CUADERNOS DE LA FUNDACION

Nº 32

* * * * * * *

DECISIONES RACIONALES EN REASEGURO

Autores: José Antonio Gil Fana
Antonio Heras Martínez
José Luis Vilar Zanón

diciembre, 1996

LISTA DE CUADERNOS DE LA FUNDACION MAPFRE ESTUDIOS EDITADOS:

1. Filosofía Empresarial

2. Resultados de la Encuesta sobre "Altos Profesionales de Seguros" (A.P.S.)

3. Dirección y Gestión de la Seguridad

4. Los Seguros en una Europa cambiante: 1990-1995 (No disponible)

5. La Distribución Comercial del Seguro: Sus Estrategias y Riesgos

6. Elementos de Dirección Estratégica de la Empresa

7. Los Seguros de Responsabilidad Civil y su Obligatoriedad de Aseguramiento

8. La Implantación de un Sistema de Controlling Estratégico en la Empresa

9. Técnicas de Trabajo Intelectual

10. Desarrollo Directivo: Una Inversión Estratégica

11. El Concepto de Seguridad en la Ciencia y la Ciencia de la Seguridad

12. Los Seguros de Salud y la Sanidad Privada

13. Calidad Total y Seguridad

14. El Reaseguro de Exceso de Pérdidas

15. El Coste de los Riesgos en la Empresa Española 1991

16. La Legislación Española de Seguros y su Adaptación a la Normativa Comunitaria

Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1993

17. Medio Ambiente Seguro: Desarrollo Futuro

18. El Seguro de Crédito a la Exportación en los países de la OCDE (Evaluación de los resultados de los aseguradores públicos)

19. Una Teoría de la Educación

20. El Reaseguro en los Procesos de Integración Económica

Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1994

21. La Nueva Regulación de las Provisiones Técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E.
    Provisiones Técnicas de Seguros de Vida en las Directivas Comunitarias

22. Rentabilidad y Productividad de Entidades Aseguradoras

23. Análisis de la Demanda de Seguro Sanitario Privado

24. El Seguro: Expresión de Solidaridad desde la Perspectiva del Derecho

25. El Reaseguro Financiero

26. El Coste de los Riesgos en la Empresa Española 1993

27. La Calidad Total como Factor para elevar la Cuota de Mercado en Empresas de Seguros

28. La Naturaleza Jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil

29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal

Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1995

30. El Tiempo del Directivo

31. Tipos Estratégicos, Orientación al Mercado y Resultados Económicos: Análisis Empírico del Sector Asegurador Español

32. Decisiones Racionales en Reaseguro

PRESENTACIÓN

El trabajo que presentamos supone una importante aportación a la formulación de modelos actuariales que sirvan de guía en la toma de decisiones del asegurador, tratando los problemas del reaseguro desde el lado de la entidad cedente.

Este riguroso análisis ha sido llevado a cabo por tres profesores universitarios de reconocida valía investigadora; habiendo sido su trabajo objeto de una beca "Riesgo y Seguro" de la Fundación MAPFRE Estudios.

DECISIONES RACIONALES EN REASEGURO

Autores: José Antonio Gil Fana

Prof. Titular de Economía Financiera

Antonio Heras Martínez

Prof. Titular de Economía Financiera

José Luis Vilar Zanón

Prof. Titular de Economía Financiera

Trabajo resultante de una Beca Riesgo y Seguro 1994-95, concedida a los autores por la Fundación MAPFRE Estudios.

INDICE

INTRODUCCION:

El reaseguro puede ser estudiado desde dos puntos de vista complementarios entre sí.

En primer lugar, y desde una perspectiva actuarial, el reaseguro puede considerarse como un instrumento técnico que permite transferir aquella parte de los riesgos asumidos por una empresa aseguradora que pueden comprometer su supervivencia, debido a que su capacidad financiera es insuficiente para hacer frente a las posibles fluctuaciones desfavorables de la siniestralidad que comportan.

Asimismo, desde una perspectiva muy distinta, el reaseguro puede considerarse como un acuerdo entre dos empresas de seguros cuyas claúsulas tienen el alcance que, dentro de las normas vigentes, estas consideren oportunas.

Esta distinción nos puede servir para situar inicialmententе nuestro trabajo de investigación dentro de la primera de las definiciones; más aún, deseamos situarlo en el marco de la Matemática Actuarial, entendida esta de una forma amplia como el conjunto de disciplinas de carácter fundamentalmente matemático empleadas para la formulación de aquellos modelos que permitan a la vez un mejor conocimiento de los fenómemos actuariales y servir de guía para la toma de decisiones en el seno del ente asegurador.

La permanente evolución de la actividad aseguradora, consecuencia de la aparición de nuevos riesgos de diversa naturaleza, de modificaciones en la estructura de los mercados tradicionales de seguros, etc, tiene como consecuencia la necesidad de una continua adaptación del reaseguro a estas circunstancias, lo que trae consigo el desarrollo de nuevas formas de reaseguro así como la formulación de las correspondientes variantes en las claúsulas tradicionales de los tratados.

Somos conscientes de la dificultad de que el proceso de modelización matemático tenga presente este hecho, así como la gran variedad de facetas que posee el proceso de toma de decisiones en reaseguro, y que esto puede suscitar algunas críticas de aquellos profesionales del reaseguro situados en el "mundo real".

En este sentido queremos indicar que la finalidad de nuestro estudio es que el lector adquiera una comprensión global del citado proceso de decisión desde una perspectiva de rigor científico.

Así, nuestro trabajo se situará fundamentalmente dentro de la Teoría del Riesgo Colectivo, cuyo desarrollo a lo largo del presente siglo ha proporcionado importantes resultados analíticos que han conducido a un profundo conocimiento del riesgo de fluctuación aleatoria de la siniestralidad y han constituído el marco teórico de referencia, de amplia aceptación por la comunidad científica, para la toma de decisiones en el seno de la empresa aseguradora relativas a aspectos tales como tarificación, reaseguro y solvencia.

En el ámbito de la toma de decisiones en seguros el objetivo de la Teoría del Riesgo es la formulación de un modelo matemático en el que se relacionen los elementos de estabilidad del negocio de seguros: reservas de solvencia S, recargo de seguridad θ, y reaseguro M, junto a la siniestralidad, su función de distribución F, y la probabilidad de ruina ε como medida de solvencia,

$$H(F,P,\theta,M,S,\varepsilon) = 0$$

de tal forma que puedan ser investigadas las relaciones que los ligan así como la influencia que las decisiones sobre alguno o algunos de ellos, en nuestro caso fundamentalmente el reaseguro, tienen sobre el resto y en especial sobre la probabilidad de ruina.

Ahora bien, fijado un valor de la probabilidad de ruina, existirán diversas combinaciones de valores del resto de las variables del modelo compatibles con el mismo. Por otra parte, mantenerse por debajo de una determinada probabilidad de ruina no es, ni debe ser, el único objetivo en la gestión del ente asegurador, que habitualmente persigue varios cuya jerarquía depende de las preferencias del empresario y de las limitaciones de su entorno.

Por tanto, es indispensable dar entrada a diversas teorías científicas e instrumentos analíticos relativos a la toma de decisiones racionales, de forma que pueda completarse el modelo que únicamente nos proporciona las relaciones "técnicas" entre los elementos del solvencia de la empresa aseguradora. En este sentido utilizaremos resultados de la Teoria de la Utilidad, la Ordenación de Riesgos y los métodos de Optimización Matemática.

Como requisitos previos para poder seguir el trabajo realizado destacamos los conceptos básicos en relación con el seguro y sus técnicas, así como conocimientos elementales de Análisis Matemático y Cálculo de Probabilidades.

Con la intención de que el estudio sea autocontenido, en la primera parte del mismo (capítulos 1 y 2) se realiza un resumen de los conceptos básicos y principales resultados, tal y como se emplearán mas adelante, en relación con:

** Las Teorías del Riesgo y de la Ruina, refiriéndonos principalmente a las distribuciones del número de siniestros y de la cuantía de un siniestro, la distribución de la siniestralidad total y sus aproximaciones, especialmente por la normal, y a las principales expresiones de la probabilidad de ruina.

** Teorías de la Utilidad y Ordenación de Riesgos, que nos permitirán dar entrada en nuestro trabajo a la racionalidad en la toma de decisiones.

** Métodos de Optimización Matemática, para los que haremos un repaso de la conceptualización de los óptimos para programas matemáticos de uno y varios objetivos, de las condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker y de las técnicas de obtención de los Optimos de Pareto de programas multiobjetivo.

En la segunda parte (capítulos 3,4 y 5) se desarrollan los resultados del proyecto de investigación.

El tratamiento de los problemas de reaseguro se realiza siempre desde el lado de la cedente, considerando varias subcarteras y tomando como modalidades básicas de estudio las de cuota-parte, excess-loss y stop-loss.

En primer lugar se aborda el estudio del reaseguro proporcional en la modalidad cuota-parte, en el que se continúan los trabajos clásicos de De Finetti (1940) y Buhlmann (1970) consiguiendo delimitar el planteamiento del problema en el marco de la Teoría de la Utilidad, así como una resolución más elegante del mismo empleando las técnicas de la programación multiobjetivo; asimismo encontramos la solución general del problema, sin suponer la independencia de las siniestralidades de las subcarteras.

Ya que el problema básico se plantea matemáticamente como un programa multiobjetivo (determinar la cuota de reaseguro de cada subcartera de forma que se maximiza el beneficio y se minimiza el riesgo), la solución del mismo es el conjunto de óptimos de Pareto (aquellos puntos factibles para los que no existe otro que mejora simultaneamente todos los objetivos), y el paso siguiente es el de escoger uno de entre todos ellos. Determinando el valor de la probabilidad de ruina que el empresario está dispuesto a aceptar para su negocio será posible realizar la elección definitiva.

Continuamos después, en la misma línea, con los reaseguros no proporcionales en las modalidades excess-loss y stop-loss. Su tratamiento es similar al indicado para el caso proporcional, destacando que para el stop-loss la elección entre los óptimos de Pareto se realiza recurriendo simultáneamente a la probabilidad de ruina y a los órdenes de distribuciones de probabilidad.

Esperamos que este trabajo resulte de utilidad a los investigadores de temas actuariales y profesionales del seguro en general.

Quisieramos finalizar agradeciendo a la Fundación Mapfre Estudios el haber hecho posible la realización de este estudio, y en especial a José Antonio Aventín por el estímulo que nos ha prestado en todo momento.

Somosaguas, 7 de Enero de 1996.

CAPITULO 1: PRELIMINARES.

1.1-DISTRIBUCIONES BASICAS Y PROBABILIDADES DE RUINA.

1.1.1-DISTRIBUCIONES COMPUESTAS.

Desde el punto de vista actuarial, un riesgo es una suma de indemnizaciones futuras de cuantías y localizaciones en el tiempo impredecibles, a las que se debe hacer frente por medio de unas reservas presentes, y de unos ingresos fijados previamente al conocimiento de las citadas cuantías.

Cada una de las indemnizaciones corresponde a un siniestro y en principio la consideraremos igual a la cuantía de este. De esta forma podemos pensar en un riesgo como una suma de variables aleatorias positivas cada una de las cuales da cuenta de los sucesivos siniestros que acontecen a lo largo del tiempo.

En el caso en que conozcamos el número total n de pólizas que conforman el riesgo, y cada una de estas sólo tenga la posibilidad de sufrir un único siniestro a lo largo de la duración del contrato, podemos expresar la indemnización total (daño total) S como:

$$S = X_1 + \ldots + X_n,$$

en donde X_i es la cuantía del siniestro correspondiente a la póliza $i=1,\ldots,n$. La hipótesis de un único siniestro por póliza puede ser generalizada sumando todos los siniestros correspondientes a una única póliza en una única cuantía X_i.

Así, conocidas las distribuciones $V_i(x)$ $(i=1,\ldots n)$ de la cuantía individual del siniestro asociado a cada póliza, y suponiendo que las X_i son variables aleatorias independientes (v.a.i.), la distribución F del daño total se obtiene como el producto de convolución de las V_i:

$$F = \mathop{*}_{i=1}^{n} V_i,$$

lo cual constituye una primera vía de aproximación al problema de la modelización del riesgo de siniestralidad que, llevada hasta sus últimas consecuencias, da lugar a la Teoría del Riesgo Individual.

La otra vía posible consiste en considerar el riesgo como un fenómeno dinámico, que se manifiesta a lo largo del tiempo mediante la ocurrencia de siniestros que dan lugar a las indemnizaciones futuras. Bajo esta perspectiva no es necesario asociar cada siniestro a la póliza de la que proviene. Dentro de la así llamada Teoría del Riesgo Colectivo, el daño total S(t) producido a lo largo de un intervalo de tiempo (0,t] puede ser expresado como:

$$S(t) = X_1 + \ldots + X_{N(t)} \quad , \text{ (0 si es } N(t)=0),$$

siendo:

$N(t)$ = Número total de siniestros en (0,t].

X_i = Cuantía del i-ésimo siniestro.

La diferencia respecto del caso anterior es que si en aquél el número de v.a. a sumar estaba determinado previamente, en éste ha pasado a ser un número aleatorio, pues el número de siniestros a lo largo del periodo es desconocido a priori.

Adoptando las hipótesis de independencia entre las v.a. X_i $(i=1,2,\ldots)$, $N(t)$ $(\forall\ t>0)$, y de igual distribución $V(x)$ (con soporte en $(0,+\infty)$) para todas las X_i, la distribución F del daño total durante el tiempo $(0,t]$ será entonces de tipo compuesto:

$$F(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t)\ V_i^{*i}(x), \quad \forall t>0,\ \forall x\geq 0,$$

siendo:

$P_i(t) = P\{N(t)=i\}$, la distribución contadora del número de siniestros en $(0,t]$.

$V^{*i}(x) = P\left\{X_1+\ldots+X_i \leq x\right\}$ la convolución i-ésima de la distribución $V(x)$.

Las caraterísticas de las distribuciones compuestas son las siguientes:

-Función generadora de momentos (f.g.m.) M_S, y transformada de Laplace (T.L.) L_S, de la v.a. $S(t)$ $(\forall t\geq 0)$:

$$M_S(z) = P_N\left[M_X(z)\right] \quad , \quad L_S(z) = P_N\left[L_X(z)\right]$$

siendo: P_N la función generadora de probabilidad de $N(t)$.

M_X, L_X, la f.g.m. y la T.L., respectivamente, de las X_i $(i\in\mathbb{N})$.

-Momentos de orden $k=1,2,3$:

$$E\{S\} = E\{N\}\ E\{X\}.$$

$$E\{S^2\} = E\{N(N-1)\}\ E^2\{X\} + E\{N\}\ E\{X\}$$

$$E\{S^3\} = E\{N(N-1)(N-2)\}\ E^3\{X\} + 3\ E\{N(N-1)\}\ E\{X\}\ E\{X^3\}$$

-Varianza: $Var\{S\} = Var\{N\}\ E^2\{X\} + E\{N\}\ Var\{X\}$.

La resolución del problema de la elección de una distribución compuesta apropiada para un riesgo dado, consiste en escoger las distribuciones V y del número de siniestros que proporcionen un mejor ajuste. Ambos procesos de ajuste se encuentran ampliamente tratados en [Hogg,R., Klugman,S. 1984], [Panjer,H., Willmot,G. 1992], y [Beard,R., Pentikainen,T., Pesonen, E. 1984].

De singular importancia es el ajuste de la distribución del número de siniestros, ya que por ser la única variable que depende del tiempo (según las hipótesis habituales de la Teoría del Riesgo Colectivo), su distribución incorpora la dinámica de las v.a. $\{S(t): t\geq 0\}$, esto es, las hipótesis que serán asumidas acerca de su independencia, condicionamiento y estacionariedad. En este sentido, son clásicas las distribuciones de Poisson y de Poisson ponderadas como materialización del carácter markoviano del proceso $\{N(t): t\geq 0\}$.

Una distribución de Poisson ponderada surge al considerar el parámetro de la distribución de Poisson como una v.a. cuya distribución asociada es

$$U(\lambda_0) = P\left\{\lambda\leq\lambda_0\right\} \quad ; \quad U(0) = 0.$$

y se denomina *función de estructura*. Entonces se tiene

$$P\left\{N=n \mid \lambda\right\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

y la distribución de Poisson ponderada por U es

$$P\left\{N=n\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \, dU(\lambda).$$

Distribuciones de Poisson ponderadas bien conocidas dentro de la práctica actuarial son, por ejemplo, la binomial negativa extendida (ponderación por una gamma), la distribución de Sichel (ponderación por una Gauss inversa generalizada), o la Poisson-Pascal generalizada (véase [Hogg,R., Klugman,S. 1984], cap8). Nosotros tomaremos como representante de esta familia a la binomial negativa extendida debido a su uso frecuente para la modelización de las fluctuaciones de las probabilidades básicas a lo largo del tiempo, ejemplo del cual son los trabajos [Beard,R., Pentikainen,T., y Pesonen, E. 1984], y [Ammeter,M. 1948].

Recordemos las principales características de la distribución de Poisson y sus consecuencias sobre los momentos de la v.a. S:

-Función de cuantía:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad (\lambda > 0).$$

-Transformadas:

f.g.m.: $M_N(z) = \exp\{\lambda t(e^z-1)\}$; f.g.p.: $P_N(z) = \exp\{\lambda t(z-1)\}$

siendo λ el parámetro de Poisson.

-Media y varianza en $(0,t]$: λt.

-Características de la Poisson compuesta: llamando $c_k = E\{X^k\}$, y dejando $t=1$:

$$E\{S\} = \lambda\, c_1 \quad ; \quad Var\{S\} = \lambda\, c_2 \quad ; \quad \gamma\{S\} = \lambda\, c_3.$$

Para la binomial negativa extendida se tiene :

-Función de cuantía: (consideramos un intervalo de tiempo unitario)

$$P_n(1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{n} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}\, p^{\alpha}\, q^{n}, \qquad (\alpha,\beta > 0).$$

Esta distribución se obtiene al ponderar una Poisson de parámetro λ (considerando esta vez $\lambda>0$ como una v.a.), por una gamma de dos parámetros $G(\alpha,\beta)$, cuya densidad es:

$$u(\lambda) = \begin{cases} 0 & , \ \lambda \leq 0. \\ \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta\lambda}\, \lambda^{\alpha-1} & , \ \lambda > 0. \end{cases}$$

-Transformadas:

$$M_N(z) = \left(\frac{p}{1-qe^z}\right)^h \quad ; \quad P_N(z) = \left(\frac{p}{1-qz}\right)^h$$

-Media y varianza:

$$E\{N\} = \alpha \frac{q}{p} \quad ; \quad Var\{N\} = \frac{\alpha q}{p^2}.$$

-Características de la binomial negativa compuesta:

$$E\{S\} = \frac{\alpha q}{p} c_1^2 ,$$

$$Var\{S\} = \frac{\alpha q}{p} c_2 + \frac{\alpha q^2}{p^2} c_1^2.$$

$$\gamma\{S\} = \frac{\alpha q}{p} c_3 + \frac{3 \alpha q^2 c_1 c_2}{p^2} + \frac{2 \alpha q^3 c_1^3}{p^3}.$$

Puesto que una distribución compuesta se compone de dos distribuciones, la contadora y la de las cuantías individuales, en la práctica el riesgo considerado deberá ser lo suficientemente homogéneo como para que el ajuste de ambas sea significativo. Es por ello que en primer lugar se intenta el ajuste de las oportunas distribuciones compuestas a las diferentes subcarteras homogéneas de pólizas, y en un segundo paso se agregan dichos modelos, obteniéndose de esta forma la distribución del daño total en la cartera. En este contexto, es muy importante saber si la agregación de dichos modelos da lugar a uno del mismo tipo. Este tema es particularmente importante a la hora de plantear el problema del reaseguro óptimo con varias subcarteras.

Proposición 1.1: Sea $\{S_k(t)\colon t\geq 0\}$ $(k=1,\ldots,n)$ un riesgo tal que $\forall t>0$ su distribución es de Poisson compuesta con parámetro λ_k y distribución de las cuantías individuales V_k. Supongamos que las v.a. S_k son independientes. Entonces el riesgo

$$S(t) = S_1(t) + \ldots + S_n(t)$$

tendrá una distribución del mismo tipo, con parámetro $\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, y distribución de las cuantías individuales $V(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda} V_k(x)$.

En el caso en que la cartera total esté formada por un número suficientemente grande de pólizas, se puede pensar que la media del número de siniestros será a su vez grande. En estas condiciones, el Teorema Central del Límite nos proporciona una aproximación para la distribución compuesta, tanto en el caso de la Poisson compuesta como en el de la binomial negativa compuesta. Puede encontrarse una exposición más detallada del problema de las aproximaciones en [Beard,R., Pentikainen,T., y Pesonen, E. 1984] y [Bowers,N., Gerber,H.,y otros. 1986].

Proposición 1.2: 1- Si S tiene una distribución de Poisson compuesta con parámetro λ, entonces la distribución de la v.a.:

$$Z = \frac{S - \lambda c_1}{\sqrt{\lambda c_2}}$$

converge hacia una normal tipificada cuando $\lambda \to +\infty$.

2- Si S tiene una distribución binomial negativa compuesta de parámetros α, p, entonces la distribución de la v.a.:

$$Z = \frac{S - \alpha(q/p)c_1}{\sqrt{\alpha(q/p)c_2 + \alpha(q^2/p^2)c_1^2}}$$

converge hacia una normal tipificada cuando $\alpha \to +\infty$.

Según veremos posteriormente, el empleo de la aproximación normal permite traducir los análisis basados en funciones de utilidad, en análisis basados en el más sencillo criterio de la media-varianza, pudiéndose hacer uso entonces de la programación multiobjetivo para determinar las decisiones racionales óptimas en reaseguro.

1.1.2-PROBABILIDADES DE RUINA.

Los modelos probabilísticos para el daño total abren el camino para el estudio del nivel futuro de las reservas y para la introducción de una medida del riesgo basada en la solvencia futura del negocio.

El Proceso de la Ruina $\{R(t):\ t\geq 0\}$ es el que modeliza la evolución de las reservas a través del tiempo:

$$\forall t\geq 0:\ R(t) = S_0 + P(t) - S(t),$$

siendo: $S_0 = R(0)$, las reservas iniciales.

$P(t) = (1+\theta)\ E\{S(t)\}$, las primas recargadas siendo el recargo de seguridad $\theta \geq 0$.

Mirando a las expresiones de $E\{S(t)\}$ para los casos de Poisson y binomial negativa compuestos, llegamos a la conclusión de que podemos expresar P(t) como en una función lineal respecto del tiempo, $P(t) = c\ t$. ($c>0$). (véase la figura 1).

Fijado un umbral por debajo del cual el negocio se considera arruinado, $R=0$, es posible definir los diversos sucesos de ruina cuyas probabilidades se denominan *funciones de ruina*. Los distintos sucesos surgen de la consideración del tiempo continuo o discreto, junto con un horizonte finito o infinito.

Para el caso del horizonte infinito, esto es, de que las reservas sean negativas en algún instante futuro, los sucesos correspondientes al tiempo continuo o discreto pueden ser expresados:

-Para el caso continuo, definiendo la v.a. "instante de la ruina" $\mathcal{T} = \text{Inf}\{t>0/\ R(t) < 0\}$:

$$\text{Ruina futura} \equiv \{\mathcal{T} < +\infty\}.$$

$$\text{Supervivencia futura} \equiv \{\mathcal{T} = +\infty\}$$

-Para el caso discreto, la v.a. es $\mathcal{T} = \text{Min}\{n \in \mathbb{N}/\ R_n < 0\}$, y los sucesos se definen de forma idéntica (véase la figura 2).

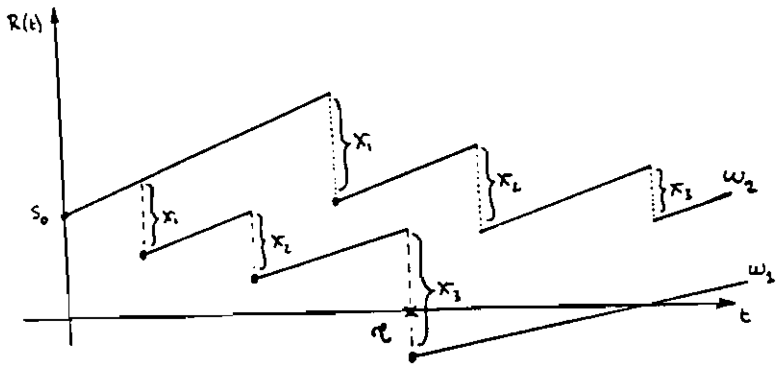


Figura 1: Dos trayectorias del proceso R(t).

ω_1 cae en la ruina en el instante $\mathcal{T}$.

