

ESTIMACIÓN DE LOS PASIVOS DE SEGUROS DE VIDA CON PARTICIPACIÓN EN BENEFICIOS, MEDIANTE ÁRBOLES RECOMBINANTES.

Emiliano Pozuelo de Gracia¹ y Fernando Ricote Gil²

Abstract

This paper present a model for the Current Exit Value of life insurance contracts, based on the literature on affine term structure models and its numerical implementation through recombinant trees. Our model takes into account simultaneously systematic mortality risk and term structure risk of interest rates, and it satisfies two important requirements for application in practice: analytical tractability and compatibility with financial option pricing models. We provide a numerical implementation of the model on trinomial trees, which is particularly useful because of its Markovian structure. We show how to calibrate the mortality component of the model to real data, by fitting the Lee – Carter model using Andalusian mortality rates. We explain the calibration of the term structure volatility with spanish caplet market. Finally, we apply the model to the pricing of embedded options and guarantees in many insurance contracts. We use an example to illustrate the application of our model in practice.

Keywords: Fair value, actuarial passive, recombinant trees, mortality risk, Life Insurance Company.

Resumen

Este artículo presenta un modelo para la valoración consistente con el mercado de Pólizas de seguro, basado en la literatura de modelos afines de la estructura de tipos de interés y su implementación numérica mediante árboles recombinales. El modelo considera simultáneamente el riesgo de mortalidad sistemático y el riesgo de tipo de interés, y satisface dos importantes requerimientos para su aplicación práctica: tratamiento analítico

¹ Jefe de Servicio Actuarial, Seguros Cajasur, Avenida Gran Capitán, 11 Córdoba-14012.

E-mail:emiliano.pozuelo@actuarios.org

² Profesor doctor Universidad Complutense. Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I. Campus de Somosaguas. 28223. Pozuelo de Alarcón (Madrid). E-mail: fricote@ecee.ucm.es

y compatibilidad con los modelos de valoración de opciones financieras. Aportamos un método para la implementación numérica con árboles trinomiales, gracias a su propiedad de markovianidad. Mostramos la calibración del modelo para la mortalidad con datos reales, mediante el ajuste del modelo de Lee-Carter usando las tasas de mortalidad andaluzas. Exponemos la calibración de la volatilidad para la estructura de tipos de interés con el mercado de caplets español. Finalmente, aplicamos el modelo para valorar las opciones y garantías implícitas en muchas Pólizas de seguro. Utilizamos un ejemplo para ilustrar la aplicación en la práctica.

Palabras Clave: Valor razonable, pasivo actuarial,, árboles recombinantes, riesgo mortalidad, Compañía Seguros de Vida.

1. INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

La necesidad de obtener estimaciones consistentes con el mercado para las Provisiones Técnicas de Seguros de Vida (PTSV), en el marco de Solvencia II y de las Normas Internacionales de Contabilidad, deviene en la aplicación por parte de los actuarios de técnicas cuantitativas diseñadas para la valoración de instrumentos financieros con subyacentes de otra naturaleza. Tanto es así, que modelos de valoración desarrollados para el tratamiento estocástico de la Estructura Temporal de Tipos de Interés (ETTI), han sido ya adaptados por un gran número de actuarios para su aplicación en la modelización estocástica de la mortalidad. Como referencia tenemos Dahl (2004) o Biffis y Millossovich (2006)³, ó el modelo de Smith – Olivier⁴ descrito en Olivier y Jeffrey (2004), así como el trabajo Blake, et. al (2004)⁵. Los trabajos anteriores ponen de relieve, que para determinar una valoración en un marco de Ausencia de Oportunidad de Arbitraje (AOA), para Seguros de Vida que incorporen riesgo sistemático de mortalidad, hemos de recurrir al cálculo estocástico.

En el presente trabajo intentamos además de integrar en un mismo marco aquellos aspectos que permitan obtener el Best Estimate de las PTSV, ofrecer una alternativa para su implementación numérica por parte de la industria aseguradora en la práctica. Conscientes de la problemática que plantea el “data mining” en las gigantescas bases de datos de las entidades aseguradoras, así como los tiempos de cálculo que acarrear ciertas

³ Se basan en los modelos Afines de la ETTI.

⁴ Parten de los modelos de la forma Heath – Jarrow – Morton (sobre tipos forward instantáneos)

⁵ Según la familia de los Market Models (los últimos en aparecer en el ámbito de los tipos de interés).

valoraciones, pretendemos que los algoritmos resultantes del método propuesto sean al menos abordables por éstas entidades aseguradoras.

Centraremos nuestro análisis tanto en las hipótesis financieras, más concretamente en la rentabilidad que la aseguradora obtendrá en el curso de su actividad, como en las hipótesis no financieras, siendo aquí nuestro objetivo la incorporación de la medida de mortalidad realista que la aseguradora encontrará en el futuro para la cartera objeto de aseguramiento.

Las hipótesis financieras encontrarán fácilmente las expectativas que los agentes económicos tienen en cuanto a su futura evolución, a través de instrumentos financieros cotizados en mercado amplio, profundo y líquido. Las hipótesis no financieras también se han de calibrar recurrentemente cuando no se puedan mantener en el futuro.

En lo que respecta al riesgo técnico de mortalidad, nos centraremos en el riesgo sistemático de mortalidad, obviando por el momento el riesgo no sistemático, por ser este último diversificable al incrementar la cartera asegurada.

En cuanto al componente de riesgo sistemático de cualquier modelo para la obtención del Best Estimate de las PTSV, nos encontramos con que no cuenta en la actualidad con un mercado líquido para su calibración. De ahí que hemos optado por su ajuste histórico.

