "Internal credit risk models. Capital allocation and performance measurement". London, Risk Books.

Panjer, H., G. Willmot (1992) "Insurance Risk Models". Istaca, Society of Actuaries.

Treacy, W. F., Carey, M. S. (1998) "Credit risk ratings at large US banks". Board of governors of the Federal Reserve System. Federal Reserve Bulletin, noviembre, 897-921.

Wang, S. (1998) "Aggregation of correlated risk portfolios: models and algorithms". Proceedings of the Casualty Actuarial Society, número 85, 848-939.