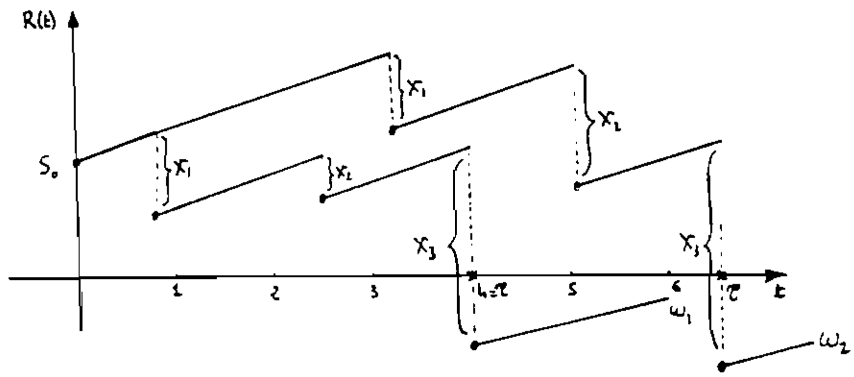


Figura 2: Para ω_2. $\mathcal{T} \notin \mathbb{N}$ y por tanto esta trayectoria no pertenece al suceso de ruina en tiempo discreto.

Llamando a sus respectivas probabilidades $\Psi(S_0)$, $\Phi(S_0)$, y tratándose de sucesos complementarios, tendremos que:

$$\Phi(s_0) = 1 - \Psi(s_0).$$

En el caso de S distribuida por una Poisson compuesta se obtiene la siguiente expresión analítica de la probabilidad de ruina:

Proposición 1.3: Para un proceso de Poisson compuesto con recargo de seguridad $\theta \geq 0$ se tiene que $\Psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$.

Por tanto también será: $\Phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$.

Proposición 1.4: La probabilidad de ruina $\Psi(S_0)$ para un proceso de Poisson compuesto con cuantías individuales X distribuidas según V(x) y recargo de seguridad $\theta \geq 0$ es:

$$\Psi(s_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, H^{*n}(s_0),$$

siendo: $p_n = \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^n$, $n = 0,1,2,3,\ldots$

$$H(s_0) = \frac{1}{c_1} \int_{s_0}^{+\infty} (1 - V(y)) \, dy.$$

Para la probabilidad de supervivencia tendremos:

$$\Phi(s_0) = 1 - \Psi(s_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, H^{*n}(s_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, (1 - H^{*n}(s_0)).$$

Ahora llamando G≡ 1-H, será:

$$G(s_0) = \frac{1}{c_1}\int_0^{s_0} (1-V(x))\, dx,$$

con lo cual si probamos que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}:\ 1-H^{*n} \equiv (1-H)^{*n}\ (\equiv G^{*n}),$$

tendremos en definitiva la siguiente expresión:

$$\Phi(s_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, G^{*n}(s_0).$$

Por inducción se tiene que para el caso n=1 la proposición es cierta puesto que

$$1 - H^{*1} \equiv 1 - H \equiv (1 - H)^{*1} \equiv G.$$

Suponiendo la proposición cierta para n-1, el caso n es:

$$1 - H^{*n}(s_0) = H(0) - \int_0^{+\infty} H^{*n-1}(s_0-x)\, dH(x) =$$

$$= \frac{1}{c_1}\int_0^{+\infty} (1-V(x))\, dx - \frac{1}{c_1}\int_0^{+\infty} H^{*n-1}(s_0-x)\, (V(x)-1)\, dx =$$

$$= \frac{1}{c_1}\int_0^{+\infty} (1-H^{*n-1}(s_0-x))\, (1-V(x))\, dx = \boxed{\text{HIP. DE INDUCCION}}$$

$$= \frac{1}{c_1}\int_0^{+\infty} (1-H)^{*n-1}(s_0-x)\, (1-V(x))\, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} (1-H)^{*n-1}(s_0-x)\, dG(x) = G^{*n}(x).$$

En definitiva, la probabilidad de supervivencia viene dada por una distribución geométrica compuesta.

La expresión anterior solo proporcionará una expresión cerrada de la probabilidad de ruina en algunos casos particulares, tales como aquellos en que V es una distribución exponencial o una mixtura de exponenciales. En todos los demás casos será necesario proceder mediante una aproximación numérica, discretizando la distribución H y aplicando despues un método de cálculo para distribuciones compuestas (por ejemplo, el algoritmo recursivo de Panjer, véase [Panjer,H., y Willmot,G.1992]).

Ejemplo 1.1: Consideremos el caso de las cuantías individuales distribuidas exponencialmente, $V(x) = 1\text{-}e^{-\alpha x}$, $\forall\ x > 0$, $\alpha > 0$.

Entonces será $c_1 = \alpha$, $G(s_0) = 1\text{-}e^{-\alpha s_0}$, $L_G(z) = \dfrac{\alpha}{z+\alpha}$

La transformada de Laplace de la función $\Phi(s_0)$ se obtiene haciendo

$$L_\Phi(z) = P_G(L_G(z)) = \frac{p}{1\text{-}q\ L_G(z)} = p\left[1 - q\,\frac{\alpha}{z+\alpha}\right]^{-1} =$$

$$= p\left[\frac{z+p\alpha}{z+\alpha}\right]^{-1} = p\,\frac{z+\alpha}{z+p\alpha} = p\,\frac{z+\alpha}{z+p\alpha} - q + q =$$

$$= p + q\,\frac{p\alpha}{z+p\alpha} = L_1(z) + L_2(z).$$

Esta última transformada de Laplace corresponde a la distribución

$$\Phi(s_0) = 1 - q\ e^{-p\alpha s_0} = 1 - \frac{1}{1+\theta}\,e^{\frac{-\alpha\theta}{1+\theta}s_0}.$$

Finalmente la función de ruina será

$$\Psi(s_0) = 1 - \Phi(s_0) = \frac{1}{1+\theta}\,e^{\frac{-\alpha\theta}{1+\theta}s_0}$$

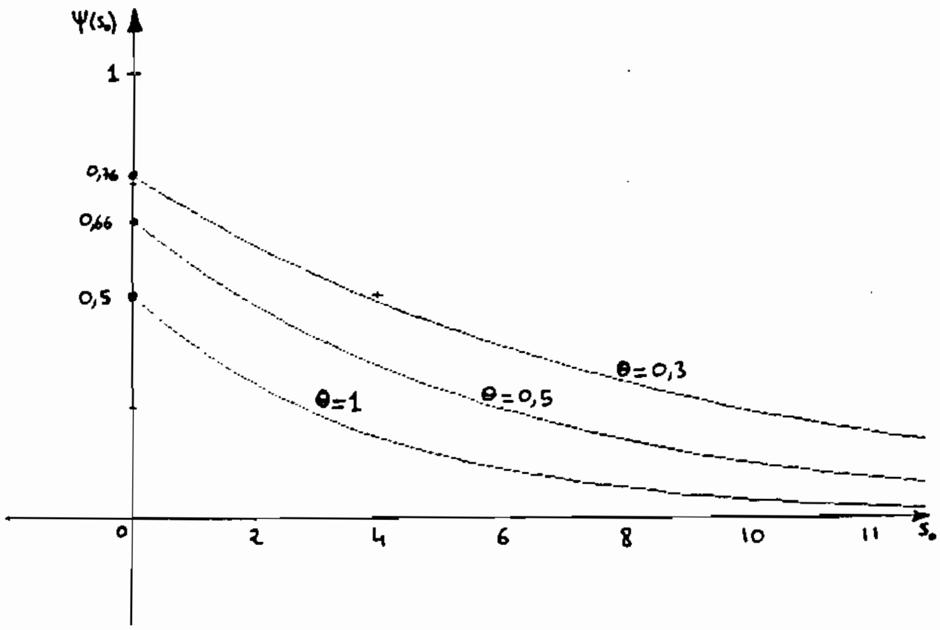


Figura 3: Cuantías individuales Exp(0,5). Funciones de ruina correspondientes a los recargos de seguridad $\theta=0{,}3$; $0{,}5$; 1.

Ejemplo 1.2: Supongamos que las cuantías individuales están distribuidas mediante una mixtura de exponenciales cuya densidad es: $v(x) = q\alpha\, e^{-\alpha x} + (1-q)\beta\, e^{-\beta x}, \quad \forall\; x > 0.$ Entonces se comprueba (véase [Panjer,H., y Willmot,G.1992] pg374) que la probabilidad de ruina es:

$$\Psi(s_0) = \frac{1}{(1+\theta)\ (r_2-r_1)} \left[(a-r_1)\ e^{-r_1 s_0} + (r_2-a)\ e^{-r_2 s_0}\right],$$

siendo

$$a = \alpha(1-p) + \beta p.$$

$$r_1 = \frac{a + \theta(\alpha+\beta) - \sqrt{(a + \theta(\alpha+\beta))^2 - 4\alpha\beta\theta\ (1+\theta)}}{2(1+\theta)}.$$

$$r_2 = \frac{a + \theta(\alpha+\beta) + \sqrt{(a + \theta(\alpha+\beta))^2 - 4\alpha\beta\theta\ (1+\theta)}}{2(1+\theta)}.$$

La función $\Psi(s_0)$ puede ser vista como una medida del riesgo, en la que influyen las decisiones tomadas en las áreas del reaseguro (que modifica la distribución V en base a las cuotas elegidas, tal y como veremos), de la tarificación (en base a la fijación de un valor para el recargo de seguridad θ), o de la solvencia (determinación del valor S_0 de las reservas iniciales). En este sentido, cuanto menor sea el valor de Ψ, mayor será la estabilidad de la cartera.

Un método que evita el tratamiento numérico de la función Ψ es el de utilizar una cota superior que sea a la vez sencilla y lo más ajustada posible a Ψ. Para ello se define el *Coeficiente de Ajustamiento* $\mathcal{R}$ como la solución de:

$$1 + (1 + \theta)\ E\{X\}\ z = M_X(z) \quad , \quad z > 0.$$

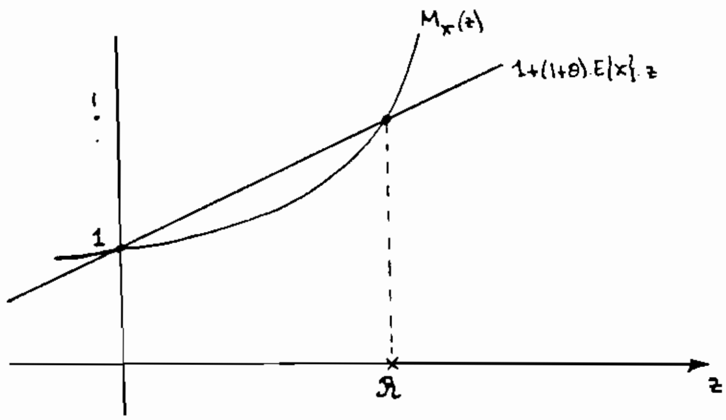


Figura 4: El coeficiente de ajustamiento gráficamente.

El siguiente resultado es conocido bajo el nombre de *Desigualdad o cota de Lundberg:*

Proposición 1.5: Para un proceso de Poisson compuesto con reservas iniciales $s_0 \geq 0$, se tiene que:

$$\Psi(s_0) \leq e^{-\mathcal{R}s_0}.$$

El cálculo del Coeficiente de Ajustamiento solo puede ser llevado a cabo de manera exacta para el caso en que V sea una exponencial. En general se puede desarrollar por Taylor el segundo miembro de la ecuación que define a $\mathcal{R}$, y truncando dicho desarrollo en el término correspondiente a las derivadas de tercer orden, se obtiene la siguiente aproximación de $\mathcal{R}$ que nosotros utilizaremos más adelante:

$$\mathcal{R} < \frac{2\theta c_1}{c_2}.$$

Si lo que se desea es una aproximación con un determinado número de dígitos decimales exactos, el anterior valor puede ser usado como semilla en el método de Newton-Raphson para la aproximación de raíces de una ecuación.

Ejemplo 1.3: Para el caso de las cuantías individuales exponenciales,

$$V(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \ \forall \ x > 0, \ \alpha > 0,$$

la f.g.m. de X es

$$M_X(z) = \frac{\alpha}{z-\alpha}, \ z<\alpha.$$

Siendo en este caso $c_1 = 1/\alpha$, resulta que la ecuación se queda en:

$$1 + (1+\theta)\frac{1}{\alpha} z = \frac{\alpha}{z-\alpha}.$$

La raíz positiva es entonces

$$\mathcal{R} = \frac{\alpha\theta}{1+\theta}.$$

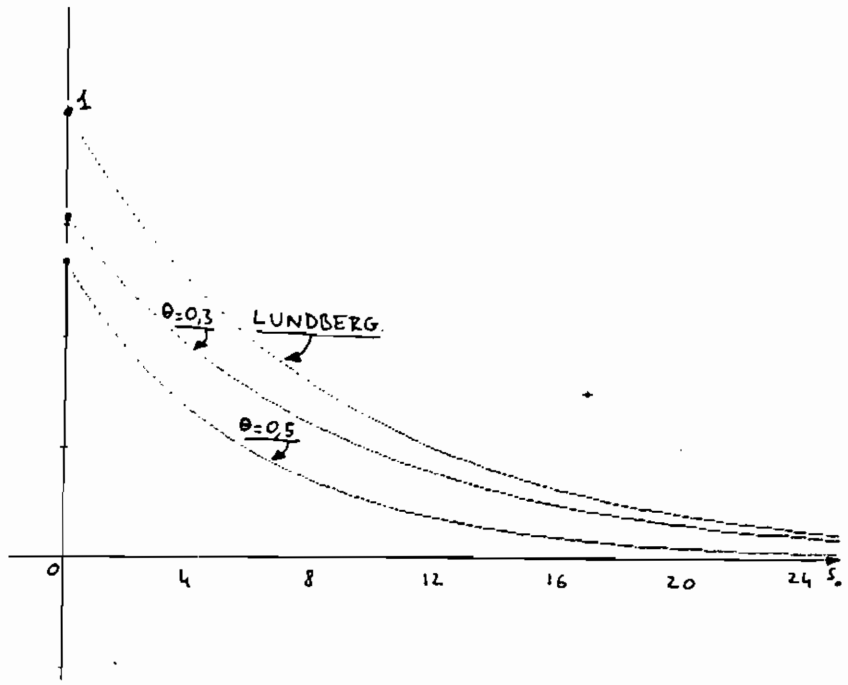


Figura 5: Cuantías individuales Exp(0,5). Cota de Lundberg y funciones de ruina para los recargos θ= 0,3 ; 0,5. La aproximación es más exacta cuanto mayor sea s_0.

Para el caso del proceso binomial negativa compuesto, el cálculo de la función de ruina representa un problema teórico más complicado. Nosotros solo utilizaremos más adelante una cota superior tipo Lundberg (proposición 1.6) de la que se dispone en casos más generales que el de Poisson compuesto, pero que solamente es válida para el tiempo discreto.

Si nos fijamos únicamente en los finales de cada periodo, el nivel de reservas futuras viene dado por

$$R_n = S_0 + nc - S_n,$$

siendo (nc) los ingresos por primas recargadas a lo largo de los n periodos, y

$$S_n = W_1 + \ldots + W_n$$

en donde W_i es la siniestralidad total en cada uno de los periodos. Estas v.a. se consideran independientes e idénticamente distribuidas con media $\mu < c$ y varianza σ^2. En estas condiciones se demuestra (véase [Bowers,N., Gerber,H.,y otros.1986] pg356) que la raíz positiva de la ecuación

$$e^{-c\Re} M_W(\Re) = 1$$

puede ser aproximada por

$$\Re \simeq \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}.$$

Proposición 1.6: En las hipótesis anteriores, $\forall\ S_0 \geq 0$:

$$\Psi(s_0) < e^{-\Re\, s_0}.$$

1.2-TECNICAS DE OPTIMIZACION

1.2.1-INTRODUCCION.

Las técnicas de optimización matemática serán utilizadas para derivar gran parte de los resultados de este proyecto de investigación. Este hecho justifica que dediquemos a éstas parte de los preliminares.

La finalidad de este epígrafe es dar un resumen de los conceptos básicos y condiciones de optimalidad que aplicaremos, de tal forma que puedan seguirse sin excesiva dificultad los desarrollos posteriores.

Para profundizar más en los temas expuestos pueden consultarse por ejemplo Balbás y Gil Fana (1992) y Heras, Gutierrez, Balbás, Gil y Vilar (1990).

1.2.2.-PROGRAMAS MATEMATICOS. FORMULACION. OPTIMOS.

La formulación general de un programa matemático es:

$$\text{Optimizar} \quad f(x)$$
$$\text{sujeto a} \quad x \in F \ (F \subset R^n)$$

F es el denominado *conjunto factible* que representa las posibles alternativas a seguir y f la *función objetivo* (campo escalar o vectorial) que "valora" cada una de las mismas.

En el contexto de nuestro trabajo hemos de realizar una primera clasificación de los programas matemáticos según el número de objetivos del mismo. Así, distinguiremos entre:

a) *PROGRAMAS CON UN UNICO OBJETIVO.*

Representan aquellos problemas reales en los cuales se persigue un único objetivo (maximizar el beneficio o minimizar el coste por ejemplo). En estos la función objetivo f es un campo escalar, esto es, una función definida en un subconjunto de R^n que toma valores en R.

La definición de óptimo en este caso es bastante clara:

Así, si nos referimos a los *óptimos globales* diremos que en un punto $a \in F$ habrá un *mínimo global* cuando

$$f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in F$$

esto es, cuando el valor de f en el punto a es menor o igual que en cualquier otro punto del conjunto factible F.

Asimismo diremos que en el punto $a \in F$ habrá un *máximo global* cuando

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in F$$

Definamos tambien los *óptimos locales*:

Diremos que en el punto $a \in F$ hay un *mínimo local* cuando existe una bola $B(a,\delta)$ tal que

$$f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in B(a,\delta) \cap F$$

Asimismo diremos que en el punto $a \in F$ hay un *máximo local* cuando existe una bola $B(a,\delta)$ tal que

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in B(a,\delta) \cap F$$

b) *PROGRAMAS MULTIOBJETIVO.*

Ciertamente en la resolución de problemas reales se persigue el logro de varios objetivos algunos de los cuales son contradictorios entre sí. Pensemos en los objetivos de rentabilidad y seguridad típicos en las decisiones de inversión.

Los programas multiobjetivo permiten traducir en términos matemáticos tales problemas. En éstos la función objetivo es un campo vectorial

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : F \longrightarrow R^m$$

en el que cada una de sus componentes valora uno de los objetivos.

Ahora la definición de óptimo es algo más compleja ya que es difícil que un punto de F sea óptimo (máximo o mínimo según el caso) de $f_1, f_2, \ldots$ y f_m a la vez.

Hemos de emplear una definición de óptimo más débil que la dada en los programas con un único objetivo. Así nos referiremos a los *óptimos de Pareto*, esto es, aquellos puntos de F para los que no existe otro punto de F que "mejore" todos los objetivos a la vez.

Con mayor rigor: diremos que un punto $a \in F$ es una solución (óptimo de Pareto) del programa:

$$\text{Min } (f_1(x),\ldots,f_m(x))$$
$$\text{sujeto a} \quad x \in F$$

si no existe otro punto $b \in F$ tal que

$$f_i(b) \leq f_i(a), \quad \forall i=1,\ldots m,$$

siendo *estricta* alguna de las desigualdades.

Un elemento de importancia en los programas multiobjetivo es el de *línea eficiente*, que no es más que el conjunto de las imágenes por f de las soluciones del programa, esto es,

$$L=\{f(x)/\ x \text{ es solución del programa}\}$$

1.2.3.-PROGRAMAS CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD. CONDICIONES DE KUHN-TUCKER.

En el marco de los programas con un único objetivo trataremos aquellos cuyo conjunto factible F se encuentra determinado por restricciones de desigualdad. Su expresión general es

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad (*)$$

en el que g es en general un campo vectorial $g=(g_1,\ldots,g_m)$.

Notemos que ahora $F=\left\{x \in R^n / g(x) \leq 0\right\}$.

La resolución de este tipo de programas requiere,en primer lugar, de la aplicación de las condiciones necesarias de optimalidad (conocidas como condiciones de Kuhn-Tucker) que permiten localizar los candidatos a óptimo.

Enunciemos el *Teorema de Kuhn-Tucker*: Si $a \in F$ es un mínimo (máximo) local del programa (*)y es un punto regular[1], entonces existen $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in R$ tales que:

a) $\nabla f(a) + \lambda_1 \nabla g_1(a) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(a) = 0$.

b) $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0$ $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m \leq 0)$.

c) si $g_i(a) < 0$ entonces $\lambda_i = 0$.

A $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ se les denomina *multiplicadores de Kuhn-Tucker* asociados al punto a.

Los puntos $a \in F$ que verifican las condiciones a), b) y c) del teorema anterior son los posibles mínimos (máximos) locales del programa.

Si bien no existen condiciones suficientes de sencilla aplicación para saber si los puntos encontrados son realmente mínimos o máximos locales, en caso de que el programa (*) sea convexo se puede demostrar un importante resultado:

a) Si la función objetivo f es convexa y el conjunto factible F es convexo, entonces aquellos puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker para mínimo local son mínimos globales.

b) Si la función objetivo f es cóncava y el conjunto factible F es convexo, entonces aquellos puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker para máximo local son máximos globales.

[1]No entraremos en el tema de la condición de regularidad. Aquellos lectores interesados pueden consultar la bibliografía recomendada en la introducción.

1.2.4.-PROGRAMAS MULTIOBJETIVO. METODOS DE RESOLUCION.

Existen diversos métodos obtener las soluciones de los programas multiobjetivo. Nosotros haremos referencia solo a uno de ellos: el *método de escalarización.*

Así dado el programa multiobjetivo

$$\text{Minimizar } (f_1(x),\ldots,f_m(x))$$
$$\text{sujeto a} \quad x \in F$$

Tomemos un $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in R^m$ no negativo y formemos el programa de un solo objetivo

$$\text{Min} \quad \alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_m f_m(x)$$
$$\text{sujeto a} \quad x \in F$$

Es posible demostrar que, salvo raras excepciones, las soluciones de estos programas escalares para distintos valores de α coinciden con los óptimos de Pareto del correspondiente programa multiobjetivo. Además, en el caso de que el conjunto factible F sea convexo y las funciones $f_1,\ldots,f_m$ sean convexas, mediante este procedimiento de escalarización es posible localizar todas las soluciones del programa.

Es importante hacer notar que no supone pérdida de generalidad tomar los $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ tales que $\sum \alpha_i = 1$, de tal forma que es posible considerar cada α_i como el "peso" que el decisor da a cada uno de los objetivos.

CAPITULO 2: REASEGURO. ORDENACION DE RIESGOS.

2.1-REASEGURO.

2.1.1-INTRODUCCION.

Una de las mayores amenazas para la solvencia de las entidades aseguradoras es la motivada por la fluctuación de la siniestralidad. Para hacerle frente las empresas optan por reasegurar sus carteras.

El reaseguro es un instrumento cuyo fin es precisamente el de amortiguar dicha fluctuación, y consiste en la cesión de una parte del riesgo desde la aseguradora directa (de ahora en adelante la *cedente*) a la reaseguradora (de ahora en adelante la *aceptante*). El punto de vista que adoptaremos será el de la cedente.

Matemáticamente el reaseguro plantea de entrada el problema de su introducción dentro del modelo de la teoría del Riesgo Colectivo: cómo se traducen las distintas modalidades de reaseguro, cómo modifica las distribuciones básicas, y finalmente cómo se comprueba el efecto amortiguador de los riesgos dentro de nuestro modelo. Realizaremos este análisis en el epígrafe 2.2.

Para ser capaces de comparar la peligrosidad del riesgo antes y después de reaseguro, deberemos contar con algún tipo de *medida del riesgo*. Las más clásicas, debido a su uso generalizado en la literatura actuarial, son las de la *varianza* y *probabilidad de ruina* del riesgo retenido. Estas , junto a otras alternativas tales como los *coeficientes de ajustamiento y de asimetría* serán introducidas en el epígrafe 2.3.

Finalmente, en el epígrafe 2.4 entraremos de lleno en el tema de las *decisiones racionales en reaseguro*. Dejando de lado consideraciones referentes a los mercados del reaseguro, y planteando las posibles cesiones de riesgo a que puede ser sometida una cartera, el decisor se encuentra ante una amplia panorámica consistente en una familia infinita de riesgos dentro de la cual debe elegir el que más le convenga. Desde el punto de vista matemático, que es el de esta obra, la racionalidad de la anterior decisión consiste en que sea tomada de acuerdo con la Teoría de la Utilidad, que es aquella en donde se axiomatizan las preferencias de los decisores individuales.

2.1.2-MODALIDADES DE REASEGURO.