Como ejemplo se adjunta en un anexo, el ajuste de tablas de mortalidad dinámicas a una región española, por medio del modelo de Lee – Carter (1992), que también hemos contrastado mediante su ajuste mediante el modelo de Heligman y Pollard (1980). Éste modelo ajusta a la medida de mortalidad la función:

$$\ln(q_{xt}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon'_{xt}$$

El resultado de nuestro modelo es el siguiente

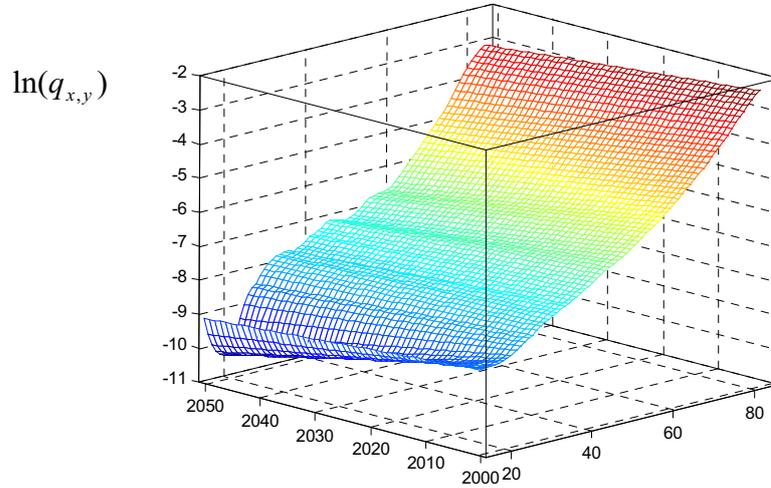


Gráfico 1.1.: Resultados de $\ln(q_{xt})$ obtenidos mediante el modelo de Lee – Carter. Mujeres

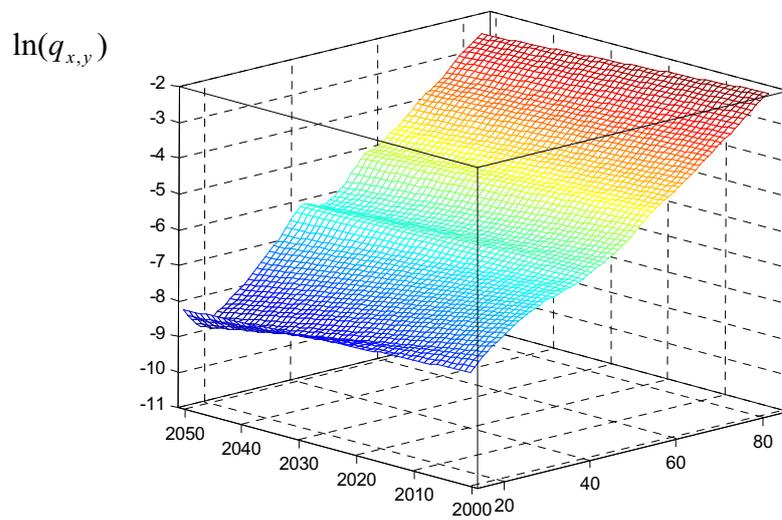


Gráfico 1.2.: Resultados de $\ln(q_{xt})$ obtenidos mediante el modelo de Lee – Carter. Hombres

Podemos vincular el riesgo técnico sistemático con el error inherente al modelo $ARIMA(0,1,0)$ con constante negativa, ε_y , asociado al parámetro k_y del modelo de Lee - Carter. Si consideramos el caso de una mujer de 70 años, y tenemos en cuenta éste error, tendríamos la siguiente distribución de probabilidad de la medida de mortalidad:

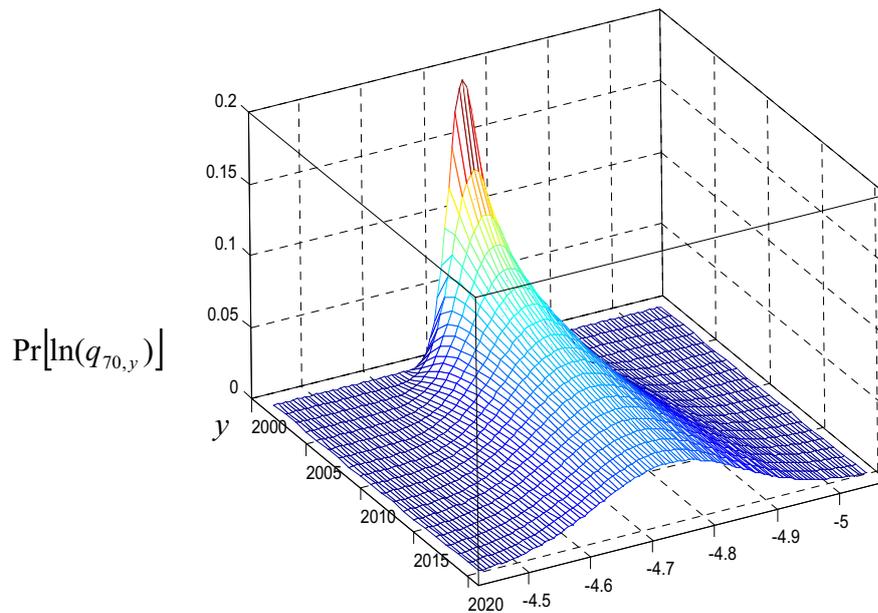


Gráfico 1.3.: Distribución del $\ln(q_{xt})$ para una mujer de 70 años en los años 2001 y siguientes.

Para recoger éste riesgo sistemático, proponemos un proceso afín unifactorial no homogéneo aplicado al tanto de mortalidad.

2. PROCESOS AFINES PARA LA ESTRUCTURA TEMPORAL DEL TANTO DE MORTALIDAD.

2.1. Resultados analíticos.

Construimos la tabla de mortalidad dinámica, estableciendo para cada generación una cohorte de 10^n individuos, cuyo descenso gradual hasta la

edad máxima, ω , determina la esperanza matemática de las probabilidades de supervivencia y fallecimiento. Introducimos

$${}_{T-t}P_{x+t} = \frac{l_{x+T}}{l_{x+t}}$$

como la probabilidad de supervivencia en el intervalo $[t, T]$, según la probabilidad real, P . Definimos el tanto instantáneo o fuerza de mortalidad, cómo

$$\mu_x(t) = \left[-\frac{\partial \ln({}_{T-t}P_{x+t})}{\partial t} \right]_{T=t}$$

y que consideraremos cómo un proceso estocástico que se rige por la siguiente EDE

$$d\mu_x(t) = (\theta(t) - a\mu_x(t))dt + \sigma dW(t)$$

Introducimos la probabilidad de supervivencia del Asegurado en t ,

$${}_tP_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_x(s)ds\right)$$

para considerar que existe una medida de probabilidad, Q , riesgo neutro, para la cual las probabilidades de supervivencia del Asegurado en $[t, T]$, condicionadas a la supervivencia en t ,

$${}_{t/\tau}P_x = {}_tP_x \cdot {}_{\tau}P_{x+t}, \quad \tau = T - t,$$

son martingala. Esto nos permitirá determinar la probabilidad de supervivencia en el intervalo $[t, T]$, ${}_{\tau}P_{x+t}$, la cual consideramos que tiene un solo factor de riesgo, identificado con el tanto instantáneo de mortalidad, $\mu_x(t)$, y que representamos por, ${}_{\tau}P_{x+t}(\mu_x(t))$. Aplicando el desarrollo de Itô – Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} d_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) &= \left(\frac{\partial_{\tau}p_{x+t}}{\partial t} dt + \frac{\partial_{\tau}p_{x+t}}{\partial \mu_x} d\mu_x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2_{\tau}p_{x+t}}{\partial \mu_x^2} (d\mu_x)^2 \right) (t, T) \\ &= \left(\frac{\partial_{\tau}p_{x+t}}{\partial t} dt + (\theta(t) - a\mu_x) \frac{\partial_{\tau}p_{x+t}}{\partial \mu_x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2_{\tau}p_{x+t}}{\partial \mu_x^2} \right) (t, T) dt + \sigma \frac{\partial_{\tau}p_{x+t}}{\partial \mu_x} (t, T) dW(t) \end{aligned}$$

Si identificamos

$$\begin{aligned} {}_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) \cdot m_p(t, T) &= \left(\frac{\partial_{\tau}p_{x+t}}{\partial t} dt + (\theta(t) - a\mu_x) \frac{\partial_{\tau}p_{x+t}}{\partial \mu_x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2_{\tau}p_{x+t}}{\partial \mu_x^2} \right) (t, T) \\ {}_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) \cdot \sigma_p(t, T) &= \sigma(t, \mu_x) \frac{\partial_{\tau}p_{x+t}}{\partial \mu_x} (t, T) \end{aligned}$$

podemos escribir

$$d_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) = {}_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) (m_p(t, T) + \sigma_p(t, T) dW(t))$$

En cuanto al cambio a la medida de probabilidad, Q , riesgo neutro, consideramos

$$\pi(t) = - \frac{m_p(t, T) - \mu_x(t)}{\sigma_p(t, T)}$$

como una prima asociada al factor de riesgo, e independiente del plazo $[t, T]$. Así tenemos que bajo esta nueva medida de probabilidad, que ${}_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t))$ cumple

$$d_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) = {}_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) ((\mu_x(t) - \sigma_p(t, T)\pi(t)) dt + \sigma_p(t, T) dW(t))$$

Aplicando el teorema de Girsanov podemos escribir lo anterior

$$d_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) = {}_{\tau}p_{x+t}(\mu_x(t)) ((\mu_x(t) dt + \sigma_p(t, T) d\tilde{W}(t)) \quad (2.1.)$$

donde $d\tilde{W} = dW - \pi(t)dt$. Asimismo bajo esta medida, la difusión del precio del bono tendría lugar bajo un nuevo coeficiente de deriva, así

$${}_{\tau}P_{x+t}(\mu_x(t)) \cdot \tilde{m}_p(t, T) = \left(\frac{\partial {}_{\tau}P_{x+t}}{\partial t} dt + (\theta(t) - a\mu_x + \sigma\pi(t)) \frac{\partial {}_{\tau}P_{x+t}}{\partial \mu_x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 {}_{\tau}P_{x+t}}{\partial \mu_x^2} \right) (t, T)$$

por lo que tendríamos

$$d {}_{\tau}P_{x+t}(\mu_x(t)) = {}_{\tau}P_{x+t}(\mu_x(t)) \left(\tilde{m}_p(t, T) + \sigma_p(t, T) d\tilde{W}(t) \right)$$

Combinando la anterior expresión con la expresión 2.1. así como la condición final ${}_0P_{x+T} = 0$, llegamos al siguiente problema de valor final

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial {}_{\tau}P_{x+t}}{\partial t} + (\theta(t) - a\mu_x) \frac{\partial {}_{\tau}P_{x+t}}{\partial \mu_x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 {}_{\tau}P_{x+t}}{\partial \mu_x^2} - \mu_x {}_{\tau}P_{x+t} &= 0 \\ {}_0P_{x+T} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Por ser de la forma afín unifactorial, la solución al problema de valor final anterior será

$$\boxed{{}_{\tau}P_{x+t} = A(\tau) \exp(-B(\tau)\mu_x(t))}$$

Diferenciando en el problema de valor final ésta expresión respecto a t y a μ_x tenemos:

$$\left[A' - \theta(t)AB + \frac{1}{2} \sigma^2 AB^2 - (B' - aB + 1)\mu_x(t) \right] {}_{\tau}P_{x+t}(\mu_x(t)) = 0$$

siendo $A'(\tau) = \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau}$ y $B'(\tau) = \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau}$.

Dividiendo por ${}_{\tau}P_{x+t}(\mu_x(t))$ y teniendo en cuenta que para todo μ_x se ha de cumplir la anterior expresión llegamos a

$$\left. \begin{aligned} A' - \theta(t)AB + \frac{1}{2}\sigma^2 AB^2 &= 0 \\ B' - aB + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La condición ${}_0 p_{x+t}(\mu_x(t)) = 1$ equivale a decir que $A(0) = 1$ y $B(0) = 0$. Obtenemos,

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-a\tau}}{a}$$

La primera ecuación se resuelve a partir de lo anterior e integrando en $s \in [t, T]$,

$$A(\tau) = \exp \left[- \int_t^T \theta(s)B(\tau)ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(B(\tau) - \tau) - \frac{\sigma^2}{4a}B(\tau)^2 \right]$$

2.2. Implementación mediante árboles trinomiales.

Implementamos numéricamente el anterior proceso estocástico a través de un árbol trinomial recombinante. Para ello suponemos que la difusión tiene lugar cada período de tiempo Δt , para lo cual definiremos el tanto de mortalidad a un plazo $[t, t + \Delta t]$

$$\mu_{x+t}^{\Delta t} = \int_t^{t+\Delta t} \mu_x(s)ds$$

de modo que la probabilidad de supervivencia del asegurado de edad $x + t$ durante el plazo $[t, t + \Delta t]$ será ${}_{\Delta t} p_{x+t} = \exp(-\mu_{x+t}^{\Delta t})$.

En adelante, para simplificar la exposición obviaremos la referencia al tiempo cronológico y al tiempo biométrico. Por otra parte y dado que la tabla de mortalidad se suele ajustar para tramos de un año de duración, fijaremos

para el tanto de mortalidad un plazo $\Delta t = 1$. De esta manera a partir de la tabla de mortalidad ajustada obtenemos:

$$\mu_t = -\log \left[\frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \right]$$

Supondremos que el tanto de mortalidad a un año, μ_t , es un proceso estocástico que sigue la dinámica expuesta para el tanto instantáneo de mortalidad, $\mu_x(t)$, de modo que:

$$d\mu_t = (\theta(t) - \bar{a}\mu_t)dt + \bar{\sigma}dW(t)$$

A continuación consideramos el proceso μ_t separado en dos componentes: una determinística y otra estocástica con nivel de reversión a 0, como sigue

$$\mu_t = S_t + \Omega_t$$

donde Ω_t es una función determinística que únicamente depende de t . Su finalidad es que el proceso replique la tabla de mortalidad ajustada. S_t es un proceso estocástico similar a μ_t pero con nivel de reversión a 0.