Consideremos un riesgo con daño total S a lo largo de un periodo $(t=1)$. Llamando h(S) a la parte retenida por el asegurador directo, podemos calcular esta última en base a dos magnitudes:

1-Respecto de la cuantía total S:

$$0 \leq h(S) \leq S$$

2-Respecto de las cuantías individuales:

$$0 \leq h(X_i) \leq X_i \quad , \; i=1,\ldots,N$$

Por otro lado, se pueden utilizar, en principio, dos métodos de cálculo:

A-Reaseguro no proporcional, fijado un $M \geq 0$:

$$h(S) = \begin{cases} S \ , & S \leq M \\ M \ , & S \geq M \end{cases}$$

B-Reaseguro proporcional, fijado un $a \in [0,1]$:

$$h(X) = a\ X \equiv \text{Porcentaje de la cuantía } X.$$

Combinando las bases y los métodos de cálculo se obtienen las tres modalidades elementales de reaseguro. En lo que sigue llamaremos

$S_A \equiv$ Parte retenida por el asegurador directo,

$S_R \equiv$ Parte cedida (tomada por el reasegurador).

1.A-Reaseguro STOP-LOSS:

Siniestralidades retenida y cedida

$$S_A = \begin{cases} S \ , & S \leq M \\ M \ , & S > M \end{cases} \quad ; \qquad S_R = S\text{-}S_A = \begin{cases} 0 \ , & S \leq M \\ S\text{-}M \ , & S \geq M \end{cases}$$

Notación: $S_R = (S\text{-}M)_+ = \mathrm{Max}\{0, S\text{-}M\}$.

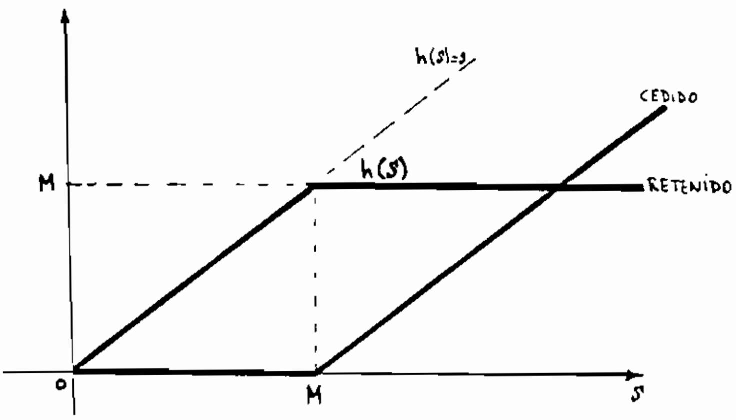


Figura 1: Riesgos retenidos (h(S)) y cedido en la modalidad Stop-Loss con pleno M≥0. El contrato h(S)=S equivale a no reasegurar la cartera.

2.A-Reaseguro EXCESS-LOSS:

$$X_A = \begin{cases} X , & X \leq M \\ M , & X > M \end{cases} \quad ; \quad X_R = X\text{-}X_A = \begin{cases} 0 , & X \leq M \\ X\text{-}M , & X \geq M \end{cases}$$

Notación: $X_R=(X\text{-}M)_+ = \text{Max}\{0,X\text{-}M\}$.

2.B-Reaseguro Proporcional o Cuota-Parte:

Fijando $a \in [0,1]$

$$X_A = aX \quad ; \quad X_R = X\text{-}X_A = (1\text{-}a)\ X$$

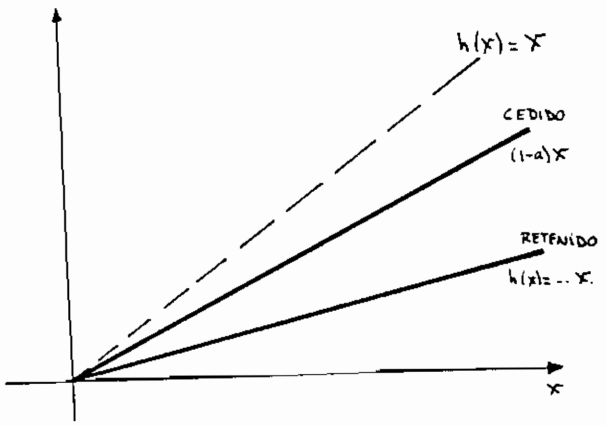


Figura 2: Riesgos retenido h(X). y cedido en la modalidad cuota-parte, con cuota a<0.5.

De ahora en adelante nos referiremos a los números reales a, M como las *cuotas* y *plenos de reaseguro*.

A partir de estas tres modalidades básicas se pueden construir los tipos de contratos que son más frecuentes en el mercado, y que suelen ser combinaciones de los anteriores (véase la figura 3).

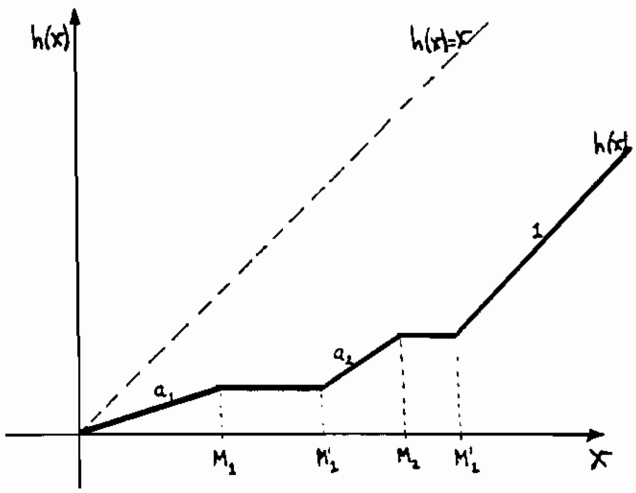


Figura 3: Riesgo retenido h(X) en un contrato mixto Cuota-parte y Excess-Loss, con cuotas $a_1 < a_2 < 1$, y plenos M_1, M_2 en los intervalos (M_1, M_1') y (M_2, M_2').

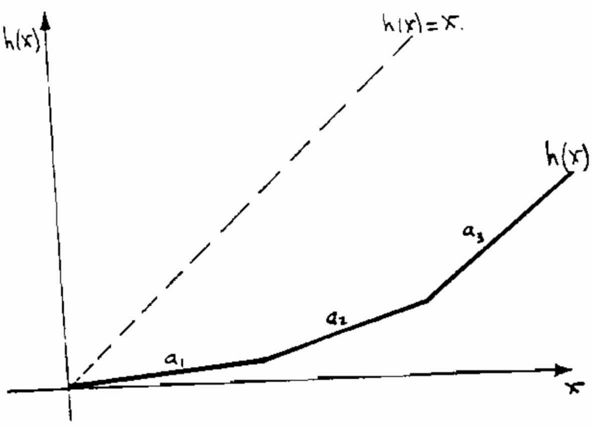


Figura 4: Riesgo retenido h(X) en un contrato mixto de Cuota-Partes, con plenos crecientes $a_1 < a_2 < a_3 < 1$.

El reaseguro se manifiesta dentro del modelo a través de un cambio en las distribuciones del daño total y/o de las cuantías individuales. En consecuencia los momentos de orden k y la probabilidad de ruina también se verán afectados.

Para el caso del cuota-parte, fijando una cuota $a \in [0,1]$, la distribución V de las X_i cambia de la siguiente forma:

-Asegurador directo:

$$V_A(x) = P\left\{aX \le x\right\} = P\left\{X \le \frac{x}{a}\right\} = V\,(x/a)\ ,$$

y su densidad después de reaseguro

$$\frac{d}{dx}V(x/a) = \frac{1}{a}\,v(x/a).$$

La media y la varianza de las X_i pasa a ser:

$$\left.\begin{aligned} E\{X_A\} &= a\ E\{X\} \\ Var\{X_A\} &= a^2\ Var\{X\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} E\{S_A\} &= a\ E\{S\} \\ Var\{S_A\} &= a^2\ Var\{S\}. \end{aligned}\right.$$

El efecto del reaseguro consiste pues en disminuir la media y la varianza de la siniestralidad total, lo cual es claramente ventajoso para el asegurador directo. La cesión total implica el paso a una distribución de probabilidad que concentra la unidad sobre el origen (vease la figura 5).

-Para el caso del reasegurador, los resultados para S_R son iguales pero multiplicando por (1-a), con lo cual la prima neta de reaseguro es $E\{S_R\} = (1\text{-}a)\ E\{S\}$.

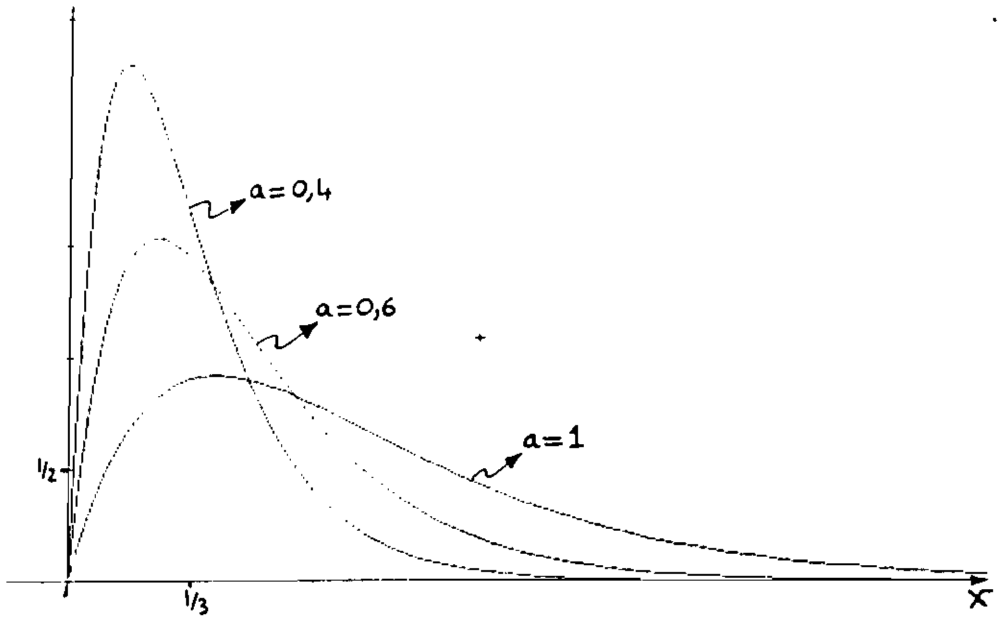


Figura 5: Densidad Gamma(2, 5/2) después de un reaseguro Cuota-parte. Tres cuotas: a=1 (sin cesión); a=0.6 ; a=0,4. A medida que decrece la cuota (mayor cesión), la probabilidad tiende a concentrarse sobre el origen X=0.

Para el caso del stop-loss, tomando un pleno $M \geq 0$, la distribución compuesta F del daño total pasa a ser:

-Asegurador directo:

$$F_A(x) = P\left\{S_A \leq x\right\} = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ F(x) & , x \in [0, M) \\ 1 & , x \geq M \end{cases}$$

La media y la varianza son:

$$E\{S_A\} = \mu = \int_0^M x\ dF(x) + M\ (1\text{-}F(M)) =$$

$$= \int_0^M x\ dF(x) + M - M\ F(M) =$$

$$= \int_0^M x\ dF(x) + \int_0^M dx - M\ F(M) = \left[\begin{array}{l}\text{INTEGRANDO POR PARTES} \\ \text{LA PRIMERA INTEGRAL}\end{array}\right]$$

$$= M\ F(M) - \int_0^M F(x)\ dx + \int_0^M dx - M\ F(M) =$$

$$= \int_0^M (1\text{-}F(x))\ dx.$$

$$Var\{S_A\} = \int_0^M (x - \mu)^2\ dF_A(x) + \int_M^{+\infty} (M\text{-}\mu)^2\ dF_A(x) =$$

$$= \int_0^M (x - \mu)^2\ dF_A(x) + (M\text{-}\mu)^2\ (1\text{-}F(M)).$$

Es claro que desde el punto de vista de la media y varianza la situación del cedente mejora puesto que ambas disminuyen:

$$E\{S_A\} \leq \int_0^{+\infty} (1\text{-}F(x))\ dx = E\{S\}\ ,$$

$$Var\{S_A\} \leq \int_0^M (x - \mu)^2\ dF_A(x) + \int_M^{+\infty} (x\text{-}\mu)^2\ dF_A(x) = Var\{S\}.$$

-Reasegurador:

$$F_R(x) = P\left\{S_R \leq x\right\} = \begin{cases} 0 & , x < M \\ F(M) & , x = M \\ F(x) & , x \geq M \end{cases}$$

En este caso la prima neta de reaseguro es:

$$E\{S\} = E\{S_A\} + E\{S_R\} \Rightarrow E\{S_R\} = \int_M^{+\infty} (1-F(x))\, dx.$$

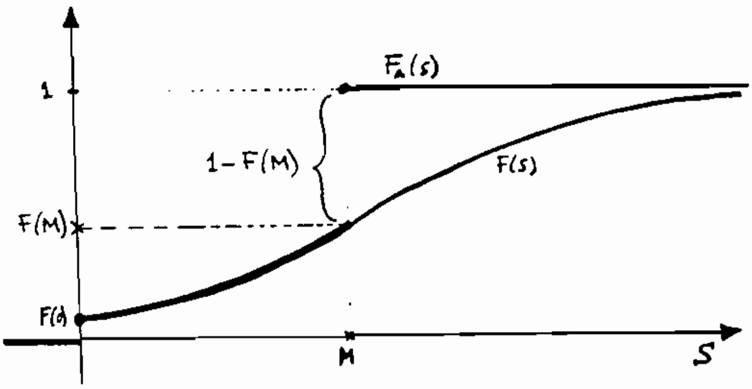


Figura 6: Distribución del daño total F(s) antes de de un reaseguro Stop-loss con pleno M (gráfica continua), y después (discontinua). La modalidad Stop-loss elimina la cola de la distribución que es la que conlleva mayor riesgo (siniestralidad total elevada).

Finalmente el caso del reaseguro excess-loss es idéntico al anterior pero cambiando las v.a. S, S_A, S_R por X, X_A, X_R, y las distribuciones F, F_A, F_R por V, V_A, V_R. En este caso la media y varianza de la cedente pasan a ser:

$$E\{S_A\} = E\{N\} \int_0^M (1-V(x))\, dx$$

$$\mathrm{Var}\{S_A\} = \mathrm{Var}\{N\} \left[\int_0^M (1-V(x))\, dx\right]^2 +$$

$$+ E\{N\} \left[2 \int_0^M x(1-V(x))\, dx - \left[\int_0^M (1-V(x))\, dx\right]^2\right] =$$

$$= \left[\int_0^M (1-V(x))\, dx \right]^2 \left(Var\{N\} - E\{N\} \right) + E\{N\}\, 2 \int_0^M x(1-V(x))\, dx.$$

Haciendo tender $M \to +\infty$, se obtiene

$$\int_0^M (1-V(x))\, dx \to E\{X\} \quad ; \quad 2 \int_0^M x(1-V(x))\, dx \to E\{X^2\},$$

y por tanto

$$E\{S_A\} \to E\{S\} \quad ; \quad Var\{S_A\} \to Var\{S\}.$$

Además cuando $Var\{N\} \geq E\{N\}$ (lo que en la práctica siempre sucede), es seguro que ambas sucesiones son monótonas no decrecientes, por lo que la situación de la cedente siempre es mejor después de reasegurar.

2.1.3-MEDIDAS DEL RIESGO.

Si bien la única descripción completa de un riesgo consiste en su distribución de probabilidad junto con la prima recargada asociada, tradicionalmente esta descripción ha sido sustituida por el cálculo de magnitudes más o menos sencillas, con el fin de simplificar los mecanismos de elección que conducen a retener el riesgo más favorable.

Estas magnitudes son la varianza, la probabilidad de ruina o el coeficiente de ajustamiento. Bajo este sencillo esquema, se supone que el mejor riesgo es aquél que proporciona una varianza o una probabilidad de ruina mínimas, o un coeficiente de ajustamiento máximo.

Una menor varianza significa una menor dispersión de la distribución de S_A, lo cual puede ser bueno aunque no siempre, ya que la varianza incluye tanto las desviaciones favorables como las desfavorables en la siniestralidad futura.

Una probabilidad de ruina pequeña significa una mayor probabilidad de supervivencia futura. Esta es una herramienta estrechamente relacionada con el estudio de la solvencia dinámica del negocio asegurador, ya que minimizando dicha probabilidad se opta por una gestión que haga más sólida a la empresa, desde el punto de vista del cumplimiento de sus compromisos futuros en cuanto al pago de indemnizaciones.

El fin perseguido al maximizar el coeficiente de ajustamiento, procedimiento equivalente al de minimizar la cota superior para la probabilidad de ruina, es exactamente el mismo, y solo está justificado cuando el manejo de la probabilidad de ruina es engorroso (la mayoría de los casos).

También es posible plantearse la minimización del coeficiente de asimetría, pero este procedimiento, además de ser discutible en sí mismo, suele acarrear dificultades de tipo analítico que lo hacen desaconsejable.

En general, todos estos criterios tienen dos inconvenientes importantes:

a) Solo toman en cuenta algunos aspectos parciales de la distribución de probabilidad,

y como consecuencia del punto a)

b)En general no son aptos para representar el orden de preferencias que el decisor, previamente a su elección, debe de haberse formado sobre los riesgos.

Plantear el problema de la toma de decisiones racionales en reaseguro debe consistir fundamentalmente en resolver los problemas a) y b), y para ello es necesario hacer uso de las funciones de utilidad de los decisores. A continuación recordaremos brevemente los conceptos más importantes de la Teoría de la Utilidad.

Según la Teoría de la Decisión más ortodoxa, cualquier problema de decisión en ambiente de riesgo o incertidumbre debe reducirse a la maximización de una cierta función, conocida como *función de utilidad de Von Newmann y Morgenstern*, cuya existencia puede demostrarse bajo condiciones razonables sobre las preferencias del decisor. Más exactamente, si tales condiciones o axiomas se verifican, entonces se puede construir una función u tal que

$$F \text{ es preferido a } G \Leftrightarrow \int u(x)dF(x) < \int u(x)dG(x)$$

$$F \text{ es indiferente a } G \Leftrightarrow \int u(x)dF(x) = \int u(x)dG(x)$$

siendo F y G las funciones de distribución de dos variables aleatorias que representan las alternativas inciertas a las que se enfrenta el decisor. Intuitivamente, la función $u(x)$ representa la utilidad que el decisor asigna a la certeza de una alternativa x. Dicha utilidad se construye de forma que si dos variables aleatorias tienen por realizaciones dichas alternativas x con probabilidades $dF(x)$, $dG(x)$, respectivamente, entonces también es posible ordenar las preferencias entre las variables aleatorias en la forma anteriormente comentada. Es decir, si el decisor ordena las preferencias entre alternativas ciertas mediante una función $u(x)$, entonces también puede representar las preferencias entre alternativas inciertas (variables aleatorias) mediante la ponderación de las utilidades de las alternativas ciertas $u(x)$ por sus probabilidades $dF(x)$. La expresión $\int u(x)dF(x)$ puede entonces considerarse como la utilidad que el decisor asigna a la variable aleatoria cuya función de distribución es $F(x)$, y se conoce como *utilidad de Von Newmann y Morgenstern* : $U(F) = \int u(x)dF(x)$.

En los análisis económicos es habitual suponer que la función u es creciente ($u'(x)>0$) y cóncava ($u''(x)<0$), lo que representa una utilidad marginal decreciente. Bajo tales condiciones se demuestra que el decisor es *averso al riesgo*, es decir, que prefiere un resultado seguro a un juego cuya esperanza matemática sea dicho resultado (*desigualdad de Jensen*).

La Teoría de la Utilidad se desarrolló rápidamente en la década de los cincuenta, y casi inmediatamente los actuarios (principalmente Karl Borch) la aplicaron al estudio de los problemas del seguro. Según este enfoque, se supone que los objetivos de toda compañía aseguradora pueden formularse en términos de la maximización de una cierta función de utilidad cuyos argumentos son la función de distribución de la siniestralidad total F(x) y las reservas de solvencia S :

$$U(S,F(x)) = \int u(S-x)dF(x)$$

siendo u(s) la utilidad que la compañía asigna a la certidumbre de obtener un beneficio s. Si llamamos S_0 a las reservas iniciales de la empresa, P al valor esperado de la siniestralidad total y θ al recargo de seguridad, la función de utilidad U se puede escribir como

$$U(S,F(x)) = \int u(s_0+(1+\theta)P-x)\ dF(x)$$

2.1.4-EL PROBLEMA DEL REASEGURO OPTIMO. DECISIONES RACIONALES EN REASEGURO.

El problema del reaseguro óptimo consiste en la determinación de unas cuotas de reaseguro que sean óptimas en algún sentido desde el punto de vista de la cedente. Existirán tantas cuotas como subcarteras compongan la cartera total. En adelante notaremos dichas cuotas como a_i, M_i $(i=1,\dots,n)$ dependiendo de que la modalidad elegida sea proporcional o no proporcional respectivamente.

De ahora en adelante supondremos que el reaseguro implica una cesión de una parte de la prima recargada. Concretamente esta cesión de primas será expresada como

$$(1+\xi)\ E\{S_R\},$$

siendo ξ el *recargo de reaseguro* y $E\{S_R\}$ la *prima neta de reaseguro* que ya fue calculada para las distintas modalidades. Nosotros supondremos que los recargos de seguridad y de reaseguro son iguales para así poder descomponer la prima recargada en sus partes retenida y cedida (fijando $t=1$):

$$P(1) = (1+\theta)\, E\{S\} = (1+\theta) \left[E\{S_A\} + E\{S_R\}\right] =$$
$$= (1+\theta)\, E\{S_A\} + (1+\theta)\, E\{S_R\} \equiv$$
$$\equiv \text{(prima retenida)} + \text{(prima cedida)}.$$

En general, los criterios de optimalidad para la selección de las cuotas óptimas, intentan modelizar el comportamiento de la cedente al optar por reasegurar su cartera, a saber:

a) Minimizar el riesgo.

b) Maximizar las reservas futuras.

El carácter generalmente contradictorio de estas dos motivaciones es claro (cuanto más riesgo se cede, más disminuyen las primas retenidas), por lo que el decisor deberá buscar una solución de compromiso entre los dos objetivos.

Por tanto un esquema general dentro del cual podría buscarse la solución del problema, sería en principio:

MIN Riesgo y MAX Reservas.

Resulta, pues, que una vía natural para la modelización de este problema de decisión es la de la Programación Multiobjetivo. En el primer objetivo, se puede tomar en principio cualquier medida del riesgo, mientras que en el segundo el carácter aleatorio de la siniestralidad hace que sea natural considerar el *nivel esperado* de las reservas:

$$E\left\{S_0 + P_A - S_A\right\}$$

Tomando como medida del riesgo la varianza de las reservas después de reaseguro, estaremos aplicando de hecho el clásico *criterio media-varianza*. En este caso el programa multiobjetivo tendrá el siguiente aspecto:

$$\text{MIN Var}\left\{S_0 + P_A - S_A\right\}$$
$$\text{MAX E}\left\{S_0 + P_A - S_A\right\}.$$

Sujeto a: $a_i \in [0,1]$ $(i = 1,\dots,n)$ (caso proporcional)

$M_i \geq 0$ $(i = 1,\dots,n)$ (caso no proporcional).

El criterio media-varianza ha sido tradicionalmente el más utilizado en la literatura actuarial, en el intento de resolver el problema de la determinación de las cuotas óptimas de reaseguro. El primero en plantearlo fue [De Finetti,B.1940], y en [Bühlman,H.1970] se utiliza en el marco de la Teoría del Riesgo Colectivo con los modelos compuestos/ponderados habituales.

El anterior programa multiobjetivo posee como solución un conjunto de óptimos de Pareto $\left[a_i(\alpha)\right]_{i=1}^{n}$, cada uno de ellos solución del programa escalarizado (véase 1.2.4) cuya función objetivo es

$$\text{MIN}\left\{\alpha\ \text{Var}\left\{S_0 + P_A - S_A\right\} - (1-\alpha)\ \text{E}\left\{S_0 + P_A - S_A\right\}\right\},$$

siendo $\alpha \in [0,1]$. Dicho valor se interpreta como el peso relativo que el decisor otorga a cada uno de los objetivos: las soluciones extremas consistentes en cederlo o retenerlo todo corresponden a los pares de pesos (1,0) $(\alpha=1)$ y (0,1) $(\alpha=0)$, respectivamente.

En [Bühlman,H.1970] se utiliza un método que puede servirle de ayuda al decisor en la selección del óptimo Paretiano que esté más de acuerdo con sus intereses, desde el punto de vista de la solvencia del negocio retenido. Para ello se determinan, fijada una probabilidad de ruina tan pequeña como se quiera, aquellos óptimos que garantizan que el negocio retenido tendrá una probabilidad de ruina más pequeña que la elegida. Este paso se realiza aplicando la desigualdad de Lundberg.

Resumiendo, este primer método consiste en la resolución del problema en dos pasos:
1-Obtención de los óptimos de Pareto suministrados por el criterio media-varianza.
2-Búsqueda de los óptimos que garantizan una probabilidad de ruina $\leq \varepsilon \in [0,1]$.