El primer paso consiste en el ajuste del proceso estocástico S_t , cuya evolución será

$$\left. \begin{aligned} dS_t &= -aS_t dt + \sigma dW_t \\ S_0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

y para cuyos saltos en tiempo discreto consideramos esperanzas y varianzas condicionales:

$$\left. \begin{aligned} E[S_i - S_{i-1} | S_{i-1}] &= M \cdot S_{i-1} \\ V[S_i - S_{i-1} | S_{i-1}] &= V \end{aligned} \right\}$$

donde $M = (e^{-a} - 1)$, $V = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2a})}{2a}$.

Para parámetros a y σ^2 constantes, fijamos valores de S_t , cuyo valor será múltiplo de un espacio, ΔS . Identificamos los valores del proceso S_t , por $S(i, j) \equiv S(i\Delta t, j\Delta S)$.

Dado que pretendemos ajustar tres condiciones: media, varianza y probabilidades de transición, hemos de construir árboles con ramificación trinomial.

En Hull y White (2000), encontramos árboles trinomiales recombinantes de la forma

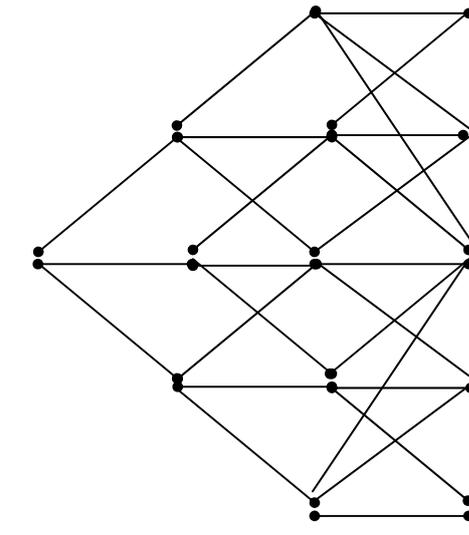
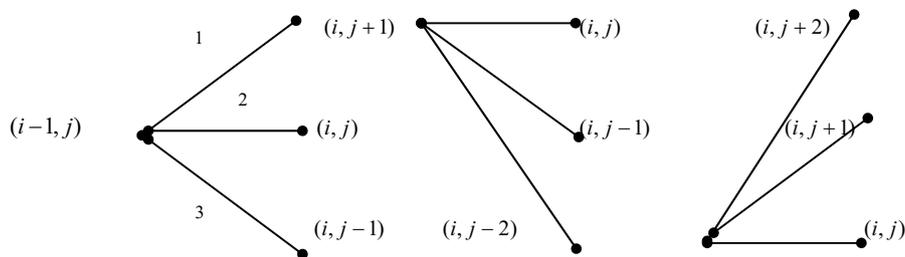


Figura 2.1. Árbol trinomial para Δt .

Así la configuración posible para los distintos nodos puede ser:



Configuraciones central descendente ascendente
 Figura 2.2.

En cuanto a las probabilidades de transición, estas quedan para la configuración central, descendente y ascendente respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} p_1(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 + jM}{2} \\ p_2(j) &= \frac{2}{3} - (jM)^2 \\ p_3(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 - jM}{2} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} p_1(j) &= \frac{7}{6} + \frac{(jM)^2 + 3jM}{2} \\ p_2(j) &= -\frac{1}{3} - (jM)^2 - 2jM \\ p_3(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 + jM}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} p_1(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 - jM}{2} \\ p_2(j) &= \frac{1}{3} - (jM)^2 + 2jM \\ p_3(j) &= \frac{7}{6} + \frac{(jM)^2 - 3jM}{2} \end{aligned} \right\}$$

La regla para decidir la ramificación adecuada para cada nodo, será una vez definida

$$L = \left[\frac{0,1835}{|M|} \right],$$

de manera que

$-L \leq j \leq L \rightarrow \text{central}$
 $j > L \rightarrow \text{descendente}$
 $j < L \rightarrow \text{ascendente}$

Para ilustrar lo anterior expondremos un ejemplo. Partimos de unos parámetros $\alpha=0,203954$ y $\sigma = 0,45231\%$. Siguiendo el proceso ya descrito obtenemos los siguientes valores para las probabilidades de transición:

J	$p_1(j)$	$p_2(j)$	$p_3(j)$
1	0,906937	0,001627	0,091437
0	0,166667	0,666667	0,166667
-1	0,091437	0,001627	0,906937

Cuadro 2.1.: Probabilidades de transición en el árbol de la variable S_t que son estacionarias.

Igualmente los valores de $S_{i,j}$ son

J	$S_{i,j}$
1	0,70992%
0	0,00000%
-1	-0,70992%

Cuadro 2.2.: Valores temporales en el árbol de la variable $S_{i,j}$

A partir de tener identificado el árbol para el proceso, $S_{i,j}$, el segundo paso en la implementación del modelo consiste en convertir este árbol en el correspondiente al tanto de mortalidad, $\mu_{i,j}$, de manera que quede replicada la tabla de mortalidad del asegurado correspondiente. Para determinar los valores, $\mu_{i,j} \equiv \mu_{x,y}(i\Delta t, j\Delta S)$, lo único que resta es determinar en cada período las cantidades, $\Omega_i \equiv \Omega(i\Delta t)$. Para ello nos apoyaremos en los razonamientos que sugieren los precios Arrow – Debreu. El sentido económico que le atribuiremos a éstos pseudo – precios Arrow – Debreu,

$Q_{i,j}$, será el valor probable de un euro prometido en el escenario correspondiente a:

- supervivencia del asegurado en i , y
- que el tanto de mortalidad $\mu_{i,j}$ se halle en el nodo, j , para el intervalo i .

El proceso sería el que sigue:

1. Inicializamos el algoritmo con $Q_{0,0} = 1$. Así como

$$\Omega_0 = \mu_0 = -\log\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)$$

2. Los pseudo - precios Arrow – Debreu, $Q_{1,1}$, $Q_{1,0}$ y $Q_{1,-1}$, se determinan cómo:

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,1} &= Q_{0,0} \cdot p_3(1) \cdot p_x \\ Q_{1,0} &= Q_{0,0} \cdot p_2(0) \cdot p_x \\ Q_{1,-1} &= Q_{0,0} \cdot p_1(-1) \cdot p_x \end{aligned} \right\}$$

siendo $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$, la probabilidad de supervivencia a un año.

3. A partir de todos los pseudo - precios $Q_{i,j}$, para tiempo, i , podemos calcular Ω_i .
4. Transcurrido el primer año, la probabilidad, p_{x+1} , dependerá de cada nodo:

$$\left. \begin{aligned} p_{x+1}(1) &= \exp(-(\Omega_1 + \Delta S)) \\ p_{x+1}(0) &= \exp(-\Omega_1) \\ p_{x+1}(-1) &= \exp(-(\Omega_1 - \Delta S)) \end{aligned} \right\}$$

Aplicando Bayes podemos determinar inmediatamente que:

$${}_2 P_x = Q_{1,1} \exp(-(\Omega_1 + \Delta S)) + Q_{1,0} \exp(-\Omega_1) + Q_{1,-1} \exp(-(\Omega_1 - \Delta S))$$

Por lo que se obtiene la expresión

$$\Omega_1 = \log \left(\frac{\sum_{j=-1}^1 Q_{1,j} \cdot \exp(-j\Delta S)}{{}_2 P_x} \right)$$

Y ya es inmediato obtener los valores

$$\left. \begin{aligned} \mu_{x+1,1} &= \Omega_1 + S_1 \\ \mu_{x+1,0} &= \Omega_0 + S_0 \\ \mu_{x+1,-1} &= \Omega_{-1} + S_{-1} \end{aligned} \right\}$$

El enfoque anterior proporciona un algoritmo recursivo, ya que en general

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i &= \log \left(\frac{\sum_{\forall j} Q_{i,j} \cdot \exp(-j\Delta S)}{{}_{i+1} P_x} \right) \\ Q_{i,j} &= \sum_{j'} Q_{i-1,j'} \cdot p_j(i-1, j') \cdot p_{x+i-1, j'} \end{aligned} \right\}$$

Los resultados para nuestro ejemplo serían gráficamente

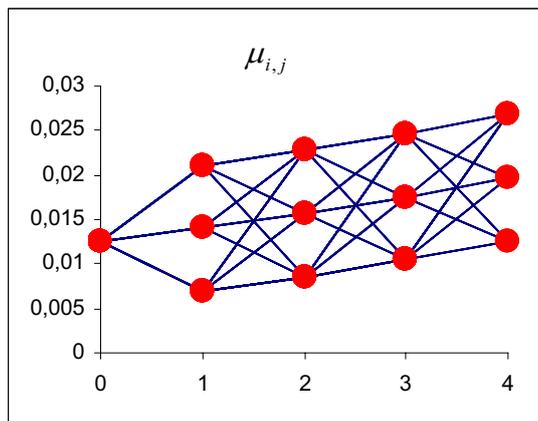


Gráfico 2.1.: Árbol del tanto de mortalidad.

3. RIESGO DE TIPO DE INTERÉS.

Para introducir en el análisis el tipo de interés consideraremos el modelo de Hull – White (1990). De este modo consideramos que el proceso riesgo – neutro para el tipo instantáneo tiene la forma

$$dr(t) = (\bar{\theta}(t) - \bar{a}r(t))dt + \bar{\sigma}dW(t) \quad (3.1)$$

donde \bar{a} y $\bar{\sigma}$ son constantes, pero la función $\bar{\theta}$ depende del tiempo de modo que la ETTI quede perfectamente replicada.

En este caso aplicando Itô – Taylor y las manipulaciones algebraicas necesarias obtenemos para el factor de descuento actuarial que el precio del bono con riesgo será

$${}_{\tau}E_{x+t} = {}_{\tau}p_{x+t} \cdot \bar{A}(\tau)e^{-\bar{B}(\tau)r(t)}, \quad \tau = T - t \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} {}_t P_{x+t} &= A(\tau)e^{-B(\tau)r(t)} \\ \bar{B}(\tau) &= \frac{1}{\bar{a}}[1 - e^{-\bar{a}\tau}] \\ \bar{A}(\tau) &= \exp\left[-\int_t^T \bar{\theta}(s)\bar{B}(\tau)ds - \frac{\bar{\sigma}^2}{2\bar{a}^2}(\bar{B}(\tau) - \tau) - \frac{\bar{\sigma}^2}{4\bar{a}}\bar{B}(\tau)^2\right] \end{aligned}$$

$\bar{\sigma}^2$ y \bar{a} : parámetros fruto de la calibración del tipo de interés.
 Su implementación también la llevamos a cabo a través de árboles trinomiales, considerando que el tipo de interés a plazo Δt , $R_t \equiv R(t, t + \Delta t)$, se rige por

$$dR_t = (\bar{\theta}(t) - \bar{a}R_t)dt + \bar{\sigma}dW(t) \quad (3.3)$$

En Hull y White (1990) se expone cómo ajustar la ETTI a cada plazo.

Supondremos la tabla de mortalidad ajustada y expuesta anteriormente, y los parámetros de volatilidad del tipo de interés, $\bar{a} = 0,0986$ y $\bar{\sigma} = 0,01103$, así como la curva cupón cero sin riesgo, $P(0, t)$, siguiente:

t	$P(0, t)$
1	0,977469
2	0,947188
3	0,912773
4	0,875619
5	0,837634

Cuadro 3.3.: ETTI.

Obtenemos:

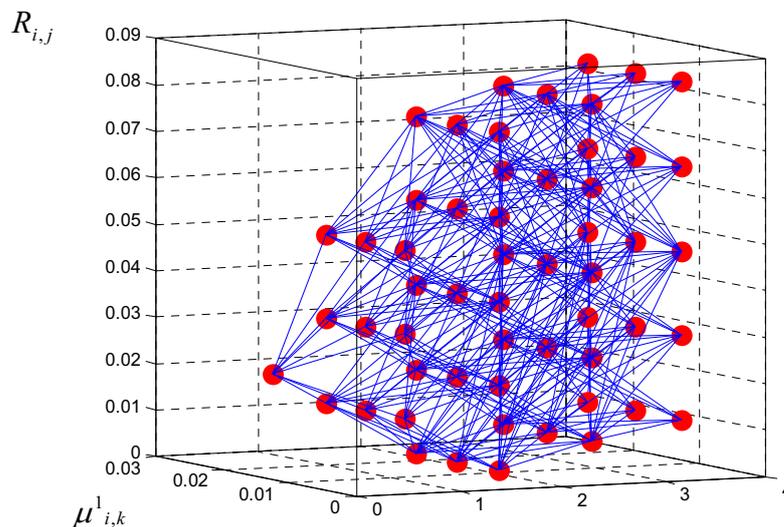


Gráfico 3.2.: Árbol conjunto del tipo libre de riesgo y del tanto de mortalidad.