El defecto del método anterior consiste en que el criterio media-varianza ha sido establecido a priori como modelo de comportamiento de la cedente. Así, se ha evitado el tema fundamental consistente en que si el decisor debe seleccionar un riesgo, previamente ha debido clarificar cuales son sus preferencias.

Enfocar el problema del reaseguro óptimo realizando un análisis previo del orden de preferencias sobre los riesgos establecido por el decisor, equivale a centrar dicho problema dentro de la toma de decisiones racionales es decir, de la Teoría de la Utilidad.

Tomar en consideración el orden total de preferencias del decisor equivale a conocer su función de utilidad $u(x)$ que ordena todos los valores posibles de sus reservas $x \in \mathbb{R}$. Fijada esta función, el decisor preferirá siempre el riesgo que maximice su *utilidad esperada*, y seleccionará por tanto las cuotas que sean óptimas respecto del programa matemático:

$$\text{MAX } E\left\{u(S_0+P_A-S_A)\right\}$$

s.a: $a_i \in [0,1]$ $(i = 1,\ldots,n)$ (caso proporcional)

$M_i \geq 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ (caso no proporcional).

La solución de este programa es un óptimo que representa el mejor riesgo con respecto a su orden (total) de preferencias sobre riesgos, y garantiza por tanto la racionalidad en la selección de las cuotas.

Si se pretendiese que dicho óptimo tuviera alguna interpretación desde el punto de vista de la solvencia (probabilidad de ruina) se debería incluir en el programa una restricción del tipo

$$\Psi(s_0) \leq \varepsilon \in [0,1]$$

Consideremos a continuación el caso particular del daño total normalmente distribuido. Se puede pensar que esto sucede cuando la cartera es grande, ya que entonces la proposición 1.2 puede ser aplicable.

Comprobemos que el programa que maximiza la utilidad esperada de las reservas es equivalente al del criterio media-varianza. Si la v.a. S está distribuida según una $N(\mu,\sigma^2)$, y teniendo en cuenta que la función de utilidad $u(x)$ de las reservas retenidas es tal que $u'>0$, $u''<0$ (cuantas más reservas mejor, y aversión al riesgo):

$$E\left\{u(S_0+(1+\theta)\mu-S)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} u(S_0+(1+\theta)\mu-s)\,\exp\left[\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] ds = \ldots$$

Cambiando la variable $x = \dfrac{s-\mu}{\sigma}$ se obtiene

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(S_0+\theta\mu-\sigma x)\,\exp\left[\frac{x^2}{2}\right] dx = F(\mu,\sigma).$$

Si calculamos las derivadas parciales respecto de μ y σ:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\, u'(S_0+\theta\mu-\sigma x)\,\exp\left[\frac{x^2}{2}\right] dx > 0 \text{ , ya que } \begin{cases}\theta > 0\\ u' > 0\end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} -x\, u'(S_0+\theta\mu-\sigma x)\,\exp\left[\frac{x^2}{2}\right] dx = \begin{bmatrix}\text{INTEGRANDO}\\ \text{POR PARTES}\end{bmatrix}$$

$$= \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} u''(S_0+\theta\mu-\sigma x)\,\exp\left[\frac{x^2}{2}\right] dx < 0, \text{ ya que } u''<0.$$

Por tanto la utilidad esperada es creciente respecto de μ y decreciente respecto de σ.

En conclusión, *para toda función de utilidad del decisor creciente y cóncava y para una distribución de siniestralidad normal, maximizar la utilidad esperada de las reservas es equivalente a maximizar la media y minimizar la varianza de las mismas* $(S_0+\theta\mu,\ \sigma^2)$.

Así pues, siempre que podamos suponer una siniestralidad normalmente distribuida (proposición 1.2), el criterio media-varianza nos proporcionará una decisión racional óptima.

Obsérvese que la hipótesis de normalidad tendrá que ser aplicable *a todos los posibles riesgos que el decisor pueda formar haciendo variar la(s) cuota(s) de reaseguro*. Esto excluye en principio al reaseguro stop-loss, ya que al elegir un pleno $M<+\infty$ la distribución queda truncada en ese punto y por tanto deja de ser normal. Por el contrario sí que podemos pensar en la posible adecuación de esta hipótesis a las modalidades de excess-loss y cuota-parte.

La limitación del modelo de la maximización de la utilidad esperada es la de suponer un conocimiento preciso de la función de utilidad del decisor. Cuando de esta última sólo conocemos algunas características generales (crecimiento, signo de las derivadas), la resolución de los anteriores modelos ya no es posible, salvo en el caso de la distribución normal que acabamos de comentar.

Sin embargo, tal y como veremos en el último epígrafe de este capítulo, sí que es posible entonces establecer un orden parcial sobre riesgos según las preferencias colectivas de decisores con características comunes, tales como su preferencia por unas mayores reservas o su aversión al riesgo.

2.2-ORDENACION DE RIESGOS.

2.2.1-ORDENES TOTALES Y PARCIALES.

A lo largo de este último epígrafe expondremos resumidamente la forma en que un colectivo de decisores, caracterizados por el hecho de tener funciones de utilidad que comparten determinadas propiedades, pueden establecer algún tipo de ordenación colectiva de los riesgos. La ventaja sustancial de la teoría consiste en que ya no será necesario determinar exactamente las funciones de utilidad sino solamente conocer las anteriores propiedades. Nuestra exposición sigue a [Goovaerts,M., Kaas,R., y otros. 1990].

A partir de ahora trabajaremos con v.a. $X \geq 0$ para representar el daño total de una cartera. A dichas v.a. las denominaremos *riesgos*[1]. Al conjunto de todos los riesgos lo llamaremos:

$$\mathfrak{R} = \left\{ X \text{ v.a.}/X \geq 0 \text{ con probabilidad } 1 \right\}.$$

Definición 2.1: Un *orden parcial* definido en el conjunto $\mathfrak{R}$ es una relación binaria $\leq$ que cumple:

1)Transitiva: $\left.\begin{matrix} X \leq Y \\ Y \leq Z \end{matrix}\right\} \Rightarrow X \leq Z.$

2)Reflexiva: $X \leq X \ , \quad \forall X \in \mathfrak{R}$

3)Antisimétrica: $\left.\begin{matrix} X \leq Y \\ Y \leq X \end{matrix}\right\} \Rightarrow X, Y$ "son indiferentes" $(X = Y)$

Definición 2.2: Decimos que el *orden es total* cuando además de 1),2),3) se cumple que dos riesgos cualesquiera siempre son comparables entre si:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{R}: X \leq Y \text{ o bien } Y \leq X.$$

[1] Hagamos notar que utilizamos la palabra "riesgo" en un sentido diferente del que ha tenido hasta ahora.

Partiendo del hecho de que cada decisor establece individualmente un *orden total* sobre el conjunto $\mathfrak{R}$ mediante el criterio de la utilidad esperada, un conjunto de decisores generará un *orden parcial* sobre dicho conjunto de la siguiente forma.

Llamemos D al conjunto de los decisores, y $\leq_d$ al orden total que el decisor $d \in D$ es capaz de establecer sobre $\mathfrak{R}$. Entonces podemos definir la relación binaria en $\mathfrak{R}$:

$$X \leq_{col} Y \Leftrightarrow X \leq_d Y, \ \forall d \in D,$$

y suponiendo que el subconjunto de riesgos relacionados mediante $\leq_{col}$ sea distinto del vacío, dicha relación será un *orden parcial* sobre $\mathfrak{R}$. El que el anterior subconjunto sea distinto del vacío dependerá del grado en que los decisores agrupados en D compartan alguna característica común a la hora de establecer sus ordenes de preferencias sobre riesgos. Estos rasgos comunes se traducirán en propiedades idénticas para sus funciones de utilidad.

A medida que los requisitos sobre las utilidades vayan siendo más numerosos, el número de decisores que los compartan disminuirá, y el conjunto de riesgos ordenados parcialmente irá en aumento. En este contexto es significativa la siguiente definición.

Definición 2.3: Consideremos dos órdenes parciales $\leq_1$, $\leq_2$ sobre el conjunto $\mathfrak{R}$ tales que cumplen

$$X \leq_1 Y \Rightarrow X \leq_2 Y.$$

Entonces diremos que $\leq_1$ *es más fuerte que* $\leq_2$, o también que $\leq_2$ *es más débil que* $\leq_1$ ($\leq_2$ "ordena más riesgos que" $\leq_1$).

Toda la exposición que sigue parte de la base de que los decisores hacen uso del criterio de la utilidad esperada. En este punto conviene recordar que los riesgos (daños totales) entran restando dentro del modelo de las reservas establecido en el epígrafe

1.2. Es por esta razón que X será preferido a Y por un decisor con utilidad u(x) si y solamente si

$$E\{u(-x)\}\geq E\{u(-y)\}.$$

Por tanto, si las preferencias del decisor vienen descritas por una utilidad creciente ($u'>0$) y cóncava ($u''<0$), entonces tendremos que u(-x) será *decreciente* y cóncava.

2.2.2-EL ORDEN DE LA DOMINANCIA ESTOCASTICA.

Definición 2.4: Decimos que el riesgo X *es preferido en dominancia estocástica a* Y ($X\leq_{st}Y$) si se cumple que

$$\forall\ w(x) \text{ creciente: } E\{w(x)\}\leq E\{w(y)\}.$$

Tomando entonces una utilidad cualquiera que sea creciente, u(x), resulta que $w(x)=-u(-x)$ también es creciente, con lo cual tendremos que:

$$X\leq_{st}Y \Leftrightarrow E\{-u(-x)\}\leq E\{-u(-y)\}$$

$$\Leftrightarrow E\{u(-x)\}\geq E\{u(-y)\},\ \forall\ u(x) \text{ creciente}$$

La anterior definición se puede resumir de la siguiente forma:

X es preferido en dominancia estocástica a Y si y solamente si todos los decisores con la característica común de tener una función de utilidad creciente prefieren a X.

Conviene recordar que una utilidad creciente refleja la preferencia del decisor por un nivel de riqueza lo más alto posible.

Los siguientes resultados son muy útiles en cuanto que nos permiten detectar el orden de la dominancia entre riesgos sin referencia alguna a las funciones de utilidad, haciendo uso exclusivo del modelo probabilístico seguido por el riesgo. En lo que sigue llamaremos F_x, F_Y a las distribuciones de los riesgos y f_X, f_Y a sus densidades o a sus cuantías dependiendo del tipo de modelo que siguan ambos.

Proposición 2.1: (Orden $\leq_{st}$ y Funciones de Distribución)

$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \forall x \geq 0$: $F_X(x) \geq F_Y(x)$

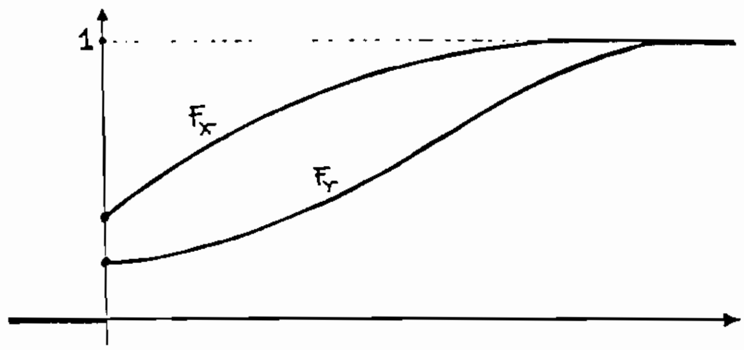


Figura 7: Por la proposición 2.1 resulta que $X \leq_{st} Y$.

Proposición 2.2: (Orden $\geq_{st}$ y densidades-cuantías)

Supongamos que X, Y son dos riesgos cuyas densidades (resp. cuantías) son tales que:

$$f_X(x) \geq f_Y(x) \quad , \forall x \in [0, x_0)$$

$$f_X(x) \leq f_Y(x) \quad , \forall x \in (x_0, +\infty)$$

Entonces:

$$\Rightarrow X \leq_{st} Y$$

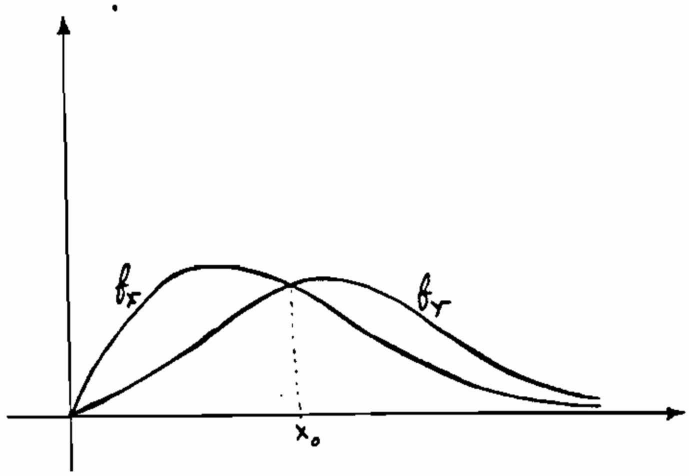


Figura 8: $X \leq_{st} Y$ (Proposición 2.2).

Ejemplo 2.1: Tomemos dos v.a. N_1, N_2 con distribuciones de Poisson de parámetros respectivos $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Entonces resulta que $N_1 \leq_{st} N_2$.

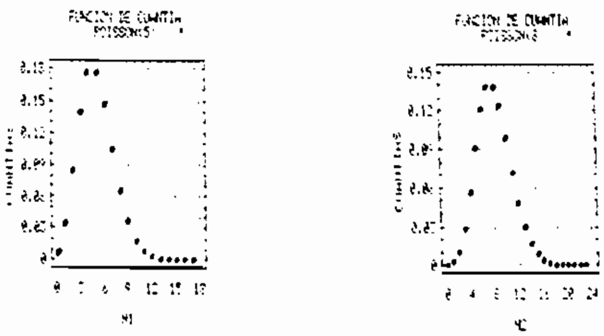


Figura 9: Cuantías $N_1 \cong P(5)$ y $N_2 \cong P(8)$. $N_1 \leq_{st} N_2$.

Ejemplo 2.2: Tomemos dos riesgos X, Y con distribuciones exponenciales de parámetros respectivos $\lambda \leq \mu$. Entonces por la proposición 1.7 resulta que $Y \leq_{st} X$ (cuanto mayor es el parámetro menor es el riesgo)

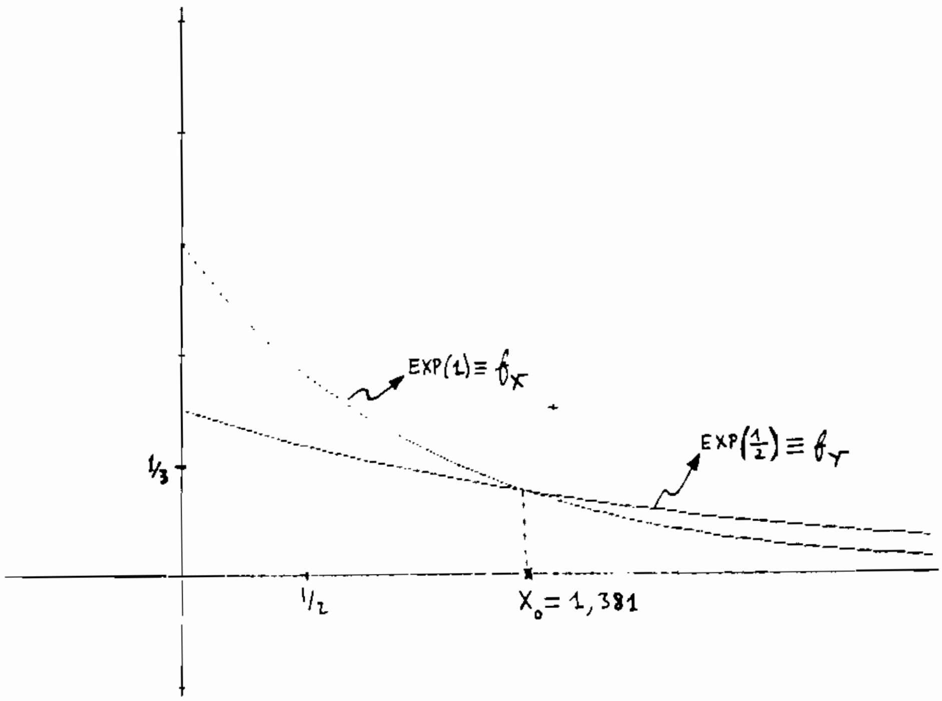


Figura 10: Densidades $X \cong Exp(1)$; $Y \cong Exp(1/2)$. $X \leq_{st} Y$.

Ejemplo 2.3: Consideremos la familia de todas las distribuciones gamma de dos parámetros:

$$f(t;\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} \quad (t>0,\ \alpha,\beta>0)$$

Esta familia se incrementa estocásticamente en α y decrece en β.

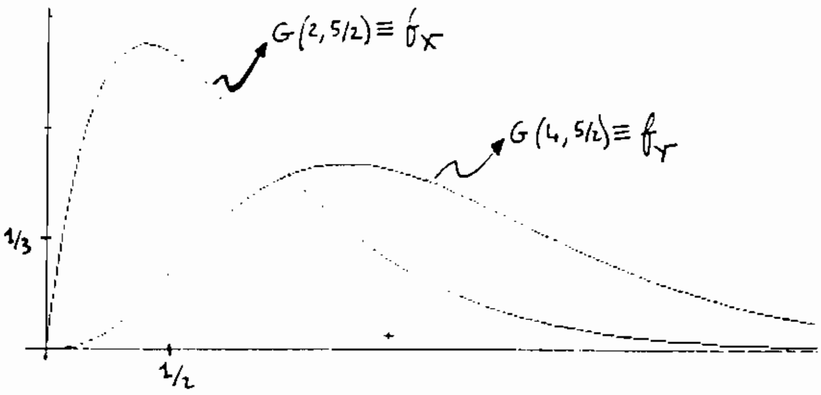


Figura 11: Densidades $X \cong G(2,5/2)$; $Y \cong G(4,5/2)$. $X \leq_{st} Y$.

Ejemplo 2.4: Consideremos dos riesgos no aleatorios $0 \leq X \leq Y$. Entonces la proposición 1.7 nos indica que X es preferido en dominancia estocástica a Y.

El orden de la dominancia estocástica es invariante respecto de dos operaciones de cuya importancia ya tuvimos constancia en el capítulo anterior, la *convolución y la composición de riesgos*.

Proposición 2.3: (Invarianza de $\leq_{st}$ por convolución).

Supongamos dos riesgos tales que $X \leq_{st} Y$ y un tercero, Z, que es independiente de los anteriores. Entonces:

$$\Rightarrow X+Z \leq_{st} Y+Z.$$

Proposición 2.4: (Invarianza de $\leq_{st}$ por composición).

Consideremos dos v.a. contadoras $N \leq_{st} M$, así como dos sucesiones de riesgos independientes $\left(X_i\right)_{i=1}^{\infty}$, $\left(Y_i\right)_{i=1}^{\infty}$ independientes de N y M respectivamente, tales que $X_i \leq_{st} Y_i \ \forall i \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i \leq_{st} \sum_{i=1}^{M} Y_i.$$

Ejemplo 2.5: Consideremos dos carteras con las siguientes características:

Cartera 1:

-Número de siniestros distribuido según una Poisson de parámetro 2.

-Cuantías individuales distribuidas según una exponencial de parámetro 1/2.

Cartera 2:

-Número de siniestros distribuido según una Poisson de parámetro 3.

-Cuantías individuales distribuidas según una exponencial de parámetro 1/3.

Entonces el daño total de la cartera 1 es preferido en dominancia estocástica al de la cartera 2:

$$S_1 \leq_{st} S_2.$$

2.2.3-EL ORDEN DE LA VARIABILIDAD O DE LOS AVERSOS AL RIESGO.

El orden parcial que se introduce a continuación surge cuando consideramos las preferencias conjuntas de todos los decisores con utilidades crecientes y cóncavas. Esta última característica refleja la aversión al riesgo, que consiste en preferir una perdida cierta m a otra aleatoria con media m.

Definición 2.5: Decimos que X *es preferido a* Y en el *orden de los aversos al riesgo* ($X \leq_{ar} Y$) si se cumple:

$\forall$ u(x) creciente y cóncava: $E\{u(x)\} \leq E\{u(y)\} \Leftrightarrow E\{u(-x)\} \geq E\{u(-y)\}$

El orden $\leq_{ar}$ es equivalente (véase [Goovaerts,M.,Kaas,R., 1990] a otros dos órdenes que se establecen en $\Re$ a partir de ideas que son distintas solo en apariencia: los ordenes *stop-loss* y de la *variabilidad*.

El orden stop-loss se establece comparando las primas netas de reaseguro stop-loss, lo que equivale a decir que un riesgo será preferido a otro cuando la cola del primero sea *más pequeña* que la del segundo.

Definición 2.6: X precede a Y en el orden stop-loss ($X \leq_{sl} Y$) si las primas netas de reaseguro stop-loss de ambos están uniformemente ordenadas:

$$E\left\{(X-M)_+\right\} \leq E\left\{(Y-M)_+\right\}, \quad \forall M \geq 0.$$

Observación: $(X-M)_+ = \text{Max}\left\{0, X-M\right\} \equiv$ Parte cedida en la modalidad stop-loss. (Figura 1, pag.30)

Recordemos también que si F es la distribución de **X** entonces:

$$E\left\{(X-M)_+\right\} = \int_M^{+\infty} (1-F(x))\, dx.$$

Definición 2.7: Decimos que X *es menos variable que* Y ($X \leq_v Y$) si:

$\exists$ D v.a. tal que:

1) Las v.a. X+D, Y están idénticamente distribuidas.

2)$E\{D|X\}=0$ con probabilidad 1.

A partir de ahora adoptaremos el convenio de referirnos al orden caracterizado de cualquiera de estas tres formas como el orden de la *variabilidad.*

Los dos resultados siguientes son condiciones suficientes para la preferencia en variabilidad entre dos riesgos.

Proposición 2.5: (1 Cruce en las distribuciones$\Rightarrow$Variabilidad)

Consideremos dos riesgos X, Y tales que

$$\exists\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que:} \begin{cases} F_X(x) \leq F_Y(x) & , \forall\ x < x_0. \\ F_X(x) \geq F_Y(x) & , \forall\ x \geq x_0. \end{cases}$$

y además $E\{X\} \leq E\{Y\}$. Entonces:

$$\Rightarrow X \leq_v Y.$$

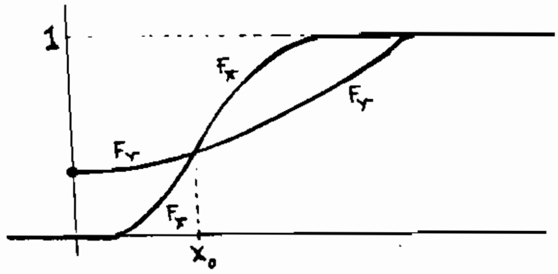


Figura 12: Proposición 2.5. $X \leq_v Y$.

Proposición 2.6: (2 Cruces en las densidades⇒Variabilidad).

Consideremos dos riesgos X, Y que cumplen:

1)$E\{X\} \le E\{Y\}$

2)$\exists$ I_1, I_2, $I_3 \subset [0,+\infty)$, intervalos disjuntos con $0 \in I_1$, I_1 e I_2 acotados, tales que:

$$\begin{cases} f_X(x) \le f_Y(x) \ , \ \forall x \in I_1 \cup I_3. \\ f_X(x) \ge f_Y(x) \ , \ \forall x \in I_2. \end{cases}$$

Entonces:

$$\Rightarrow X \le_v Y.$$

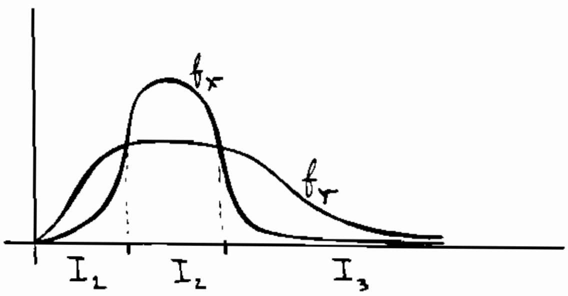


Figura 13: Proposición 2.6. $X \le_v Y$.

Ejemplo 2.6: Tomemos dos riesgos $X \approx Exp(1)$ e $Y \approx U(0,2)$. Entonces las funciones de distribución son:

$$F_X(x) = 1-e^{-x}, \ \forall x>0 \quad ; \quad F_Y(x) = x/2, \ \forall x \in [0,2].$$

Como además es $E\{X\} = E\{Y\} = 1$, y se satisface la condición de un solo cruce, resulta que $Y \le_v X$.

Los dos siguientes resultados expresan la invarianza del orden de variabilidad respecto de la convolución y la composición de riesgos:

Proposición 2.7: (Convolución de n riesgos).