4. CALIBRACIÓN DEL TANTO DE MORTALIDAD.

Cómo hemos podido comprobar, la construcción del árbol trinomial para el tanto de mortalidad se sirve de la tabla de mortalidad ajustada, de modo que las probabilidades de supervivencia obtenidas con la tabla de mortalidad son equivalentes a las proporcionadas por el árbol trinomial. La calibración que persigue este apartado es la determinación de los parámetros de volatilidad a y σ .

El objetivo es pasar de la probabilidad real, P , a una probabilidad martingala riesgo – neutro, que considere las expectativas de los intervinientes en el mercado, en cuanto a la futura evolución de la medida de mortalidad.

Lamentablemente no existe un mercado instrumentos financieros líquido cuyo subyacente sea el tanto de mortalidad, y mucho menos con las hipótesis establecidas en este trabajo en cuanto a las tablas de mortalidad. Como ya hemos mencionado, únicamente tenemos cómo antecedentes el EIB/BNP

Long – term longevity bond, de noviembre 2004, y el Swis – Re Short – term.

Aquí expondremos cómo calibrar nuestro modelo a partir de un derivado OTC, que tomará como subyacente una renta vitalicia, constante a prima única, que se devenga en un tiempo posterior, T , a la fecha de valoración t . Es lo que Schrage (2006) denomina GAOs (Guaranteed Annuity Options).

Denotemos por $F_x(t, T)$, la cuantía determinada en t , de una pensión vitalicia constante y pagadera a partir de T (diferida por tiempo $T - t$), por períodos vencidos de longitud, Δt , a cambio de una prima única de un euro, sin gastos que se devengará asimismo en T . El valor razonable de $F_x(t, T)$ sería si no consideramos riesgo de crédito

$$F_x(t, T) = \frac{{}_\tau E_{x+t}^Q}{{}_\tau a_{x+t}^Q}$$

Siendo

$$\tau = T - t$$

${}_\tau E_{x+t}^Q = {}_\tau p_{x+t}^Q \cdot P(t, T)^Q \Rightarrow$ valor actual actuarial en t , de un euro prometido en T , para un persona de edad $x + t$, en t , bajo la probabilidad martingala riesgo neutro, Q .

$\tau / a_{x+t}^Q = \sum_{i=T+1}^{\omega-T-1} {}_{i-t} p_{x+t}^Q \cdot P(t, i)^Q \Rightarrow$ valor actual actuarial en t , de una renta vitalicia, constante y postpagable pagadera a partir de T , para un persona de edad $x + t$, en t , bajo la probabilidad martingala riesgo neutro, Q .

ω : edad máxima que puede alcanzar la persona.

La valoración de esta pensión determinada en T , sería en cambio

$$F_x(T, T) = \frac{1}{a_{x+T}^Q}$$

Así consideramos a continuación que existe una medida de probabilidad Q_x , equivalente según la cual

$$\frac{V(t)}{T-t / a_{x+t}^{Q_x}}$$

es martingala, siendo $V(t)$ el proceso correspondiente a un instrumento financiero que cotiza en el mercado. Bajo esta medida de probabilidad, Q_x , tenemos que $F_x(t, T)$ es martingala, viniendo reglada su evolución según la siguiente EDE

$$dF_x(t, T) = F_x(t, T)[\sigma_x(t, T)dZ(t) + \sigma_p(t, T)dW(t)]$$

Siendo

$dZ(t)$: movimiento Browniano para la evolución de la medida de mortalidad, según la nueva medida de probabilidad Q_x .

$\sigma_x(t, T)$: proceso de la volatilidad de $F_x(t, T)$, respecto de los cambios en la medida de mortalidad.

$dW(t)$: movimiento Browniano para la evolución de los tipos de interés sin riesgo, según la nueva medida de probabilidad Q_x .

$\sigma_p(t, T)$: proceso de la volatilidad de $F_x(t, T)$, respecto de los cambios en los tipos de interés.

Si consideramos que $\sigma_x(t, T)$ y $\sigma_p(t, T)$ son determinísticos, entonces $F_x(s, T)$ para $t < s \leq T$ es log-normal bajo Q_x , siendo

$$\left. \begin{aligned} E_{Q_x}[F_x(s, T)|F_t] &= F_x(t, T) \\ \text{Var}_{Q_x}[F_x(s, T)|F_t] &= \int_t^s (|\sigma_x(u, T)|^2 + |\sigma_p(u, T)|^2) du \end{aligned} \right\}$$

donde F_t representa toda la información disponible en t .

Consideramos a continuación un contrato que tiene una garantía referenciada a esta pensión vitalicia anual a partir de T . En el mercado abierto, cada euro en tiempo T , garantiza una pensión vitalicia anual de $F_x(T, T)$ (suponiendo ausencia de gastos y a valor razonable). El mencionado contrato garantiza que la pensión por cada euro de prima en T , será como mínimo de K , por lo que se obtendrá

$$\max\{K, F(T, T, x)\}$$

lo cual en términos de $F_x(T, T)$, será

$$\frac{\max\{K, F_x(T, T)\}}{F_x(T, T)} = 1 + G(T)$$

donde

$$G(T) = \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T)} : \text{representa el valor en } T \text{ de la opción implícita.}$$

Consideramos además que de un número inicial de asegurados, $N(0)$, de referencia como nominal, cobrarán los que sigan vivos en T , y que denotamos por $N(T)$. Asimismo con la información hasta T , F_T , tenemos que el número de asegurados, $N(T)$, sigue una distribución binomial de parámetros $N(t)$ y ${}_t p_{x+t}^{\mathcal{Q}}$, determinándose su valor esperado como $N(t) {}_t p_{x+t}^{\mathcal{Q}}$. Ésta última expresión también se puede definir como $N(t) \frac{{}_T P_x^{\mathcal{Q}}}{{}_t P_x^{\mathcal{Q}}}$, de modo que podemos reemplazar el valor esperado de $N(T)$ por $n(t) {}_T P_x^{\mathcal{Q}}$, siendo

$$n(t) = \frac{N(t)}{{}_t P_x^{\mathcal{Q}}}$$

Lo anterior nos será de utilidad más adelante en la expresión 4.1, debido a que el valor de $N(T)$ es condicionalmente independiente de la tabla de mortalidad en uso en tiempo T .