Sean $\{X_i\}_1^n$, $\{Y_i\}_1^n$ riesgos independientes tales que $X_i \leq_v Y_i$ $\forall i$.

Entonces:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \leq_v \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Proposición 2.8: (composición de riesgos)

Consideremos dos v.a. contadoras $N \leq_v M$, así como dos sucesiones de riesgos independientes $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ independientes de N y M respectivamente, tales que $X_i \leq_v Y_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Entonces:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i \leq_v \sum_{i=1}^{M} Y_i.$$

Finalmente, el último resultado nos dice que el orden de la variabilidad es más débil que el de la dominancia estocástica.

Proposición 2.9:

$\forall\ X,Y \in \mathfrak{R}\ /\ X \leq_{st} Y \Rightarrow X \leq_v Y.$

2.2.4-ORDENES DE CLASE INFINITO. EL ORDEN EXPONENCIAL.

A lo largo del anterior epígrafe han sido definidos dos ordenes parciales establecidos por dos colectivos de decisores cada uno con las siguientes características:

1) $\leq_{st}$: Función de utilidad creciente ($u' \geq 0$).

2) $\leq_{v}$: Función de utilidad creciente y cóncava ($u' \geq 0$ y $u'' \leq 0$).

El colectivo caracterizado por la condición 2) es claramente más reducido que el de 1). Aumentando las propiedades comunes de las funciones de utilidad, es posible restringir aún más dicho colectivo. Para ello se consideran todos los decisores que comparten utilidades $u \in \mathcal{C}^n$ siendo sus derivadas de signo alternado:

$$(-1)^{k-1}\ u^{(k)}(x) \geq 0,\ \forall\ k \in \{1,\ldots,n\}.$$

De esta forma se pueden obtener órdenes sucesivamente más débiles que los dos anteriores.

Considerando el caso extremo de las funciones de utilidad de clase infinito (con derivadas continuas de cualquier orden) se obtendrán por tanto los órdenes más débiles. Dentro de esta categoría y desde el punto de vista actuarial, es de particular importancia el orden inducido por aquellos decisores cuya característica común es la de compartir utilidades exponenciales

$$u_{\alpha}(x) = -e^{-\alpha x}\ (\alpha > 0).$$

Puesto que es $u_{\alpha} \in \mathcal{C}^{\infty}$, alternando sus derivadas sucesivas el signo, dicho orden será de los más débiles posibles (los que mayor número de riesgos ordenan), y se denomina *orden exponencial.*

Obsérvese que al ser

$$u'(x) = \alpha e^{-\alpha x} > 0 \quad , \quad u''(x) = -\alpha^2 e^{-\alpha x} < 0,$$

resulta que el número α es igual al *coeficiente de aversión al riesgo* que en este caso resulta ser constante:

$$\alpha = \frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Definición 2.8: Dados dos riesgos X, Y, decimos que X *es preferido a* Y *en el orden exponencial* ($X \leq_e Y$) si se verifica:

$$\forall \alpha > 0 \text{ coeficiente de aversión al riesgo: } E\{e^{\alpha X}\} \leq E\{e^{\alpha Y}\}.$$

Esto es equivalente a la siguiente condición sobre las f.g.m.:

$$\forall \alpha > 0: \ M_X(\alpha) \leq M_Y(\alpha).$$

Recordando el comentario posterior a la definición 1.4 resulta que:

$$X \leq_e Y \Leftrightarrow \forall \alpha > 0: \ E\{e^{\alpha X}\} \leq E\{e^{\alpha Y}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha > 0: \ E\{-e^{\alpha X}\} \geq E\{-e^{\alpha Y}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha > 0: \ E\{u_\alpha(-x)\} \geq E\{u_\alpha(-x)\}$$

Para este orden la condición de caracter práctico que indica una preferencia viene dada por la propia definición, y se refiere a las funciones generadoras de momentos de los riesgos.

La siguiente proposición establece la invarianza del orden exponencial respecto de la composición.

Proposición 2.10: (Orden $\leq_e$ y composición de riesgos).

Consideremos dos v.a. contadoras $N \leq_e M$, así como dos sucesiones de riesgos independientes $\left(X_i\right)_{i=1}^{\infty}$, $\left(Y_i\right)_{i=1}^{\infty}$ e independientes de N y M respectivamente, tales que $X_i \leq_e Y_i \ \forall i \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i \leq_c \sum_{i=1}^{M} Y_i.$$

2.2.5-ORDENACION DE RIESGOS Y MEDIDAS DEL RIESGO.

A lo largo del epígrafe 2.1.3 fueron presentadas algunas magnitudes que podían ser utilizadas como *medidas del riesgo*. Estas eran fundamentalmente la *varianza*, la *probabilidad de ruina*, y el *coeficiente de ajustamiento*.

A continuación se expondrá la relación existente entre dichas medidas y los órdenes parciales definidos hasta este momento. Hablando en términos más precisos, se trata de aclarar si una medida es coherente con alguno de los órdenes, entendiéndose dicha coherencia en el sentido de que a los riesgos menos preferidos por el colectivo de decisores les correspondan valores más desfavorables de la medida elegida.

Se analizará en primer lugar el caso de la varianza , y después el de la probabilidad de ruina y el coeficiente de ajustamiento.

Recordemos que la varianza es una medida del riesgo de uso corriente por su aplicación a través del criterio de la media-varianza. En relación con el orden de variabilidad se tiene que:

$$\left.\begin{array}{c} E\{X\} = E\{Y\} \\ X \leq_v Y \end{array}\right\} \Rightarrow Var\{X\} \leq Var\{Y\}.$$

En efecto, partiendo de la definición 1.6 se puede probar que $E\{X^2\} \leq E\{Y^2\}$:

$$E\{Y^2\} = E\{(X+D)^2\} = E\{X^2+2DX+D^2\} = E\{X^2+2DX+D^2 | X\} =$$
$$= E\{X^2\} + 2E\left(XE\{D|X\}\right) + E\{D^2\} \geq E\{X^2\}.$$

Para el caso en que sea $E\{X\} < E\{Y\}$ puede darse el caso de que $X \leq_v Y$ y sin embargo sea $Var\{X\} \geq Var\{Y\}$.

Ejemplo 2.7: Consideremos los siguientes riesgos:

$$X \cong B(1,p) \quad ; \quad Y=1 \text{ con probabilidad } 1.$$

Resulta entonces que

$$E\{X\}=p\in(0,1) \ , \ E\{Y\}=1 \Rightarrow E\{X\}<E\{Y\}.$$

$$Var\{X\}=p(1-p) \ , \ Var\{Y\}=0 \Rightarrow Var\{X\}>Var\{Y\}.$$

Pero por otro lado se tiene que $X \leq_v Y$, puesto que atendiendo a la definición 1.6, y definiendo la v.a. D de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \text{Si } X=0 \text{ entonces } D=1 \text{ con probabilidad } 1 \\ \text{Si } X=1 \quad \text{"} \quad D=0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}, \end{cases}$$

se obtiene lo siguiente:

$$P\{X+D=1\} = P\{X+D=1|X=0\}\ P\{X=0\} + P\{X+D=1|X=1\}\ P\{X=1\} =$$
$$= (1-p)+p = 1,$$

y esto equivale a que

$$X+D \overset{d}{=} Y \Rightarrow X \leq_v Y.$$

Así pués podemos resumir lo anterior de la siguiente forma:

A igualdad de medias, si un riesgo es menos variable que otro entonces la varianza del primero será siempre menor o igual que la del segundo.

Por lo tanto también será cierto que *para riesgos que verifican la condición de un cruce de sus distribuciones (proposición 2.5) y tales que su medias sean iguales, el de menor varianza será el preferido en el orden de variabilidad.*

El anterior análisis de los momentos de primer y segundo orden puede completarse demostrando que:

$$X \leq_v Y \Rightarrow \forall \alpha \geq 1: \ E\{X^\alpha\} \leq E\{Y^\alpha\}.$$

Para el caso de la probabilidad de ruina se tiene el siguiente resultado para el orden de variabilidad.

Proposición 2.11:

Sean dos procesos de Poisson compuestos con igual parámetro de Poisson y con cuantías individuales X,Y respectivamente. Llamemos ψ_X, ψ_y a sus respectivas probabilidades de ruina, y supongamos que los dos procesos de ruina tienen la misma prima recargada $c>0$. Entonces:

$$X \leq_v Y \Rightarrow \psi_X(s_0) \leq \psi_y(s_0), \ \forall s_0 \geq 0.$$

Así pues, *a igualdad de prima recargada y del parámetro de Poisson, la probabilidad de ruina crece según va aumentando la variabilidad de las cuantías individuales de los siniestros.*

Se puede probar que los órdenes más fuertes que el de la variabilidad (dominancia estocástica) también ordenan las probabilidades de ruina mientras que los más débiles (órdenes de clase infinito) no tienen esta propiedad.

Finalizamos con la relación existente entre el orden exponencial y el coeficiente de ajustamiento. Para ello recordemos que dicho coeficiente viene definido como la solución $z=\mathcal{R}$ de

$$1 + (1 + \theta)\, E\{X\}\, z = M_X(z) \quad , \quad z > 0,$$

y también que dados dos riesgos X,Y

$$X \leq_e Y \Leftrightarrow \forall z > 0:\ M_X(z) \leq M_Y(z).$$

Proposición 2.12:

Sean dos procesos de Poisson compuestos con igual prima recargada $c>0$ y cuantías individuales respectivas X e Y. Entonces:

$$X \leq_e Y \Rightarrow \mathcal{R}_X \geq \mathcal{R}_Y.$$

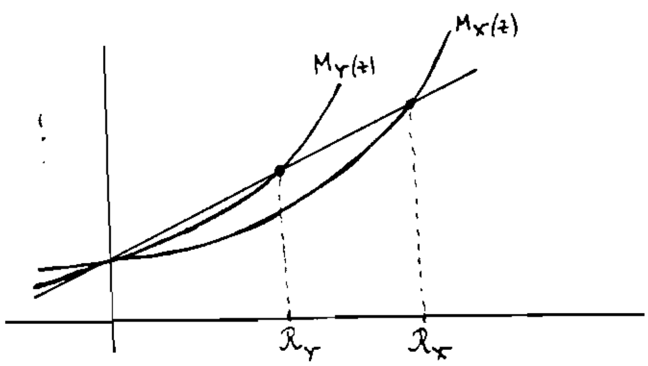


Figura 14: $M_X(z) \leq M_Y(z) \Rightarrow \mathcal{R}_X \geq \mathcal{R}_Y$.

La anterior proposición nos dice que *cuando un riesgo precede a otro en el orden exponencial, la cota de Lundberg del primero es menor que la del segundo.*

Sin embargo, este resultado, tal y como se dijo anteriormente, *no garantiza la ordenación de las probabilidades de ruina.*

2.2.6-OPTIMALIDAD DEL REASEGURO STOP-LOSS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA CEDENTE.

Finalizaremos este capítulo exponiendo una aplicación de la ordenación de riesgos al problema de la determinación del contrato óptimo de reaseguro desde el punto de vista de la cedente (véase [Goovaerts,M., Kaas,R., y otros. 1990] pg68). Para ello empezaremos dando una definición precisa de *contrato de reaseguro* en la forma más general posible.

Considerando un riesgo $X\in\Re$, se denomina *contrato de reaseguro* a toda función

$$\begin{array}{l} I:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longrightarrow I(x) \equiv \text{Riesgo cedido} \end{array}$$

con las siguientes propiedades:

i)Continua,

ii)No decreciente,

iii)I(x) no crece más rápido que x.

Esto último significa que no se puede ceder una cantidad de riesgo mayor que el incremento del propio riesgo. Por tanto cualquier contrato de reaseguro será un elemento del conjunto

$$\Im = \left\{ I(x) / \ I(0)=0, \ 0 \le I'(x) \le 1 \right\}.$$

Ejemplo 2.8: A lo largo del epígrafe 2.2 vimos algunos ejemplos de contratos tales como:

Cuota-parte: $I(x)=\alpha x$, siendo $\alpha\in[0,1]$ fijo.

Stop-loss: $I(x)=(x-M)_+$, siendo $M\ge 0$ fijo.

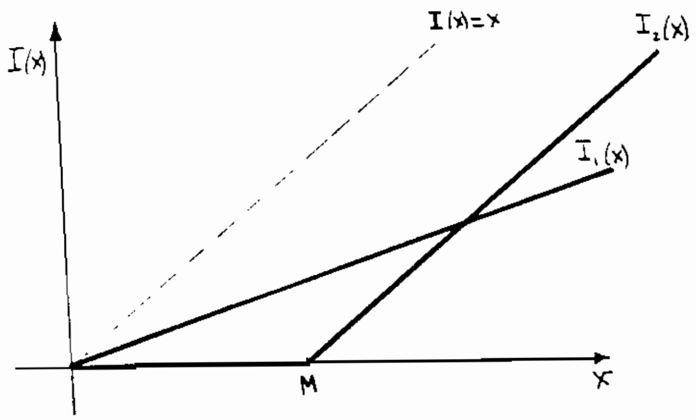


Figura 15: Cesiones Cuota-parte (I_1) y Stop-loss (I_2)

Por otra parte también se supone que el asegurador directo decide previamente la cantidad de dinero que va a gastar en el reaseguro. Suponiendo que la prima de reaseguro se calcula de acuerdo con el principio de la esperanza, el *conjunto factible* de todos los contratos queda reducido a:

$$\mathfrak{I}_\mu = \left\{ I(x) \in \mathfrak{I} / \ E\{I(x)\} = \mu \right\}.$$

A la parte retenida por la cedente la llamaremos Z=X-I(X), y a su función de distribución F_Z.

Desde el punto de vista de la ordenación de riesgos, se puede suponer que la cedente, al reasegurar un riesgo X, pretende de hecho optimizar alguna magnitud asociada al riesgo retenido Z. Por ejemplo, tal y como ya hemos explicado, minimizar la varianza de Z o la probabilidad de ruina resultante.

Por tanto, la elección del contrato de reaseguro se realizará sobre la base de algún *criterio de optimización* $\mathscr{C}$ *referido a la distribución* de Z, $\mathscr{C}(F_Z)$. En definitiva, el esquema general será el siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{OPT } \mathscr{C}(F_Z) \\ \text{s . a: } I \in \mathfrak{I}_\mu . \end{array}$$

Para que el óptimo I_o sea adecuado desde el punto de vista de la ordenación de riesgos, debe ser tal que proporcione un riesgo retenido Z que sea minimal respecto de alguno de los órdenes parciales vistos anteriormente. Es por ello que los criterios de optimización deben ser elegidos de forma que conserven el orden considerado. Las consideraciones del epígrafe anterior hacen que dicho orden sea el de la variabilidad.

<u>Definición</u> <u>1.8:</u> Un criterio de optimización $\mathscr{C}$ *conserva el orden* $\leq_v$ sobre el conjunto $\mathfrak{I}$ si

$\forall I_1, I_2 \in \Im$ llamando: $\begin{cases} Z_1 = X - I_1(X) \\ Z_2 = X - I_2(X) \end{cases}$, se tiene que:

$$Z_1 \leq_v Z_2 \Rightarrow \mathfrak{C}(F_{Z_1}) \leq \mathfrak{C}(F_{Z_2}).$$

Ejemplo 2.9:

Por lo expuesto en el epígrafe anterior, la minimización de la varianza y de la probabilidad de ruina son criterios que preservan el orden de variabilidad.

La *maximización* del coeficiente de ajustamiento también preserva dicho orden, ya que si $X \leq_v Y$, por ser el orden exponencial más débil se tiene que:

$$X \leq_e Y \Rightarrow \mathcal{R}_X \geq \mathcal{R}_y \Rightarrow \text{(Cota de Lundberg de X)} \leq \text{(Cota de Lundberg de Y)}.$$

Llegados a este punto, podemos decir que el objetivo de cualquier cedente consiste en determinar, dentro de un conjunto factible de contratos, el que da lugar al riesgo retenido más pequeño respecto del orden de variabilidad. *Por tanto, y en el caso en que dicho contrato exista, será el preferido por todos los decisores que prefieran un nivel de riqueza cuanto más alto mejor y sean al mismo tiempo aversos al riesgo.*

Recordemos que en las proposiciones 2.1 y 2.5 se daban condiciones de cruce para las funciones de distribución que garantizaban la preferencia en dominancia o en variabilidad de un riesgo sobre otro. Pues bien, el siguiente resultado es del mismo estilo, ya que establece que un corte entre dos contratos es condición suficiente para que una de las partes retenidas sea menos variable que la otra.

Proposición 2.13:

Consideremos un riesgo X y dos contratos $I_1, I_2 \in \Im$ tales que $E\{I_1(x)\} \geq E\{I_2(x)\}$. Sean Z_1, Z_2 los riesgos retenidos. Entonces:

$$\text{Si } \exists x_0 \geq 0 \text{ tal que } \begin{cases} I_1(x) \leq I_2(x), & \forall x \in [0, x_0] \\ I_1(x) \geq I_2(x), & \forall x \in (x_0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow Z_1 \leq_v Z_2.$$

Ejemplo 2.10:

En la figura 15 se puede suponer que los dos contratos (un stop-loss I_2 y un cuota-parte I_1) poseen la misma esperanza: $E\{I_1(x)\}=E\{I_2(x)\}$. $I_2(x)$ e $I_1(x)$ verifican la condición de corte 1.20 y por tanto I_2 produce un riesgo retenido menos variable que el de I_1.

Así pues, tanto la varianza como la probabilidad de ruina de Z_0 serán menores que las de Z_1. Además, el coeficiente de ajustamiento de Z_0 será mayor que el de Z_1.

La situación expuesta en el anterior ejemplo se repetirá siempre que comparemos a un stop-loss con cualquier otro contrato (fijada la media), y demostrando esto se consigue probar el siguiente resultado de optimalidad para dicho contrato.

Proposición 2.14: (Contrato óptimo en $\Im_\mu$)

Para cualquier criterio de optimalidad que preserve el orden de variabilidad, el contrato óptimo de reaseguro perteneciente a $\Im_\mu$ es un stop-loss:

$$I_M(x)=(x\text{-}M)_+, \text{ siendo } M/\ E\{I_M(x)\}=\mu.$$

El resultado es coherente con la experiencia ya que un contrato stop-loss permitiría a la cedente desentenderse por completo de la peligrosidad de su cartera al tener garantizada una cota máxima M para sus indemnizaciones.

Ejemplo 2.11:

Si se busca el óptimo en $\Im$ en vez de en $\Im_\mu$, el resultado será el contrato consistente en cederlo todo, $I(x)=x$, ya que esto es lo mejor cuando la prima de reaseguro no existe. Así pues, los resultados de optimalidad sólo tendrán sentido cuando busquemos en conjuntos del tipo $\Im_\mu$ o en subconjuntos de estos. Esto último es lo que se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.12:

Vamos a considerar un subconjunto de $\Im_\mu$. Tomemos el eje x dividido en tramos arbitrarios. Los contratos de reaseguro de $\Im'_\mu \subset \Im_\mu$ son aquellos en los cuales el reasegurador se hace cargo de una proporción creciente de cada tramo. Con más precisión: $\forall\ M_0,\ldots,M_n \geq 0$ *fijos* tales que $0=M_0<M_1<\ldots<M_n$, definimos:

$$\Im'_\mu = \left\{ I\in\Im_\mu /\ I(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x-M_i)_+ \ ;\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \leq 1,\ \alpha_i \geq 0,\ i=0,\ldots,n \right\}.$$

(Véase la figura 1, página 30)

Entonces se puede probar que para cualquier criterio que conserve el orden de variabilidad, el contrato óptimo es:

$$I_0(x) = \alpha_k (x-M_k)_+ + (1-\alpha_k)(x-M_{k+1})_+ \ ,$$

tomando k de forma que para el contrato stop-loss óptimo

$$I(x)=(x-M)_+$$

se tenga que $M_k<M<M_{k+1}$, y siendo α_k tal que $E\{I_0(X)\}=\mu$.

La figura 16 da una idea de la anterior situación.

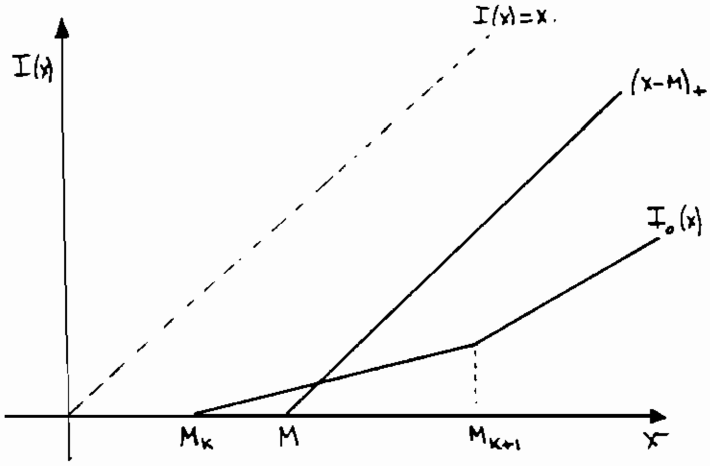


Figura 16:

En la proposición 2.14 se consideraba el riesgo X como el daño total de la cartera y se obtenía entonces un resultado para el reaseguro calculado sobre la anterior variable *daño total*. ¿Qué sucede si se busca el óptimo dentro del subconjunto formado por todos los reaseguros individuales, es decir, aquellos calculados sobre la base X de *las cuantías individuales*? El siguiente resultado establece, tal y como cabía esperar, la optimalidad del contrato excess-loss dentro del anterior subconjunto.

Proposición 2.15: (Reaseguro óptimo individual)

Sea S un riesgo compuesto cuya v.a. de las cuantías individuales es X. Supongamos que los contratos de reaseguro son de la forma

$$T(n,x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=i}^{n} I(x_j) \text{ , con } I \in \Im_{\mu},$$

y siendo n la realización de la v.a. contadora N del número de siniestros. La prima recargada antes de reaseguro es

$$P = (1+\theta)E\{N\}\mu.$$

Entonces, para cualquier criterio de optimización que preserve el orden de variabilidad, el contrato óptimo para la cedente es:

$$T_M = \sum_{j=1}^{n} (x_j - M)_+ \ , \text{ siendo } M / \ E\{(X-M)_+\} = \mu.$$

El anterior resultado es claro si tenemos en cuenta que:

-Para una cuantía individual X el óptimo es un stop-loss.

-El orden de variabilidad es invariante por composición (proposición 2.8).

En resumen, concluímos que *desde el punto de vista de la cedente y para una prima fija de antemano, el mejor contrato de reaseguro es siempre de tipo no proporcional (stop-loss o excess-loss)*. Sin embargo, en la práctica raramente se observan estos tipos "puros" de reaseguro, ya que es necesario contar también con el punto de vista del aceptante.

En los tres capítulos restantes cambiamos nuestro enfoque y pasamos a estudiar la fijación de las cuotas y plenos óptimos desde el punto de vista de la cedente, cuando se conoce el tipo de reaseguro pero no se ha fijado aún la prima a pagar por él.

CAPITULO 3: REASEGURO CUOTA-PARTE.

3.1-INTRODUCCION. HIPOTESIS BASICAS.

Comenzaremos analizando la toma de decisiones en reaseguro en la modalidad cuota-parte y, como ya indicamos anteriormente, desde el punto de vista de la cedente y en el caso de varias subcarteras.

Las hipótesis de partida son las siguientes:

** La cartera total se encuentra dividida en k subcarteras y para cada una de ellas se ha decidido previamente reasegurar en la modalidad cuota-parte. Queda, por tanto, determinar la cuota de reaseguro a aplicar a cada subcartera.

** Supondremos que la siniestralidad total anual de cada subcartera sigue la distribución normal o bien una distribución de Poisson Compuesta aproximada por una normal (proposición 1.2). Esta hipótesis, junto a la de aversión al riesgo del decisor, nos permite justificar un modelo de decisión media-varianza en el marco de la Teoría de la Utilidad y por ello de la toma de decisiones racionales (véase el epígrafe 2.1.4).

** El modelo básico de decisión será pues el clásico media-varianza, que se formaliza matemáticamente mediante un programa multiobjetivo. Se trata de maximizar las reservas esperadas después de reaseguro (o lo que es equivalente, el beneficio esperado después de reaseguro) minimizando la varianza de las mismas (o, en forma equivalente, del beneficio o de la siniestralidad después de reaseguro).

** En cuanto al primer objetivo (en general maximización del beneficio), hemos de indicar que siendo conscientes de que el beneficio esperado después de reaseguro depende en gran medida de las claúsulas del correspondiente tratado relativas a primas de reaseguro, comisiones, participación en beneficios, depósito de reaseguro etc, en nuestro modelo hemos tenido que realizar algunas simplificaciones que conducen, en todo caso, a aceptar que el beneficio esperado después de reaseguro es directamente proporcional a la cuota de reaseguro ($B_{ir} = K.a_i$).