Por otra parte, el valor total del contrato en T , teniendo en cuenta este nominal referenciado al número de supervivientes será

$$N(T) \max\{K, F_x(T, T)\} a_{x+T}^Q$$

y el de la opción implícita

$$G(T) = N(T) \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T)}$$

Suponemos que la opción implícita se cotiza con precio $G(t)$ en t , de manera que $\frac{G(t)}{\tau / a_{x+t}^Q}$, es martingala bajo la medida de probabilidad Q_x . La propiedad martingala de Q_x , implica que

$$\begin{aligned} \frac{G(t)}{\tau / a_{x+t}^Q} &= E_{Q_x} \left[\frac{G(T)}{\tau / a_{x+t}^Q} \middle| F_t \right] \\ &= E_{Q_x} \left[N(T) \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T) \cdot \tau / a_{x+t}^Q} \middle| F_t \right] \\ &= E_{Q_x} \left[E_{Q_x} \left[N(T) \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T) \cdot \tau / a_{x+t}^Q} \middle| F_T \right] \middle| F_t \right] \\ &= E_{Q_x} \left[E_{Q_x} [N(T) | F_T] \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T) \cdot \tau / a_{x+t}^Q} \middle| F_t \right] \\ &= E_{Q_x} \left[n(t)_T p_x^Q \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T) \cdot \tau / a_{x+t}^Q} \middle| F_t \right] \\ &= E_{Q_x} \left[n(t) (K - F_x(T, T))^+ \middle| F_t \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Llegando de éste modo a que

$$G(t) = n(t) \tau / a_{x+t}^Q (K \Phi(-d_2) - F_x(t, T) \Phi(-d_1))$$

donde

$$d_{1,2} = \frac{\log F_x(t, T) / K \pm \frac{1}{2} \sigma_{Fx}^2}{\sigma_{Fx}}$$

$\Phi(\cdot)$: distribución acumulada de la normal estándar.

$$\sigma_{Fx}^2 = \int_t^T (|\sigma_x(u, T)|^2 + |\sigma_p(u, T)|^2) du.$$

Los parámetros, a y σ , para los que el modelo quedaría calibrado, serían aquellos que minimizaran esta distancia

$$\arg \min \left(\sum_{i=1}^n \frac{|G_i - M_i(a, \sigma)|}{G_i} \right)$$

siendo

G_i : el precio de mercado del instrumento financiero descrito, y

$M_i(a, \sigma)$: el valor proporcionado por el modelo para este instrumento, considerando difusión en los tipos de interés y el tanto de mortalidad.

5. Best Estimate de las Provisiones Técnicas de Seguros de Vida.

La valoración de las PTSV bajo la probabilidad Q , riesgo – neutro sería

$$E_Q[V(t, T)|F_t] = E_Q[K(t, T) - \Pi(t, T)|F_t]$$

donde

$K(t, T)$: es el proceso de las prestaciones y gastos, y

$\Pi(t, T)$: es el proceso de las primas.

Nuestra propuesta es valorar las PTSV en tiempo discreto a través del árbol trinomial para la difusión de los subyacentes considerados.

Para obtener el valor de las PTSV seguimos el algoritmo:

$$V(i, j, k) = \exp(-\gamma_{i,j,k}^c) \cdot \left[S_{i+1} + \sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^3 p_{s,r} V^c(i+1, j_s, k_r) \right] + (1 - \exp(-\mu_{i,k})) F_i \quad (5.1)$$

siendo

$\gamma_{i,j,k} = R_{i,j} + \mu_{i,k}$: tanto de capitalización actuarial.

$p_{s,r} = p_s \cdot p_r$: producto de las probabilidades de transición conjuntas del tipo de interés libre de riesgo y del tanto de mortalidad.

$V(i, j, k)$: valor razonable de las PTSV en el nodo (i, j, k, l) , donde el primer índice es temporal, el segundo corresponde al nivel respecto de los tipos de interés y el último al tanto de mortalidad.

S_{i+1} : flujo por supervivencia devengado en el corte temporal $i+1$. Las primas a cobrar se considerarán por importe negativo, al suponer un derecho que minora el compromiso.

F_i : flujo por fallecimiento devengado en el corte temporal $(i, i+1]$. Si suponemos fallecimiento al inicio del período considerado.

El Best Estimate será la cuantía correspondiente al nodo origen, $V(0,0,0)$.

Para ilustrar la valoración en el árbol en un contexto de Pólizas de Seguros, nos centraremos en la más simple PTSV, como es una Póliza de Seguro pura de Ahorro, lo que denominamos Capital Diferido. Como hipótesis técnicas, consideramos un interés técnico garantizado del 3%, los gastos de gestión son del 1% para adquisición (gadq) sobre la prima de tarifa, para administración (gadm) del 0,08% sobre el capital garantizado y del 0,02% para gastos de gestión de siniestros (ggs), también sobre el capital garantizado.

La medida de mortalidad que consideraremos será la resultante de nuestro ajuste del modelo de Lee – Carter a la población andaluza. El asegurado será una mujer de 70 años ($x = 70$) en el año 2005, siendo este último a su vez el año de efecto. De esta manera nos centraremos en la tabla de mortalidad generacional resultante de nuestro ajuste, para una mujer nacida en el año 1935. Dado que el seguro dura 5 años ($n = 5$), hemos de recurrir a los resultados de la medida de mortalidad para una edad a partir de 70 años.

Aplicando la expresión 5.1, el valor razonable según este procedimiento será de 0,781374, siendo el resultado para los posibles estados posteriores los que se reflejan en el anexo 2.

5.-OPCIÓN DE PARTICIPACIÓN EN BENEFICIOS.

En multitud de ocasiones se incluye en la póliza de seguro la cláusula de participación en beneficios (PB). La aseguradora ofrece al tomador un porcentaje de la rentabilidad obtenida de la inversión de las PTSV en la medida en que supera el interés técnico garantizado en Póliza.

La materialización de esta PB puede ser un extorno de prima, una reducción en el compromiso pendiente por parte del Tomador, o bien un incremento en las prestaciones garantizadas. Si bien en Pólizas de exteriorización de compromisos por pensiones, es corriente cualquiera de las dos primeras opciones, en caso de Pólizas de Seguro individuales, es muy habitual el tercero de los casos, es decir, incrementar las prestaciones garantizadas. En este último caso desde nuestro punto de vista, se verían incrementados los flujos probables de pagos correspondientes a la Póliza.