Podemos razonar suponiendo que:

a) Tanto primas comerciales como siniestros se reparten en función de la cuota de reaseguro. Esto es:

Si P_i''son las primas comerciales de la subcartera i, a_iP_i'' quedan en poder de la cedente y $(1-a_i)P_i''$ en poder de la aceptante.

b) Los recargos para gastos comerciales que quedan en poder de la cedente (más otros posibles ingresos como la comisión de reaseguro) cubren exactamente los gastos de gestión.

Si esto es así, quedan en poder del asegurador directo para hacer frente a los siniestros $a_i(1+\theta)P_i$; por tanto, ya que $a_iE(X_i)=a_iP_i$ es la siniestralidad esperada después de reaseguro, el beneficio esperado después de reaseguro queda

$$B_{ir} = a_i(1+\theta)P_i - a_iP_i = a_i\theta P_i = a_iB_i$$

Así las reservas esperadas después de reaseguro serán:

$$s_o + a_1B_1 + \ldots + a_kB_k$$

** En cuanto al segundo objetivo (en general minimización del riesgo) hemos de indicar que hemos elegido inicialmente como medida del riesgo la varianza de las reservas después de reaseguro, que al ser equivalente a la varianza de la siniestralidad total después de reaseguro, se puede formular como

$$\sigma_1^2a_1^2+\ldots\ldots+\sigma_k^2a_k^2$$

** Como ya indicamos en los preliminares, la resolución de un programa multiobjetivo lleva a la localización de los denominados óptimos de Pareto (aquellos puntos factibles para los cuales no existe otro que mejora simultáneamente los dos objetivos).

Se plantea el problema de elegir una de dichas soluciones. Con el citado fin daremos entrada a la probabilidad de ruina como medida de solvencia característica y plenamente aceptada en la literatura actuarial. Fijada la probabilidad de ruina que el decisor está dispuesto a asumir, podrá determinarse la solución final o al menos qué óptimos de Pareto son incompatibles con esta restricción adicional.

** Finalmente hemos de indicar que resolveremos en primer lugar el problema asumiendo la hipótesis de independencia de las siniestralidades de las subcarteras, y que después eliminaremos esta hipótesis dando una solución más general al mismo.

3.2.-PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN. CASO DE INDEPENDENCIA.

Teniendo en cuenta lo indicado en la introducción, nuestro programa puede plantearse en la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Máx.} & B_1a_1+\ldots\ldots+B_ka_k \\ \text{Mín.} & \sigma_1^2a_1^2+\ldots\ldots+\sigma_k^2a_k^2 \\ \text{s.a} & \left.\begin{array}{l} 0\le a_1 \le 1 \\ \ldots\ldots \\ 0\le a_k \le 1 \end{array}\right\} \end{array} \qquad (1)$$

o de forma equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{Mín.} & -B_1a_1-\ldots\ldots-B_ka_k \\ \text{Mín.} & \sigma_1^2a_1^2+\ldots\ldots+\sigma_k^2a_k^2 \\ \text{s.a} & \left.\begin{array}{l} 0\le a_1 \le 1 \\ \ldots\ldots \\ 0\le a_k \le 1 \end{array}\right\} \end{array}$$

Es fácil justificar la convexidad de este programa . El conjunto factible es elementalmente convexo (intersección de semiespacios cerrados). Además la función que define el primer objetivo es lineal (cóncava y convexa a la vez) y la que define el segundo objetivo es convexa.

Para la resolución de este programa emplearemos la técnica de escalarización, a la que nos hemos referido en los preliminares de este trabajo. Así, ponderando por $\alpha \in [0,1]$ el segundo objetivo y por $(1-\alpha)$ el primero, resolveremos el siguiente programa que nos proporcionará los óptimos de Pareto del anterior:

$$\text{Mín} \sum_{1}^{k} (\alpha\sigma_i^2 a_i^2 + \alpha B_i a_i - B_i a_i)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{s.a} & 0 \leq a_1 \leq 1 \\ & \quad \cdots\cdots \\ & 0 \leq a_k \leq 1 \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

La resolución de éste es equivalente a la de los k siguientes programas de un solo objetivo:

$$\begin{array}{l} \text{Min } (\alpha\sigma_i^2 a_i^2 + \alpha B_i a_i - B_i a_i) \\ \text{s.a.} \quad 0 \leq a_i \leq 1 \end{array} \qquad \text{(III)}$$

$$(i=1,\ldots,k)$$

Cada uno de estos k programas es convexo ya que el conjunto factible es elementalmente convexo (es un intervalo cerrado) y la función objetivo

$$f(a_i) = \alpha\sigma_i^2 a_i^2 + \alpha B_i a_i - B_i a_i$$

es convexa ya que su derivada segunda es

$$f''(a_i) = 2\alpha\sigma_i^2 > 0 \quad \forall a_i \in [0,1]$$

Por tanto, las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias y suficientes de mínimo global. Así, los mínimos globales del programa serán aquellos valores de a_i que verifiquen:

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha\sigma_i^2 a_i + \alpha B_i - B_i - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 a_i = 0 \\ \lambda_2 (a_i - 1) = 0 \end{array}\right\}$$

siendo además $0 \le a_i \le 1$ y $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$.

Parece claro que los valores obtenidos de a_i dependan del valor de α. La resolución del mismo, algo engorrosa, puede encontrarse en Heras (1989) y en resumen supone que:

a) si $\alpha \in [0,\ B_i/(2\sigma_i^2+B_i)]$, entonces la solución de (III) es $a_i=1$.

b) si $\alpha \in [B_i/(2\sigma_i^2+B_i),\ 1]$, entonces la solución de (III) es $a_i=(1-\alpha)B_i/2\alpha\sigma_i^2$.

c) si $\alpha=1$, entonces $a_i=0$ es la solución de (III).

Utilizando este resultado para resolver el programa (I), llamemos

$$R_i = \frac{B_i}{2\sigma_i^2 + B_i} \qquad i=1,2,\ldots,k$$

Ordenemos a continuación los R_i de tal forma que:

$$0 \le R_1 \le R_2 \le \ldots\ldots \le R_k \le 1$$

tendremos entonces que según los valores de α:

a) Si $0 \le \alpha \le R_1$, entonces el punto $(1,1,\ldots,1)$ es solución del programa (II) y por tanto un óptimo de Pareto del programa (I).

b) Si $R_1 < \alpha \le R_2$, entonces el punto

$$((1-\alpha)B_1/2\alpha\sigma_1^2, 1, 1, \ldots, 1)$$

es solución del programa (II) y, por tanto, un óptimo de Pareto del programa (I).

Asimismo si $R_2 < \alpha \le R_3$, entonces el punto

$$((1-\alpha)B_1/2\alpha\sigma_1^2,(1-\alpha)B_2/2\alpha\sigma_2^2\ ,1,\dots,1)$$

es solución del programa (II) y, por tanto, un óptimo de Pareto del programa (I).

Y en el caso de que $R_k < \alpha < 1$ entonces el punto

$$((1-\alpha)B_1/2\alpha\sigma_1^2,(1-\alpha)B_2/2\alpha\sigma_2^2,\dots,(1-\alpha)B_k/2\alpha\sigma_k^2)$$

es un solución del programa (II) y por tanto un óptimo de Pareto del programa (I).

c) Finalmente si $\alpha=1$ el punto (0,0,..,0) es solución del programa (II) y por tanto un óptimo de Pareto del programa (I).

Estas soluciones coinciden con las obtenidas por De Finetti, si bien aquí han sido obtenidas de una forma más directa.

Queda abierto el problema de seleccionar una de las soluciones encontradas. En este punto recurriremos a la probabilidad de ruina. En el ejemplo que estudiaremos más adelante se indicará la forma de hacerlo.

3.3-GENERALIZACIÓN AL CASO DE DEPENDENCIA DE LA SINIESTRALIDADES.

Abandonaremos ahora la hipótesis de independencia entre las siniestralidades de las k subcarteras, pero seguiremos aceptando la normalidad de las mismas lo que nos permite continuar situando nuestra toma de decisiones en el marco de la Teoría de la Utilidad.

Supondremos k subcarteras con siniestralidades $X_1,\dots,X_k$ cuya distribución conjunta $(X_1,\dots,X_k)$ es normal multivariante $N(\mu,\mathbb{V})$ donde $\mathbb{V}$ es la matriz de las covarianzas (simétrica y definida positiva).

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \dots \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \dots \sigma_{2k} \\ & \dots\dots\dots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} \dots \sigma_k^2 \end{pmatrix}$$

Cada una de las siniestralidades marginales X_i será $N(\mu_i,\sigma_i^2)$ y la siniestralidad total $X=X_1+...+X_k$ será también normal $N(\mu,\sigma^2)$ siendo:

$$\mu = \sum_1^k \mu_i, \quad y \quad \sigma^2 = \sum_1^k \sigma_i^2 + \sum_{i\neq j} \sigma_{ij}$$

Asimismo, después de reaseguro, la siniestralidad total será también normal $N(\mu_r,\sigma_r^2)$ con

$$\mu = \sum_1^k a_i\mu_i, \quad y \quad \sigma^2 = \sum_1^k a_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i\neq j} a_i a_j \sigma_{ij}$$

Nuestro programa de optimización queda ahora:

$$\begin{array}{ll} \text{Máx} & \mathbf{a.B} \\ \text{Mín} & \mathbf{a}^t.\mathbb{V}.\mathbf{a} \end{array}$$

$$\text{s.a. } \mathbf{0} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{1}$$

en el que

$$\mathbf{a.B} = \sum_1^k a_1\theta_i \mu_i \quad y \quad \mathbf{a}^t.\mathbb{V}.\mathbf{a} = \sum_1^k a_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i\neq j} a_i a_j \sigma_{ij}$$

Es fácil justificar que este programa es convexo. El conjunto factible lo es elementalmente y además la función que define el primer objetivo es lineal (cóncava y convexa a la vez) y la que define el segundo objetivo es convexa (es una forma cuadrática definida positiva).

Recurriendo a la técnica de escalarización, los óptimos de Pareto de este programa se pueden obtener al resolver el programa de un solo objetivo

$$\text{Min} \quad \alpha(\mathbf{a}^t.\mathbb{V}.\mathbf{a}) - (1-\alpha)\mathbf{a}.\mathbf{B}$$
$$\text{s.a.} \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{1}$$

en el que $\alpha\in[0,1]$.

Ya que el programa es convexo los mínimos globales del mismo serán aquellos puntos que cumplan las condiciones de Kuhn-Tucker, esto es, que veriquen el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 2\alpha.\mathbb{V}.\mathbf{a} - (1-\alpha).\mathbf{B} + \lambda_1 - \lambda_2 = \mathbf{0} & \\ \lambda_1^i(a_i \ -1) = 0 & i=1,\ldots,k \\ \lambda_2^i.a_i = 0 & i=1,\ldots,k \end{array}\right\}$$

cumpliendo además $0\leq a_i\leq 1$ $i=1,..,k$ y $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$.

Su solución, única y global, es

$$\mathbf{a} = \frac{1-\alpha}{2\alpha}.\mathbb{V}^{-1}.\mathbf{B}$$

Observación.- Es importante hacer notar que este resultado generaliza el obtenido para el caso de independencia. Notemos que en este último

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_k^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{\sigma_k^2} \end{pmatrix}$$

3.4-<u>UN EJEMPLO.</u>

Consideremos una empresa aseguradora cuya cartera total se encuentra dividida en dos subcarteras cuya distribución de siniestralidad total anual es de Poisson Compuesta, esto es,

$$F_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(n)\, V_i^{*n}(x) \quad i=1,2$$

siendo

$$P_i(n) = \frac{\lambda_i^n}{n!}\, e^{-\lambda_i} \quad (\lambda_i > 0)$$

con las siguientes características:

	subcart. 1	subcart.2
λ_i	60	40
c_{1i}	4	2
c_{2i}	29,4	12,1
σ_i^2	1764	484
θ_i	0,1	0,05
P_i	240	80
B_i	24	4

Tabla 1

donde, y siempre para la cartera i, λ_i representa el numero esperado de siniestros (paramétro de Poisson) , c_{1i} y c_{2i} los momentos de orden 1 y 2 respecto al origen de la cuantía de un siniestro, σ_i^2 $(=\lambda_i.c_{2i})$ la varianza de la siniestralidad total, θ_i el reargo de seguridad, $P_i(=\lambda_i.c_{1i})$ la prima pura o esperanza matemática de la siniestralidad total y B_i $(=\theta_i.P_i)$ el beneficio esperado.

Supondremos además la independencia de las siniestralidades de ambas carteras y la bondad de la aproximación normal.

El programa es, en este caso,

$$
\begin{array}{l}
\text{Máx.} \quad B_1a_1+B_2a_2 \\
\text{Mín.} \quad \sigma_1^2a_1^2+\sigma_2^2a_2^2 \\
\text{s.a} \quad \left.\begin{array}{l} 0\leq a_1\leq 1 \\ 0\leq a_2\leq 1 \end{array}\right\}
\end{array}
$$

que para nuestros datos en concreto se convierte en

$$
\begin{array}{l}
\text{Máx.} \quad 24a_1+\ 4a_2 \\
\text{Mín.}\, 1764a_1^2+484a_2^2 \\
\text{s.a} \quad \left.\begin{array}{l} 0\leq a_1\leq 1 \\ 0\leq a_2\leq 1 \end{array}\right\}
\end{array} \qquad (\&)
$$

Recordando lo indicado en (3.2) es fácil obtener los óptimos de Pareto de este programa. Basta resolver para cada valor de $\alpha\in[0,1]$ el programa de un objetivo

$$
\begin{array}{l}
\text{Mín} \quad \sum_{i=1}^{2}(\alpha\sigma_i^2a_i^2 + \alpha B_i a_i - B_i a_i) \\
\text{s.a} \quad 0\leq a_1 \leq 1 \\
\qquad\ \ 0\leq a_2 \leq 1
\end{array}
$$

Calculando

$$R_i = \frac{B_i}{2\sigma_i^2 + B_i} \qquad i=1,2$$

tenemos $R_1 = 0{,}00676$ y $R_2 = 0{,}00411$, por lo que los óptimos de Pareto son:

** Si $0 \leq \alpha < R_1, R_2$, entonces (1,1) es la solución de (&).

** Si $R_2 < \alpha \leq R_1$, entonces $(1,(1-\alpha)B_2/2\alpha\sigma_2^2) = (1,\ 0{,}00413(1-\alpha)/\alpha)$ es la solución de (&).

** Si $R_2 \leq R_1 \leq \alpha < 1$, entonces $((1-\alpha)B_1/2\alpha\sigma_1^2, (1-\alpha)B_2/2\alpha\sigma_2^2) =$

$= (0{,}0068(1-\alpha)/\alpha, 0{,}00413(1-\alpha)/\alpha)$ es la solución de (&).

** Si $\alpha = 1$, entonces (0,0) es la solución de (&).

Representemos gráficamente las soluciones del programa (&), que estarán determinadas por:

** Si $0{,}00676 \leq \alpha < 1$ los valores de a_1 y a_2 vienen dados por $(a_1, a_2) = ((1-\alpha)B_1/2\alpha\sigma_1^2, (1-\alpha)B_2/2\alpha\sigma_2^2)$, esto es,

$$a_1 = \frac{(1-\alpha).24}{\alpha.2.1764} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}.0{,}0068$$

$$a_2 = \frac{(1-\alpha).4}{\alpha.2.484} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}.0{,}00806$$

de donde de forma elemental

$$a_2 = 0{,}607438.a_1$$

** Si $0{,}00411 < \alpha \leq 0{,}00676$, entonces

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\ .0{,}00806$$

** Si $0 \leq \alpha < 0{,}00411$, entonces (1,1) es la solución de (&).

** Si $\alpha = 1$, entonces (0,0) es la solución de (&).

Tenemos elementalmente la siguiente gráfica:

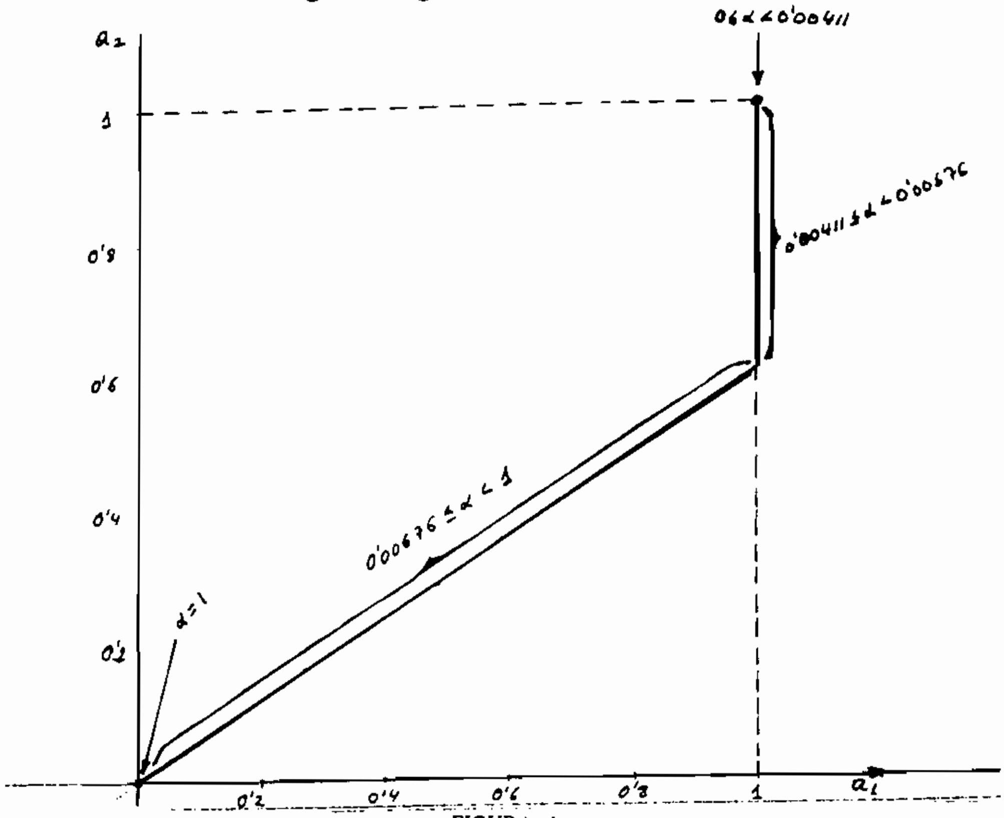


FIGURA 1

OPTIMOS DE PARETO

Representemos a continuación la linea de eficiencia que no es más que las imágenes de los óptimos de Pareto encontrados anteriormente por la función

$$(B_r,\sigma_r^2) = f(a_1,a_2) = (24a_1+4a_2, 1764a_1^2+484a_2^2)$$

** Si $0{,}00676 \leq \alpha < 1$ teniendo en cuenta las siguentes relaciones:

$$B_r = 24a_1+4a_2$$

$$\sigma_r^2 = 1764a_1^2+484a_2^2$$

$$a_2 = 0{,}607438.a_1$$

se tiene de forma elemental

$$B_r = 0{,}59977\sqrt{\sigma_r^2}$$

** Si $0{,}00411 < \alpha \leq 0{,}00676$, de

$$B_r = 24a_1+4a_2$$

$$\sigma_r^2 = 1764a_1^2+484a_2^2$$

$$a_1 = 1$$

se tiene la siguiente relación

$$B_r = 24 + 4\sqrt{\frac{\sigma_r^2 - 1764}{482}}$$

** Si $0 \leq \alpha < 0{,}00411$, entonces

$$(B_r,\sigma_r^2) = (28{,}2248)$$

** Si $\alpha=1$, entonces (0,0) es la solución de (&).

$$(B_r,\sigma_r^2)= (0,0)$$

También podría haberse expresado la linea eficiente directamente en función de α. Así,

** Si $0,00676 \leq\alpha<1$

$$B_r=24a_1+4a_2$$
$$\sigma_r^2 =1764a_1^2+484a_2^2$$
$$a_1= \frac{(1-\alpha)}{\alpha} .0,0068$$
$$a_2 = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}.0,00806$$

** Si $0,00411<\alpha\leq 0,00676$, de

$$B_r=24a_1+4a_2$$
$$\sigma_r^2 =1764a_1^2+484a_2^2$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 =\frac{(1-\alpha)}{\alpha}.0,00806$$

sustituyendo a_1 y a_2 obtenemos las correspondientes relaciones en función de α.

En cualquier caso la representación gráfica de la linea de eficiencia es

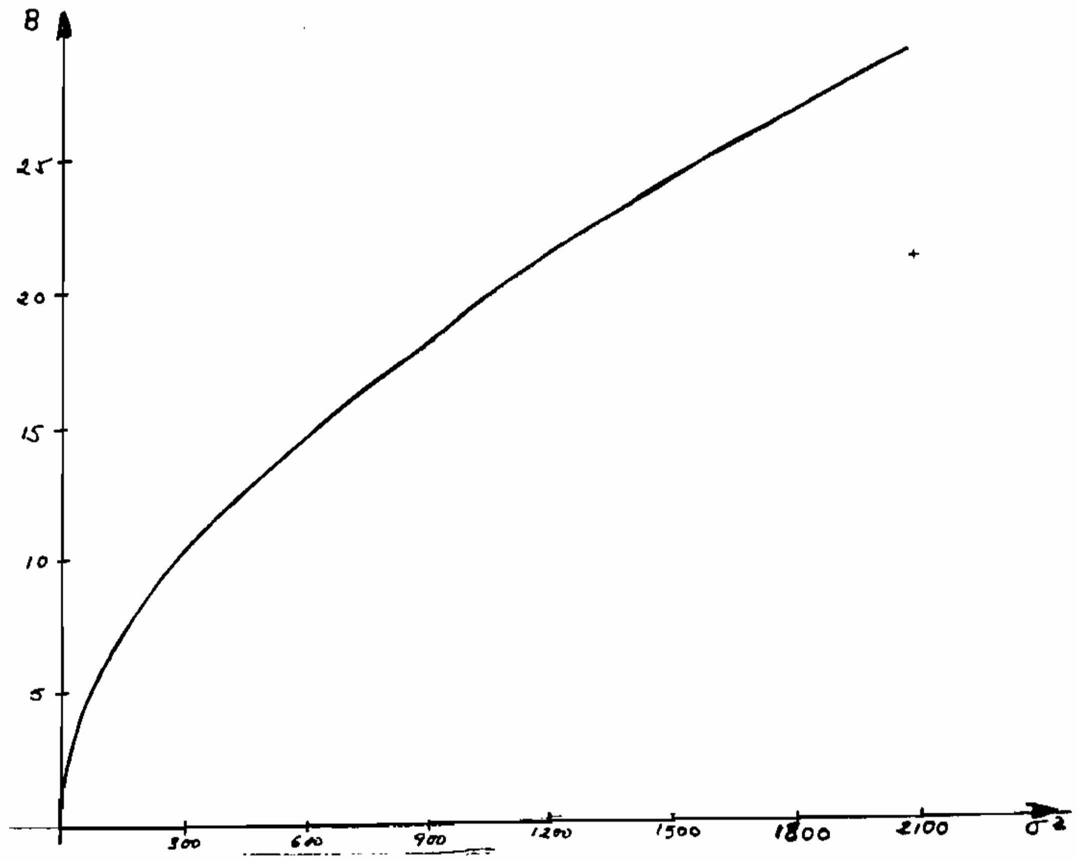


Figura 2

LINEA EFICIENTE

Hemos ahora de escoger uno de entre todos los óptimos de Pareto encontrados. Para ello emplearemos, tal y como justificamos en la introducción, el criterio de la probabilidad de ruina.

Hemos de añadir un nuevo dato: la cuantía de las reservas de solvencia. Supongamos que $s_0 = 20$.

Consideraremos dos posibilidades: la probabilidad de ruina para tiempo finito (un año) y la probabilidad de ruina en tiempo infinito.

a) *PROBABILIDAD DE RUINA EN TIEMPO FINITO (UN AÑO).*

Aceptando la distribución normal y recordando que estamos bajo la hipótesis de independencia, tenemos que la siniestralidad de la cartera total, antes de reaseguro, será normal

$$N(320,\sqrt{2258})$$

y después de reaseguro será también normal

$$N(240a_1+80a_2,\sqrt{1764a_1^2+484a_2^2})$$

Llamando ε a la probabilidad de ruina a un año, la probabilidad de ruina antes de reaseguro será

$$P(X > s_0 + (1+\theta_1)P_1+(1+\theta_2)P_2)$$

donde $P_1= E(X_1)$ y $P_2= E(X_2)$

y después de reaseguro

$$P(X_r > s_0 + a_1(1+\theta_1)P_1+a_2(1+\theta_2)P_2)$$

restando la esperanza matemática y dividiendo por la desviación típica tenemos,

$$P\left(\frac{X_r-a_1P_1-a_2P_2}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2}} > \frac{s_0+ a_1\theta_1P_1+a_2\theta_2P_2}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2}}\right)=\varepsilon$$

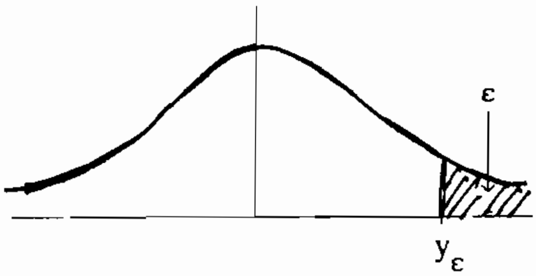
esto es

$$P\left(Z > \frac{s_0+ a_1\theta_1P_1+a_2\theta_2P_2}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2}}\right)=\varepsilon$$

con

$$Z = \frac{X_r - a_1 P_1 - a_2 P_2}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2}} \quad N(0,1)$$

En las tablas de la normal de parámetros 0 y 1, se puede encontrar el y_ε correspondiente a la probabilidad de ruina ε



Finalmente en la expresión

$$\frac{s_0 + a_1\theta_1 P_1 + a_2\theta_2 P_2}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2}} = y_\varepsilon$$

tenemos (para ε fijo) implícitamente determinada la relación que debe existir entre las cuotas de reaseguro a_1 y a_2 de las dos subcarteras para las que la cartera total tiene esa probabilidad de ruina.

Para los datos de nuestro ejemplo, tenemos

$$\frac{20 + 24a_1 + 4a_2}{\sqrt{1764a_1^2 + 484a_2^2}} = y_\varepsilon$$

así para $y_{0.01}$=2,3263 e $y_{0.02}$=2,0537, en la siguiente figura tenemos representadas las curvas de "iso-ruina" junto al conjunto de los óptimos de Pareto.

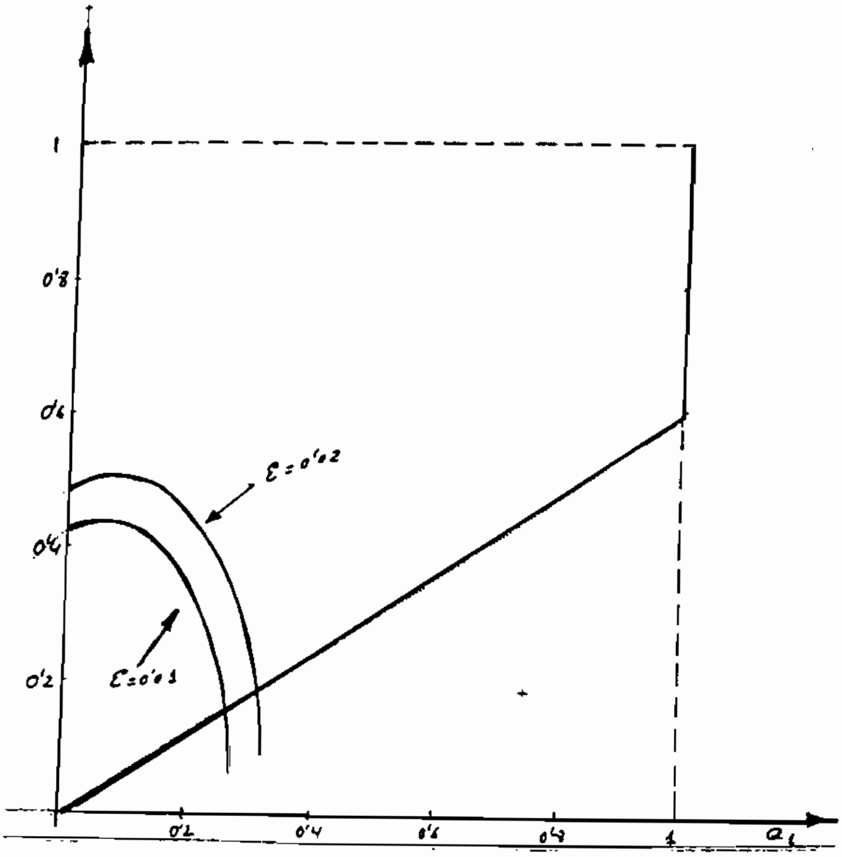


Figura 3

El óptimo de Pareto seleccionado en cada caso, será la solución de los siguientes sistemas:

$$\frac{20+24a_1+4a_2}{\sqrt{1764a_1^2+484a_2^2}} = 2,3263$$

$$a_2 = 0,607438.a_1$$

y

$$\frac{20+24a_1+4a_2}{\sqrt{1764a_1^2+484a_2^2}}=2,0537$$

$$a_2 = 0,607438.a_1$$

esto es,

$a_1=0,26$ y $a_2= 0,15$ para una probabilidad de ruina de 0.01 y

$a_1=0,31$ y $a_2= 0,18$ para una probabilidad de ruina de 0.02.

b) *PROBABILIDAD DE RUINA EN TIEMPO INFINITO.*

Para considerar como criterio de estabilidad la probabilidad de ruina en tiempo infinito tomaremos la desigualdad de Lundberg:

$$\Psi(s_0) \le e^{-\mathcal{R}s_0}, \quad s_0 \ge 0$$

donde con una aproximación de primer orden el valor de $\mathcal{R}$ (coeficiente de ajustamiento) viene dado por (véase la proposición 1.5)

$$\mathcal{R} \simeq \frac{2\theta c_1}{c_2}.$$

(consideraremos ahora la igualdad para realizar los cálculos).

Es fácil comprobar que con varias subcarteras y reaseguro cuota-parte, el valor de $\mathcal{R}$ es

$$\mathcal{R} \cong \frac{\sum_1^k \lambda_i \theta_i a_i c_{1i}}{\sum_1^k \lambda_i a_i^2 c_{2i}} \qquad (*)$$

y si sustituímos los valores de los óptimos de Pareto

$$a_i = \frac{(1-\alpha)B_i}{2\alpha\sigma_i^2}$$

que en el caso de la distribución de Poisson Compuesta son

$$a_i = \frac{(1-\alpha)\theta_i \lambda_i c_{1i}}{2\alpha\lambda_i c_{2i}} = \frac{(1-\alpha)\theta_i c_{1i}}{2\alpha . c_{2i}}$$

que sustituidos en (*) dan

$$\mathcal{R} \cong \frac{4\alpha}{(1-\alpha)} \qquad (**)$$

Por tanto, fijada la máxima probabilidad de ruina admisible ε

$$\Psi(s_0) \leq e^{-\mathcal{R}s_0} = \varepsilon$$

se tiene elementalmente

$$\mathcal{R} = \frac{-\mathrm{Log}(\varepsilon)}{s_0}$$

y de (**) se puede despejar el correspondiente valor de α que nos selecciona el óptimo de Pareto.

Así hemos obtenido una relación importante entre la máxima probabilidad de ruina aceptable por el decisor y la ponderación que da a cada uno de los objetivos.

Retomemos ahora nuestro ejemplo numérico. Para una probabilidad de ruina $\varepsilon = 0.02$ y unas reservas de solvencia de 20

$$\mathcal{R} = \frac{-\mathrm{Log}(0.02)}{20} = 0.1956$$

y de

$$\frac{4\alpha}{(1-\alpha)} = 0,1956$$

se tiene que $\alpha = 0.0466$, que sustituido en

$$a_i = \frac{(1-\alpha)B_i}{2\alpha\sigma_i^2}.$$

nos da elementalmente

$$a_1 = 0,1391$$

$$a_2 = 0,0845$$

esto es, una retención bastante inferior al caso de la probabilidad de ruina a un año.

También es posible realizar un estudio similar al realizado en el caso de la probabilidad de ruina a un año. Así fijados Ψ y s_0, la expresión

$$\Psi \cong e^{-\frac{2\lambda_1\theta_1 a_1 c_{11} + 2\lambda_2\theta_2 c_{12}}{\lambda_1 a_1^2 c_{21} + \lambda_2 a_2^2 c_{22}} . s_0}$$

en nuestro caso

$$\Psi \cong e^{-\frac{48a_1 + 8a_2}{1764a_1^2 + 844a_2^2} . s_0}$$

nos relaciona implícitamente los valores de a_1 y a_2 que nos dan la citada probabilidad de ruina.

Por tanto la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} \Psi = e^{-\frac{48a_1 + 8a_2}{1764a_1^2 + 844a_2^2} . s_0} \\ \\ a_2 = 0,607438 . a_1 \end{array}\right\}$$

nos proporciona la solución óptima buscada.

Por ejemplo, para $\Psi = 0.02$ y $s_0=20$ se tiene

$$a_1 = 0.139$$
$$a_2 = 0.084$$

y para $\Psi = 0.02$ y $s_0=40$ tendremos

$$a_1 = 0.279$$
$$a_2 = 0.169.$$

Es claro que habríamos llegado al mismo resultado con el procedimiento anterior.

En la siguiente figura se representan las curvas "iso-ruina" y su intersección con la curva de los óptimos de Pareto del programa multiobjetivo inicial.

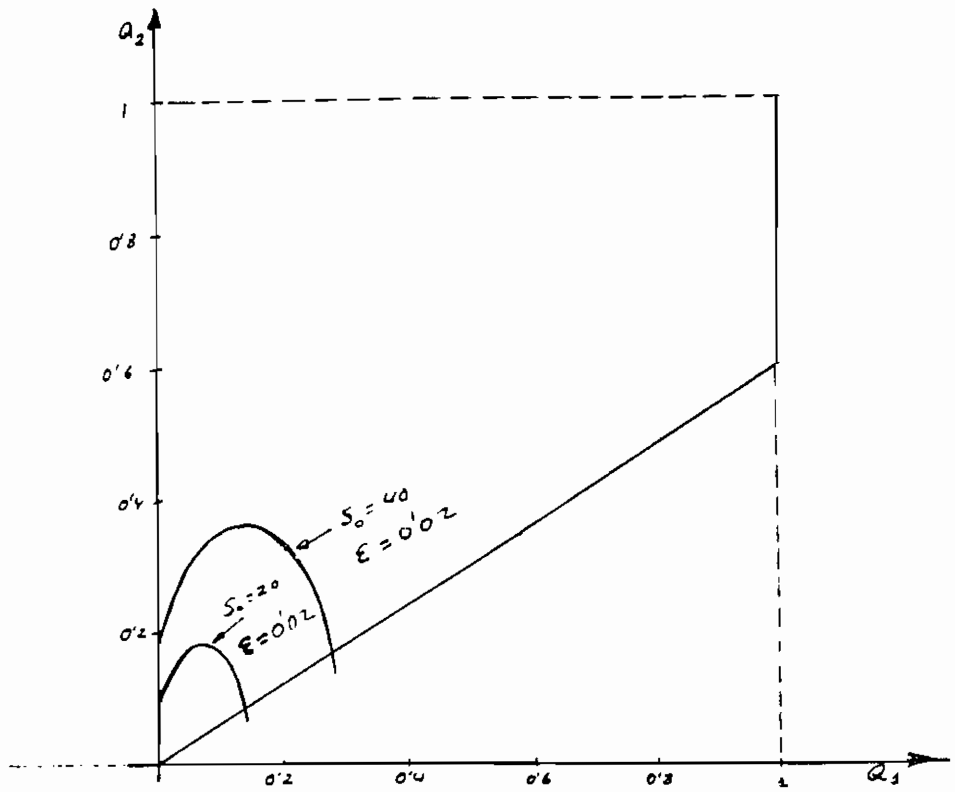


Figura 4

CAPITULO 4. REASEGURO EXCESS-LOSS.

Recordemos de capítulos anteriores que el *Reaseguro Excess-Loss* (o reaseguro X-L) se caracteriza porque la reaseguradora se hace cargo del pago de la cuantía de cada siniestro que exceda de una cantidad prefijada M. La cantidad M se conoce como *la prioridad* o *pleno de retención*. De esta forma, la siniestralidad individual retenida por la cedente después de un reaseguro Excess-Loss con pleno M será

$$x_M = \begin{cases} x \ , \text{ si } x < M \\ M \ , \text{ si } x \geq M \end{cases}$$

(siendo x y x_M la siniestralidad individual antes y después de reaseguro, respectivamente).

Si denotamos por V(x) a la función de distribución de la siniestralidad individual antes de reaseguro, después de un reaseguro Excess-Loss tendremos la nueva función de distribución

$$V_M(x) = \begin{cases} V(x) & , \text{ si } x < M \\ 1 & , \text{ si } x \geq M \end{cases}$$

Obsérvese que la función de distribución después de reaseguro tiene un salto de amplitud 1-V(M) en el punto M.

Los dos primeros momentos de x_M ,a los que llamaremos $p_1(M)$ y $p_2(M)$, se calculan fácilmente integrando por partes :

$$p_1(M) = E(x_M) = \int_0^\infty x \, dV_M(x) = \int_0^M x \, dV(x) + M(1-V(M)) = \int_0^M (1-V(x))dx$$

$$p_2(M) = E(x_M^2) = \int_0^\infty x^2 dV_M(x) = \int_0^M x^2 dV(x) + M^2(1-V(M)) = M^2 - 2\int_0^M xV(x)dx$$

De ahora en adelante supondremos que la siniestralidad total se distribuye según una distribución *Poisson Compuesta.* Recordemos que la siniestralidad total se distribuye como una Poisson Compuesta cuando el número de siniestros es Poisson y los siniestros individuales están idénticamente distribuídos y son independientes entre sí y también del número de siniestros. En tal caso, la media y la varianza de la siniestralidad total después de reaseguro s_M serán (véase el epígrafe 1.1.1):

$$E(s_M) = \lambda \, p_1(M) \quad , \quad Var(s_M) = \lambda \, p_2(M)$$

siendo λ la esperanza del número de siniestros.

En adelante supondremos también que la prima de reaseguro se calcula mediante el *principio de la esperanza* : la prima se define como el valor medio de la siniestralidad cedida, recargado con un porcentaje de dicho valor medio (el *recargo de reaseguro*) que nosotros supondremos igual al recargo de seguridad ϑ de la cedente. De esta forma, las primas ingresadas por la cedente después de reaseguro serán iguales a

$$P(M) = (1+\vartheta)E(s_M).$$

En este apartado estudiaremos el problema de la fijación de los plenos óptimos cuando varias subcarteras independientes se reaseguran mediante reaseguros de tipo Excess-Loss. Puesto que el reaseguro reduce el riesgo de la cartera a costa de una disminución de los ingresos por primas, la "optimalidad" del reaseguro se debe entender en el sentido multiobjetivo, como un compromiso entre el beneficio y el riesgo. Como de costumbre, como medida del beneficio utilizaremos la esperanza de las reservas después de reaseguro. Asimismo usaremos la varianza de dichas reservas como medida del riesgo de la cartera. La elección de la varianza como medida del riesgo está justificada cuando el número de siniestros es elevado: en efecto, la Proposición 1.2 del Capítulo Primero establecía que la distribución Poisson Compuesta converge a una distribución normal cuando el número medio de siniestros tiende a infinito; en consecuencia, carteras con un elevado número de siniestros tendrán una siniestralidad total (y unas reservas) con distribución aproximadamente normal; finalmente, en el apartado 2.1.4 se comprobó que la maximización de la utilidad de todo decisor racional enfrentado a alternativas inciertas (en nuestro caso, las reservas después de reaseguro) normalmente distribuídas, se reduce a la maximización de la media y la minimización de la varianza de dicha distribución normal.

Si la cartera total está dividida en k subcarteras independientes y homogéneas, en cada una de las cuales la siniestralidad es Poisson Compuesta, y reaseguramos cada una de ellas mediante reaseguros de tipo Excess-Loss con plenos M_1 ,..., M_k , las reservas después de reaseguro serán

$$R(M_1,\dots,M_k) = S_0 + \sum_1^k P_i(M_i) - \sum_1^k s^i_{M_i} = S_0 + \sum_1^k (1+\vartheta_i)E(s^i_{M_i}) - \sum_1^k s^i_{M_i}$$

siendo S_0 las reservas iniciales de la empresa, ϑ_i el recargo de seguridad de la i-ésima subcartera, $P_i(M_i)$ las primas ingresadas en la i-ésima subcartera después de reaseguro y $s^i_{M_i}$ la siniestralidad total de dicha subcartera después de reaseguro.

En consecuencia, la media y varianza de las reservas serán

$$E\left[R(M_1,\dots,M_k)\right] = S_0 + \sum_1^k \vartheta_i E(s^i_{M_i}) = S_0 + \sum_1^k \vartheta_i \lambda_i p^i_1(M_i)$$

$$Var\left[R(M_1,\dots,M_k)\right] = Var\left(\sum_1^k s^i_{M_i} \right) = \sum_1^k Var\left[s^i_{M_i}\right] = \sum_1^k \lambda_i p^i_2(M_i)$$

Como hemos comentado anteriormente, si el número medio total de siniestros es grande, los plenos óptimos deben ser soluciones de Pareto del siguiente programa multiobjetivo :

$$\begin{cases} \text{Max } E\left[R(M_1,\dots,M_k)\right] \\ \text{Min } Var\left[R(M_1,\dots,M_k)\right] \end{cases}$$

Para la resolución de este programa multiobjetivo utilizaremos el *método de escalarización*, basado en la resolución del programa escalar obtenido ponderando los dos objetivos anteriores por coeficientes $(1-\alpha)$ y α :

$$\text{MIN} \quad \alpha\, Var\left[R(M_1,\dots,M_k)\right] - (1-\alpha)\, E\left[R(M_1,\dots,M_k)\right]$$

Sabemos que las soluciones de este programa escalar para los distintos coeficientes $\alpha\in(0,1)$ son óptimos de Pareto del programa multiobjetivo. Aunque es posible que algún óptimo de Pareto del programa multiobjetivo no sea generado de esta forma, veremos que el conjunto de óptimos que encontramos es lo suficientemente amplio como para encontrar en él soluciones satisfactorias de nuestro programa de reaseguro.

A su vez, el programa escalar anterior se puede expresar como

$$\text{MIN} \quad \alpha \left[\sum \lambda_i p_2^i(M_i)\right] - (1-\alpha) \left[\sum \vartheta_i \lambda_i p_1^i(M_i)\right]$$

es decir,

$$\text{MIN} \quad \sum \left[\alpha \left[\lambda_i M_i^2 - 2\lambda_i \int_0^{M_i} x V_i(x) dx\right] - (1-\alpha) \left[\vartheta_i \lambda_i \int_0^{M_i} (1-V_i(x)) dx\right]\right.$$

La función objetivo de este programa es una suma de k sumandos, cada uno de los cuales involucra únicamente a una sola variable M_i. Por esta razón, su solución óptima se compone de las k soluciones óptimas de los programas referentes a una sola variable. Nos planteamos, pues, un programa genérico

$$\text{MIN} \quad \left[\alpha \left[\lambda M^2 - 2\lambda \int_0^M x V(x) dx\right] - (1-\alpha) \left[\vartheta \lambda \int_0^M (1-V(x)) dx\right] \right]$$

Derivando respecto a M la función objetivo obtenemos :

$$\partial / \partial M = \lambda \left[1 - V(M)\right] \left[2\alpha M - (1-\alpha)\vartheta \right]$$

Por tanto, la derivada se anula en los puntos M_0 que verifican:

$$2\alpha M_0 - (1-\alpha)\vartheta = 0 ,$$

es decir,

$$M_0 = \frac{1-\alpha}{2\alpha} \vartheta$$

o bien

$$V(M_0) = 1 ,$$

es decir, no hay reaseguro.

Los puntos definidos por las condiciones anteriores son los candidatos a óptimos del programa. Pero es fácil comprobar que el primero de ellos es realmente el mínimo global del programa: en efecto, si $M > M_0$ entonces $2\alpha M > (1-\alpha)\vartheta$ y por tanto $\partial/\partial M \geq 0$; y si $M < M_0$ entonces $2\alpha M < (1-\alpha)\vartheta$ y por tanto $\partial/\partial M \leq 0$.

De esta forma, la solución del programa resulta ser

$$M_0 = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\vartheta$$

donde α es una constante elegida previamente por el decisor en el intervalo (0,1). De forma análoga, si definimos $C = (1-\alpha)/2\alpha > 0$ podemos expresar la solución como $M_0 = C\,\vartheta$. La constante C se puede interpretar en términos de la aversión al riesgo del decisor: los decisores muy aversos al riesgo elegirán una constante C próxima a cero, lo que implica un pleno M_0 pequeño y por tanto una gran cobertura del reaseguro, tal y como cabe esperar.

Hemos encontrado la solución del problema del reaseguro con una sola subcartera. Puesto que la solución del problema relativo a k subcarteras independientes se reduce a agregar las soluciones de los programas relativos a una sola subcartera, concluímos que los plenos óptimos del problema del reaseguro con k subcarteras independientes son

$$\begin{cases} M_1 = C\,\vartheta_1 \\ \cdots\cdots \\ M_k = C\,\vartheta_k \end{cases}$$

en donde C es una constante positiva elegida previamente por el decisor. Obviamente, si aumentamos el valor de C, reducimos la cobertura del reaseguro en todas las subcarteras. También es claro que las soluciones obtenidas proporcionan mayor cobertura a las subcarteras con menor recargo de seguridad.

El valor de la constante C es, en principio, totalmente arbitrario, pudiendo tomar cualquier valor positivo. Sin embargo, a continuación estableceremos una cierta restricción para los posibles valores de C, derivada de la máxima probabilidad de ruina asumible por la empresa.

En el Capítulo 1 hemos comentado una cota superior de la probabilidad de ruina conocida como *Desigualdad de Lundberg* (Proposición 1.5) que afirma que en un Proceso de Poisson Compuesto la probabilidad de ruina es siempre menor o igual que $\mathrm{Exp}(-R\ S_0)$, en donde R (*Constante de Lundberg* o *Coeficiente de Ajustamiento*) es la raíz positiva de la ecuación

$$\lambda + c\ R = \lambda\ G(R)$$

en donde λ es la media del número de siniestros, c representa los ingresos por período y $G(R)$ es la Función Generadora de Momentos de la cuantía individual de los siniestros. Por otro lado, en la Proposición 1.1 se comentó que, si la siniestralidad en cada una de las subcarteras es Poisson Compuesta, entonces la siniestralidad en la cartera global también es Poisson Compuesta, definida por un parámetro $\lambda = \sum \lambda_i$ y por una función de distribución de la siniestralidad individual $V(x) = \sum (\lambda_i/\lambda)V_i(x)$ (en consecuencia, la Función Generadora de Momentos de la siniestralidad individual será $G(R)=\sum(\lambda_i/\lambda)G_i(R)$). Por tanto, en nuestro problema la siniestralidad total después de reaseguro tendrá una distribución Poisson Compuesta, y la desigualdad de Lundberg nos permitirá establecer una cota superior de la probabilidad de ruina después de reaseguro. En este contexto la Constante de Lundberg se define como la raíz positiva de la ecuación

$$\sum \lambda_i + c\ R = \sum \lambda_i\ G_i(R)$$

en donde c representa los ingresos totales después de reasegurar, es decir,

$$c = \sum P_i(M_i) = \sum (1+\vartheta_i)\lambda_i p_1^i(M_i) \ ,$$

y G_i representa la Función Generadora de Momentos de la cuantía individual de los siniestros de la i-ésima subcartera después de reaseguro, es decir,

$$G_i(R) = \int_0^\infty \exp(Rx)\ dV^i_{M_i}(x) \simeq \int_0^\infty (1+Rx+(R^2/2)x^2)\ dV^i_{M_i}(x) =$$

$$= 1 + R\ p_1^i(M_i) + (R^2/2)\ p_2^i(M_i)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación, obtenemos

$$\sum \lambda_i + \left[\sum (1+\vartheta_i)\lambda_i p_1^i(M_i)\right] R = \sum \lambda_i \left(1+Rp_1^i(M_i)+(R^2/2)p_2^i(M_i)\right)$$

de donde se deduce que

$$R = \frac{2\sum \lambda_i \vartheta_i p_1^i(M_i)}{\sum \lambda_i p_2^i(M_i)}$$

Ahora bien,

$$p_2^i(M_i) = \int_0^{M_i} x^2 dV_i(x) + M_i^2(1-V_i(M_i)) \le$$

$$\le M_i\left[\int_0^{M_i} x dV_i(x) + M_i(1-V_i(M_i))\right] = M_i\ p_1^i(M_i)$$

Por tanto,

$$R \ge \frac{2\sum \lambda_i \vartheta_i}{\sum \lambda_i M_i}$$

Finalmente, puesto que $M_i = C\,\vartheta_i$, obtenemos que

$$R \geq \frac{2}{C}$$

En consecuencia, si la empresa fija como máxima probabilidad de ruina admisible un valor ε , podemos encontrar los plenos de reaseguro que mantienen la probabilidad de ruina por debajo de dicho nivel ε utilizando la desigualdad de Lundberg para calcular una cota superior de los posibles valores de la constante C :

$$\mathrm{Exp}(-R\,S_0) \leq \mathrm{Exp}(-2S_0/C) = \varepsilon \Leftrightarrow C = 2S_0/|\log\,\varepsilon|$$

Por tanto,

$$C = 2S_0/|\log(\varepsilon)|$$

constituye una cota superior del conjunto de valores admisibles de la constante C.

Terminamos nuestro estudio del reaseguro Excess-Loss con varias subcarteras independientes recordando la conclusión que hemos obtenido : *el mínimo pleno de retención que la compañía debe elegir para la subcartera i-ésima de forma que la probabilidad de ruina después de reaseguro no sea superior a un valor ε, es*

$$M_i = \frac{2\,S_0\,\vartheta_i}{|\log\,\varepsilon|}$$

CAPITULO 5. REASEGURO STOP-LOSS.

Recordemos que el *Reaseguro Stop-Loss* se caracteriza porque la compañía cedente y la aceptante fijan un *pleno de retención* para la siniestralidad global en un periodo de tiempo determinado, de forma que la reaseguradora deberá pagar al final del periodo el exceso sobre el pleno que haya sufrido la siniestralidad total de la compañía cedente. De esta forma, la siniestralidad retenida por la cedente después de un reaseguro stop-loss con pleno M será

$$x_M = \begin{cases} x \ , \text{ si } x < M \\ M \ , \text{ si } x \geq M \end{cases}$$

(siendo x y x_M la siniestralidad total antes y después de reaseguro, respectivamente).

De nuevo supondremos que la prima de reaseguro se calcula mediante el principio de la esperanza, esto es, la prima se define como el valor medio de la siniestralidad cedida, recargado con un porcentaje de dicho valor medio conocido como *recargo de reaseguro* y que con ánimo simplificador nosotros supondremos que coincide con el recargo de seguridad ϑ de la cedente. De esta forma, los ingresos por primas después de reaseguro de la compañía cedente, a los que denominaremos P(M), resultan ser

$$P(M) = (1+\vartheta)\ E(x_M) = (1+\vartheta) \left[\int_0^M x\ dF(x) + M\ (1-F(M)) \right]$$

(siendo F(x) la función de distribución de la siniestralidad x).

Como de costumbre, el reaseguro reduce el riesgo de la cartera a costa de una disminución de los ingresos por primas (un aumento en la cobertura del reaseguro se corresponde con un pleno M menor y con menores ingresos P(M)).

En este apartado estudiaremos el problema de la fijación de los plenos óptimos cuando varias subcarteras independientes se reaseguran mediante reaseguros de tipo Stop-Loss. De nuevo entenderemos la "optimalidad" como un compromiso entre el beneficio (medido por la esperanza de las reservas después de reaseguro) y el riesgo (medido por la varianza de las reservas después de reaseguro). La elección de dichas medidas resulta razonable aunque arbitraria, a diferencia de lo que sucede en otros tipos de reaseguro. En efecto, la distribución de las reservas después de un reaseguro Stop-Loss puede ser bastante asimétrica, en cuyo caso la Teoría de la Utilidad no justifica necesariamente la formulación de un problema media-varianza. Sin embargo, la sencillez de cálculo y la simetría con otros tipos de reaseguro nos hacen seguir prefiriendo el planteamiento media-varianza a otros posibles planteamientos alternativos.

Obviamente, las reservas de la empresa después de reaseguro serán

$$R(M) = S_o + P(M) - x_M$$

siendo S_o las reservas iniciales, al comienzo del periodo.

En consecuencia, la media y la varianza de las reservas serán

$$E\left[R(M)\right] = S_0 + \vartheta\, E(x_M) = S_0 + \vartheta \left[\int_0^M x \; dF(x) + M\,(1-F(M)) \right]$$

$$Var\left[R(M)\right] = Var\left[x_M\right] = E(x_M^2) - E(x_M)^2 =$$

$$= \left(\int_0^M x^2 dF(x) + M^2(1-F(M))\right) - \left(\int_0^M x \; dF(x) + M\,(1-F(x))\right)^2$$

Si suponemos k subcarteras independientes, los plenos óptimos deberán ser soluciones de Pareto del siguiente programa multiobjetivo:

$$\begin{cases} MIN \; \sum_1^k Var\left[R(M_i)\right] \\ MAX \; \sum_1^k E\left[R(M_i)\right] \end{cases}$$

Para la resolución del programa multiobjetivo utilizaremos, como de costumbre, el *método de escalarización*: ponderando los dos objetivos mediante coeficientes α y $1-\alpha$ obtenemos un programa escalar equivalente al multiobjetivo

$$MIN \quad \alpha \sum Var(R(M_i)) - (1-\alpha) \sum E(R(M_i))$$

Como hemos comentado en apartados anteriores, las soluciones del programa para los distintos coeficientes $\alpha \in (0,1)$ son óptimos de Pareto del programa multiobjetivo original. Aunque es posible que no coincida con la totalidad de óptimos de Pareto, el conjunto de óptimos obtenido de esta forma es lo suficientemente amplio como para que podamos encontrar en él soluciones satisfactorias de nuestro problema de reaseguro.

Desarrollando las expresiones de la media y la varianza obtenemos que el programa escalar también se puede expresar como

$$\text{MIN} \quad \alpha \sum_{1}^{k} \left[\int_{0}^{M_i} x^2 \, dF_i(x) + M_i^2 \, (1-F_i(M_i)) - \left[\int_{0}^{M_i} x \, dF_i(x) + M_i(1-F_i(M_i)) \right] \right]^2 -$$

$$- (1-\alpha) \sum_{1}^{k} \vartheta_i \left[\int_{0}^{M_i} x \, dF_i(x) + M_i(1-F_i(M_i)) \right]$$

A su vez, el programa anterior es equivalente a los k programas definidos de forma análoga pero referentes a una sola subcartera. Nos planteamos, pues, el programa genérico

$$\text{MIN} \quad \left\{ \alpha \left[\int_0^M x^2 dF(x) + M^2(1-F(M)) - \left[\int_0^M x \, dF(x) + M(1-F(M)) \right]^2 \right] - \right.$$

$$\left. - (1-\alpha) \, \vartheta \left(\int_0^M x \, dF(x) + M(1-F(M)) \right) \right\}$$

Derivando respecto a M la función objetivo, obtenemos, después de simplificar,

$$\partial/\partial M = \Big(1-F(M)\Big) \Big(2\alpha(M-E(x_M))-(1-\alpha)\vartheta\Big)$$

Por tanto, la derivada se anula en los puntos M_0 que verifican

$$2\alpha(M_0-E(x_{M_0})) = (1-\alpha)\vartheta \text{ , es decir, } M_0-E(x_{M_0}) = \left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}\right)\vartheta$$

o bien

$$F(M_0)=1$$

es decir, no hay reaseguro.

Los dos puntos definidos por las condiciones anteriores constituyen los candidatos a óptimos del programa. A continuación demostraremos que el punto M_0 definido por la primera condición es realmente el óptimo global del programa. En efecto, obsérvese que

$$\frac{d}{dM}\left[M-E(x_M)\right] = \frac{d}{dM}\left[MF(M)-\int_0^M xdF(x)\right] = F(M) > 0 \quad , \forall M$$

En consecuencia, será

$$M-E(x_M) > M_0-E(x_{M_0}) \text{ si } M>M_0 \text{ y } M-E(x_M) < M_0-E(x_{M_0}) \text{ si } M<M_0$$

es decir,

$$2\alpha(M-E(x_M)) > (1-\alpha)\vartheta \text{ si } M>M_0 \text{ y } 2\alpha(M-E(x_M)) < (1-\alpha)\vartheta \text{ si } M<M_0$$

Por tanto, la derivada de la función objetivo, cuya expresión hemos obtenido más arriba, será positiva en los puntos $M>M_0$ y negativa en los puntos $M<M_0$,lo que indica que el punto M_0 es efectivamente un mínimo global de nuestro programa.

Hemos visto que $d/dM\left[M-E(x_M)\right] > 0$, y es evidente que si $M=0$ entonces $M-E(x_M)=0$. Obsérvese también que si definimos $C=(1-\alpha)/2\alpha$ entonces se tiene que $\alpha\in(0,1) \Leftrightarrow C>0$. En consecuencia, una forma de encontrar el punto M_0 que buscamos puede ser la siguiente:

El decisor elige una constante C positiva y, partiendo de $M=0$, *evalúa la expresión* $M-E(x_M)$ *para* M *creciente hasta encontrar el punto* M_0 *que verifica que* $M_0-E(x_{M_0}) = C\vartheta$.

Hemos encontrado la solución del problema relativo a una sola subcartera. Puesto que la solución del programa media-varianza con k subcarteras independientes se reduce a agregar las soluciones de los programas relativos a una sola subcartera, concluímos que los plenos óptimos de nuestro problema de reaseguro con k subcarteras independientes se encuentran de la siguiente manera:

El decisor elige una constante C *positiva y, partiendo de* $M_1=\ldots=M_k=0$, *evalúa la* *expresión* $M-E(x_M)$ *para* M *creciente hasta encontrar los puntos* M_1 ,..., M_k *que verifican*

$$\begin{cases} M_1-E(x_{M_1}) = C\,\vartheta_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ M_k-E(x_{M_k}) = C\,\vartheta_k \end{cases}$$

El coeficiente C se puede interpretar en términos de la aversión al riesgo del decisor. En efecto, si C es próximo a cero entonces α es próximo a la unidad y el decisor resulta ser muy averso al riesgo, ya que α es el coeficiente que pondera a la varianza en la función objetivo de nuestros programas. En tal caso los productos del coeficiente C por los recargos ϑ_i también serán próximos a cero, obteniéndose en consecuencia que los plenos óptimos serán relativamente pequeños. Esto se corresponde con una gran cobertura del reaseguro, tal y como cabe esperar en decisores muy aversos al riesgo. Por el contrario, si el coeficiente C es grande se obtiene el efecto contrario.

La elección del coeficiente C es, en principio, totalmente subjetiva, pudiendo tomar cualquier cualquier valor positivo. Sin embargo, a continuación veremos que existen ciertas restricciones para los posibles valores de C, derivadas del comportamiento racional del decisor y de la máxima probabilidad de ruina asumible por la empresa.

Comprobaremos en primer lugar que todos los decisores racionales estarán de acuerdo en establecer la misma cota inferior para los posibles valores de la constante C.

Para ello comenzaremos demostrando que la función de distribución de las reservas después de reaseguro $R(M)=S_0+P(M)-x_M$ coincide con la función de distribución de la variable $S_0+P(M)-x$ a la derecha del punto $S_0+P(M)-M$, y se anula a la izquierda de dicho punto. En efecto, si $r < S_0+P(M)-M$ se tiene

$$\text{Prob}\left[R(M) \le r\right] \le \text{Prob}\left[R(M) < S_0+P(M)-M\right] =$$

$$= \text{Prob}\left[S_0+P(M)-x_M < S_0+P(M)-M\right] = \text{Prob}\left[x_M > M\right] = 0$$

Si $r = S_0+P(M)-M$ se tiene

$$\text{Prob}\left[R(M) = r\right] = \text{Prob}\left[x_M = M\right] = \text{Prob}\left[x \ge M\right] =$$

$$= \text{Prob}\left[S_0+P(M)-x \le S_0+P(M)-M\right]$$

Finalmente, si $r \ge S_0+P(M)-M$ se tiene

$$\text{Prob}\left[R(M) \le r\right] = \text{Prob}\left[S_0+P(M)-x_M \le r\right] =$$

$$\text{Prob}\left[S_0+P(M)-M \le S_0+P(M)-x_M \le r\right] =$$

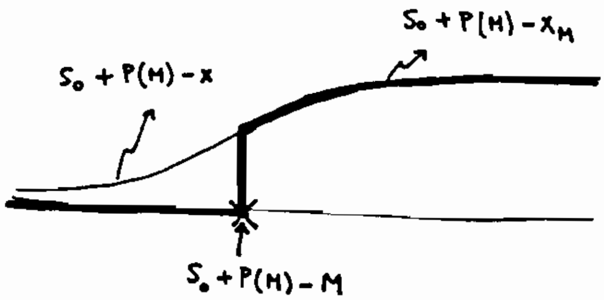
$$= \text{Prob}\left[S_0+P(M)-r \le x_M \le M\right]$$

$$= \text{Prob}\left[S_0+P(M)-r \le x < M\right] + \text{Prob}\left[x_M = M\right] =$$

$$= \text{Prob}\left[S_0+P(M)-M < S_0+P(M)-x \le r\right]+\text{Prob}\left[S_0+P(M)-x \le S_0+P(M)-M\right] =$$

$$= \text{Prob}\left[S_0+P(M)-x \le r\right]$$

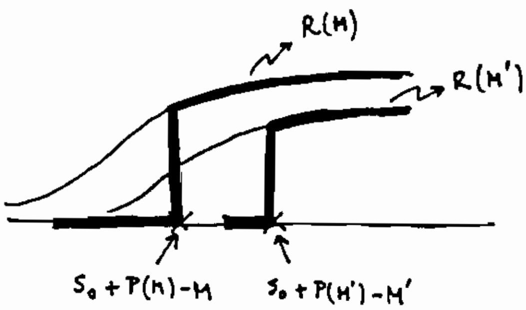
En consecuencia, hemos obtenido que la función de distribución de las reservas R(M) coincide con la función de distribución de $S_0+P(M)-x$ "truncada" en el punto $S_0+P(M)-M$. Gráficamente,

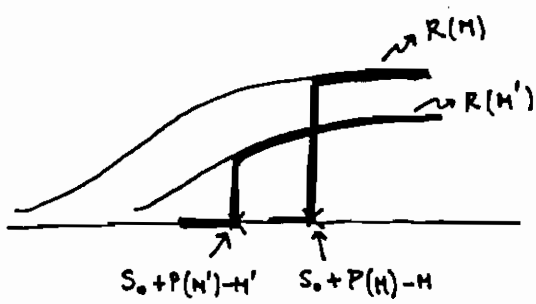


Ahora es fácil evaluar el efecto que causa en la distribución de las reservas un aumento del pleno de retención : si M pasa a ser M'>M, entonces:

- S_0+P(M)-x pasa a ser S_0+P(M')-x , con P(M') > P(M) , y por tanto su función de distribución se desplaza hacia la derecha.
- La nueva función de distribución se trunca en el punto S_0+P(M')-M' , que puede estar a la derecha o a la izquierda del primitivo punto de truncamiento S_0+P(M)-M .

Tenemos, por tanto, dos posibilidades, dependiendo de si P(M')-M' es mayor o menor que P(M)-M , y que representamos gráficamente a continuación:





Según los resultados del capítulo 2[1], en el primer caso la distribución de R(M') *domina estocásticamente* a la distribución de R(M) (por lo que resultará preferida por cualquier decisor racional), mientras que en el segundo caso las dos distribuciones resultarán no comparables (algunos decisores preferirán R(M') y otros R(M)). Por otra parte, es claro que estaremos en el primer caso cuando la derivada respecto a M de P(M)-M sea positiva, y en el segundo caso cuando sea negativa.

La conclusión que obtenemos es, pues, que cuando

$$d/dM\ (P(M)-M) > 0$$

conviene aumentar M (reasegurar menos). Por otra parte,

$$d/dM\ (P(M)-M) > 0 \Leftrightarrow P'(M) = (1+\vartheta)(1-F(M)) > 1$$

Supongamos que se comienza el razonamiento en $M=0$, que se corresponde con reasegurar la totalidad de la siniestralidad. Puesto que

$$P'(0) = 1+\vartheta > 1\ ,$$

conviene aumentar M, es decir, no reasegurar todo, hasta que $P'(M) = 1$ (obsérvese que $P'(M)$ disminuye al aumentar M, ya que $P''(M) = -(1+\vartheta)f(M) < 0$). Ahora bien,

$$P'(M)=1 \Leftrightarrow (1+\vartheta)(1-F(M))=1 \Leftrightarrow F(M)=\vartheta/(1+\vartheta).$$

Concluímos, pues, que *ningún decisor racional estará de acuerdo con un contrato de reaseguro Stop-Loss cuyo pleno sea menor que la raíz de la ecuación*

$$F(M) = \vartheta\ /\ (1+\vartheta)$$

La condición anterior proporciona una cota inferior del conjunto de plenos admisibles en un reaseguro Stop-Loss. Dicha condición también proporciona una cota inferior del conjunto de valores admisibles de la constante C.

[1] Se puede demostrar un teorema análogo al teorema 2.1, aplicado a reservas en lugar de siniestralidades, en el que se debe cambiar el sentido de la desigualdad:

$$R \leq_{st} R' \Leftrightarrow F_R(r) \geq F_{R'}(r),\ \forall r \geq 0.$$

En el caso de varias subcarteras, el decisor partirá de $C=0$ *(correspondiente a* $M_1=\ldots=M_k=0$) *y aumentará el valor de C hasta que algún* M_i *verifique por primera vez la ecuación*

$$F(M_i)=\vartheta_i/(1+\vartheta_i).$$

Puesto que la dominancia estocástica se conserva por sumas (véase el teorema 2.7), de nuevo *el valor de* C *así obtenido constituirá una cota inferior del conjunto de valores admisibles de* C.

Supongamos, por ejemplo, que la siniestralidad total está distribuída según una exponencial de parámetro 1 (con media 1). La función de densidad será $f(x)=e^{-x}$, la función de distribución será

$$F(x)=1-e^{-x} ,$$

y la esperanza de la siniestralidad retenida será

$$E(x_M)=1-e^{-M}.$$

Si tomamos como recargo de seguridad el valor $\vartheta=0.1$, la condición $M-E(x_M)=C\vartheta$ pasa a ser $M-1+e^{-M}=(0.1)C$. Por otro lado, la ecuación $F(M)=\vartheta/(1+\vartheta)$ se convierte en $1-e^{-M}=1/11$, de donde despejamos $M=-\log(10/11)=0.095$, valor que constituye una cota inferior del conjunto de plenos de retención asumibles por los decisores. Dicho valor se corresponde con $C=0.044$.

Si suponemos una segunda subcartera cuya siniestralidad se distribuye según una exponencial de parámetro 2 (media=0.5), la función de densidad será $f(x)=2e^{-2x}$, la función de distribución será $F(x)=1-e^{-2x}$ y la esperanza de la siniestralidad retenida será $E(x_M)=(1-e^{-2M})/2$. Tomando el mismo recargo que en la primera subcartera, la condición $M\text{-}E(x_M)=C\vartheta$ se convierte en $M\text{-}(1\text{-}e^{-2M})/2 = (0.1)C$. Por otro lado, la ecuación $F(M)=\vartheta/(1+\vartheta)$ se convierte en $1\text{-}e^{-2M}=1/11$, de donde despejamos $M=0.047$, valor que constituye la cota inferior para los plenos de retención en esta segunda subcartera. Dicho valor se corresponde con $C=0.022$.

Finalmente, si consideramos conjuntamente las dos subcarteras, los plenos óptimos M_1 y M_2 serán, respectivamente, soluciones de las ecuaciones $M_1\text{-}1+e^{-M_1} = (0.1)C$, $M_2\text{-}(1\text{-}e^{-2M_2})/2 = (0.1)C$, donde la constante C puede tomar cualquier valor positivo mayor que 0.022.

Hemos obtenido de esta forma una cota inferior de los valores admisibles de la constante C. A continuación deduciremos una cota superior de dichos valores, suponiendo que previamente se ha fijado la máxima probabilidad de ruina ε asumible por la empresa. Para encontrar dicha cota nos apoyaremos en la *desigualdad de Lundberg en tiempo discreto*, que afirma que la probabilidad de ruina en tiempo discreto es siempre menor o igual que $\text{Exp}(-R\ S_0)$, siendo aproximadamente $R = 2(c\text{-}\mu)/\sigma^2$ (*constante de Lundberg*) donde c representa los ingresos totales por periodo y (μ,σ^2) la media y varianza de la siniestralidad total por periodo, suponiendo que las siniestralidades en cada periodo son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas (véase la proposición 1.6).

En nuestro caso, con n subcarteras y después de reaseguro, tendremos

$$c\text{-}\mu = \sum_1^k \vartheta_i\ E(x_{M_i}) = \sum_1^k \vartheta_i \left[\int_0^{M_i} x\ dF_i(x) + M_i(1\text{-}F_i(M_i)) \right]$$

$$\sigma^2 = \sum_1^k Var(x_{M_i}) = \sum_1^k \left[\int_0^{M_i} x^2 dF_i(x) + M_i^2(1-F_i(M_i)) - \left(\int_0^{M_i} x \, dF_i(x) \right.\right.$$

$$\left.\left. + M_i \, (1-F_i(M_i)) \right)^2 \right] \leq \sum_1^k \left(M_i E(x_{M_i}) - E(x_{M_i})^2 \right) =$$

$$= \sum_1^k E(x_{M_i})(M_i - E(x_{M_i})) = C \sum_1^k \vartheta_i \, E(x_{M_i})$$

Por tanto,

$$R \geq \frac{2 \sum \vartheta_i E(x_{Mi})}{C \sum \vartheta_i E(x_{Mi})} = \frac{2}{C}$$

En consecuencia,

$$Exp(-R \, S_0) \leq Exp(-2S_0/C) = \varepsilon \Leftrightarrow 2S_0/C = |\log \varepsilon| \Leftrightarrow C = 2S_0/|\log \varepsilon|$$

Por tanto,

$$C = \frac{2 \, S_0}{|\log \varepsilon|}$$

constituye una cota superior del conjunto de valores admisibles de la constante C.

Por ejemplo, si en el ejemplo anteriormente comentado relativo a dos subcarteras con siniestralidades exponencialmente distribuídas suponemos además que las reservas iniciales son $S_0 = 0.5$ y que la máxima probabilidad de ruina admitida por la empresa es $\varepsilon = 0.01$, la mayor constante C admisible será C=0.217.

Terminamos aquí nuestro estudio del reaseguro Stop-Loss con varias subcarteras independientes, recordando una vez más nuestras conclusiones relativas a la determinación de los plenos óptimos :

El decisor elige una constante C *positiva arbitraria y, partiendo de* $M_1=\ldots=M_k=0$, *evalúa la expresión* $M-E(x_M)$ *para M creciente hasta encontrar los puntos* M_1 ,..., M_k *que verifiquen*

$$M_1-E(x_{M_1}) = C\,\vartheta_1 ,\ldots, M_k-E(x_{M_k}) = C\,\vartheta_k$$

Los valores que puede tomar la constante C *varían entre una cota inferior, deducida de las relaciones de dominancia estocástica existentes entre ciertas distribuciones de reservas, y una cota superior, deducida de la máxima probabilidad de ruina admisible.*

Así. en nuestro ejemplo de las dos subcarteras, los plenos óptimos se obtenían como soluciones de las ecuaciones

$$M_1-1+\mathrm{Exp}(-M_1) = (0.1)C \quad , \quad M_2-(1-\mathrm{Exp}(-2M_2))/2 = (0.1)C$$

que aproximadamente equivalen a:

$$M_1=\sqrt{0.2\ C}\ ,\ M_2=\sqrt{0.1\ C}.$$

La constante C puede tomar cualquier valor elegido por el decisor entre 0.022 y 0.217.

BIBLIOGRAFIA

Ammeter,M. (1948). *A Generalization of the Collective Theory of Risk in Regard to Fluctuating Basic Probabilities.* Skandinavisk Aktuarietidskrift.N.31, pp.171/198.

Balbás, Gil y Heras. *La desviación típica y la varianza como medidas del riesgo en un problema de reaseguro óptimo.* Previsión y Seguro. No 6. 1990.

Balbás A. y Gil Fana, J.A.- *Programación Matemática.* Ed. A.C. 1990.

Beard,R., Pentikainen,T., y Pesonen, E. (1984). *Risk Theory.* Chapman & Hall, London.

Bowers,N., Gerber,H.,y otros. (1986). *Actuarial Mathematics.* Society of Actuaries.

Bühlman,H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer Verlag. Berlin.

De Finetti,B. (1940). *Il problema dei pieni*. Giornale instituto Italiano degli attuari. N.11, pp1-88.

Gil, Heras y Vilar: "*Etude du comportemente de la probabilite de ruine dans un cas de reassurande quote-part avec plusieurs sous-portefeuilles*"
Proceedings 3rd AFIR International Colloquiun. Roma 1993.

Gil, Heras y Vilar:"*Funciones de ruina. Métodos y aplicaciones*" Previsión y Seguro. No 32.1994.

Goovaerts,M. Kass, R. y otros (1990) *Effective Actuarial Methods*. Elsevier. Amsterdam.

Heras, A. *Programación multiobjetivo estática y dinámica*. T.D. Universidad Complutense. 1989.

Heras, A. Gutierrez, S. Balbás, A. Gil , J.A. y Vilar, J.L. *Programación matemática y modelos económicos. Un enfoque teórico-práctico.* Ed. A.C. 1990

Hogg,R., y Klugman,S. (1984). *Loss Distributions*. John Wiley, New York.

Panjer,H., y Willmot,G. (1992).*Insurance Risk Models*. Society of Actuaries, Schaumburg Illinois.

0-0-0-0-0-0-0-0