El incremento que se produce en los flujos probables de pagos de la Póliza por PB, tendría que incrementar consecuentemente el valor razonable de la PTSV, ya que hemos de considerar la totalidad de los flujos que proporciona el instrumento financiero. Cualquiera de las modalidades de PB provoca una asimetría en el resultado de la operación de seguro para la compañía aseguradora, ya que cuando la rentabilidad de las inversiones en que se halla materializada la PTSV supera el interés técnico, corresponde a la aseguradora el beneficio que proporciona únicamente el resultado después de imputar la PB. Mientras que si no consigue una rentabilidad igual o mayor al interés técnico, la pérdida resultante es asumida íntegramente por la aseguradora. Aquí nos centraremos en la PB que se materializa en un incremento en las prestaciones garantizadas por la Póliza.

Si bien tendríamos que considerar el tipo de interés libre de riesgo, más el spread por riesgo de crédito de los activos afectos a las PTSV, dado que en el marco de Solvencia II, el CEIOPS ha recomendado que no se ha de considerar el spread de crédito en el descuento de los flujos, tampoco lo consideraremos en la determinación de los compromisos por PB.

El procedimiento a seguir sería:

- Determinar para cada nodo del árbol trinomial, las consecuencias en términos de incremento de las prestaciones garantizadas según los condicionados de la Póliza.

Suponiendo que participa en un porcentaje, β , de la rentabilidad, aplicado sobre la Provisión Técnica de Seguros de Vida, estimada según la base técnica, tendríamos:

$$P^{pb}_{i,j,k} = {}_iV'_x \cdot (\beta \cdot R_{i,j} - IT)^+$$

Donde

IT : interés técnico de la Póliza.

${}_iV'_x$: PTSV a prima de inventario determinada según la base técnica de la Póliza.

- A continuación se determina la cuantía de los flujos de caja en que se traduce la PB:

$$\left. \begin{aligned} S^{pb}(P^{pb}_{i,j,k}) &= g(P^{pb}_{i,j,k}) \\ F^{pb}(P^{pb}_{i,j,k}) &= f(P^{pb}_{i,j,k}) \end{aligned} \right\}$$

Siendo

S^{pb} : flujo de caja cuyo devengo tiene lugar al fallecimiento del asegurado.

F^{pb} : flujo de caja cuyo devengo tiene lugar al fallecimiento del asegurado.

- Posteriormente descontamos a través del árbol trinomial y hasta el nodo origen de la PB, la totalidad del flujo de caja:

$$V^{PB}(i, j, k) = \exp(-\gamma_{i,j,k} \cdot \Delta t) \cdot \left[S^{pb}_{i+1} + \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 p_{s,r} V(i+1, j_r, k_s) \right] + (1 - \exp(-\mu_{i,k} \cdot \Delta t)) \cdot F^{pb}_i$$

Este descuento tiene lugar hasta el nodo origen de la PB, considerando

$$PB_{i,j,k} = V^{PB}(i, j, k)$$

- Por último descontamos estos flujos de caja por PB acumulados y descontados actuarialmente cómo sigue:

$$V^{PB}(i, j, k) = \exp(-\gamma_{i,j,k} \cdot \Delta t) \cdot \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 p_{s,r} V(i+1, j_r, k_s) + PB_{i,j,k}$$

El valor razonable de la opción de PB de las PTSV sería la cuantía correspondiente a $V^{PB}(0,0,0)$.

Para ilustrar lo anterior supondremos para nuestro ejemplo, que el Tomador tiene derecho a una PB, que proporciona una prima de inventario, es decir, sin considerar gastos de adquisición. Su cuantía se determina aplicando sobre la PTSV determinada con el criterio fijado al respecto actualmente por el ROSSP, el exceso que el 90% de la rentabilidad de las inversiones afectas, represente sobre el interés técnico. Supondremos que la prima de inventario del bono por PB en el nodo (i, j, k) , se determina cómo sigue:

$$pb(i, j, k, l) = (90\% \cdot R_{i,j} - IT)^+ \cdot V'_x$$

Esta PB incrementa la garantía para supervivencia, y se considera con efecto al comienzo de la anualidad en que se devenga. Supondremos asimismo que esta PB no proporciona futura. El capital del bono será:

$$cb(i, j) = \frac{pb(i, j)}{\Pi'_{x+i+1:n-i-1} \text{---}}$$

dado que

$$\Pi'_{x+i:n-i} \text{---} =_{n-i} E_{x+i} \cdot (1 + gadm + ggs) =_i V'_x$$

tenemos que

$$cb(i, j, k, l) = (90\% \cdot R_{i,j} - IT)^+$$

Como resultado para nuestro ejemplo, tenemos que el valor razonable de la opción de participación en beneficios asciende a 0,025165, siendo el resultado para los posibles estados posteriores los que se reflejan en el anexo 3.

6. CONCLUSIONES.

Hemos propuesto un proceso de estimación del valor razonable de las PTSV, en un marco de ausencia de oportunidad de arbitraje, que considera cómo subyacentes, el tipo de interés libre de riesgo, tanto de mortalidad y spread por riesgo de crédito de la aseguradora. Éste modelo es calibrable en cuanto a cada uno de los subyacentes considerados, requiriendo para ello de instrumentos financieros suficientes líquidos.

Para el tipo de interés libre de riesgo y el spread por riesgo de crédito, podemos encontrar éste tipo de instrumentos. No obstante para el tanto de mortalidad, no existe en la actualidad instrumentos calibrantes. Esto motiva que debamos recurrir a la calibración histórica.

Una de las principales ventajas de los conocidos como modelos afines, es además de su tratamiento analítico, que gracias a su propiedad de markovianidad se pueden implementar numéricamente a través de árboles trinomiales recombinantes, los cuales pueden ser fácilmente abordables por grandes entidades aseguradoras, cuyos tiempos de cálculo serían de otro modo prohibitivos.

En futuras investigaciones abordaremos la aplicación de modelos de la familia de los Markovian Function Model (Hunt et. al. 2000), los cuales también permiten la implementación numérica en forma de árbol recombinante, y si bien no cuentan con otras propiedades de los procesos afines, permiten una mejor estimación del valor razonable de instrumentos financieros.

7. BIBLIOGRAFÍA.

- BIFFIS, E. Y. MILLOSSOVICH., P. (2006). "The fair value of guaranteed annuity options." *Scandinavian Actuarial Journal*. Volumen 2006(1).
- CAIRNS, A. J. G., BLAKE, D. y DOWD, K. (2004). "Pricing death: frameworks for the valuation and securitization of mortality risk." **Preprint**,

Actuarial Mathematics and Statistics, School of Mathematical and Computer Sciences, Heriot – Whatt University.

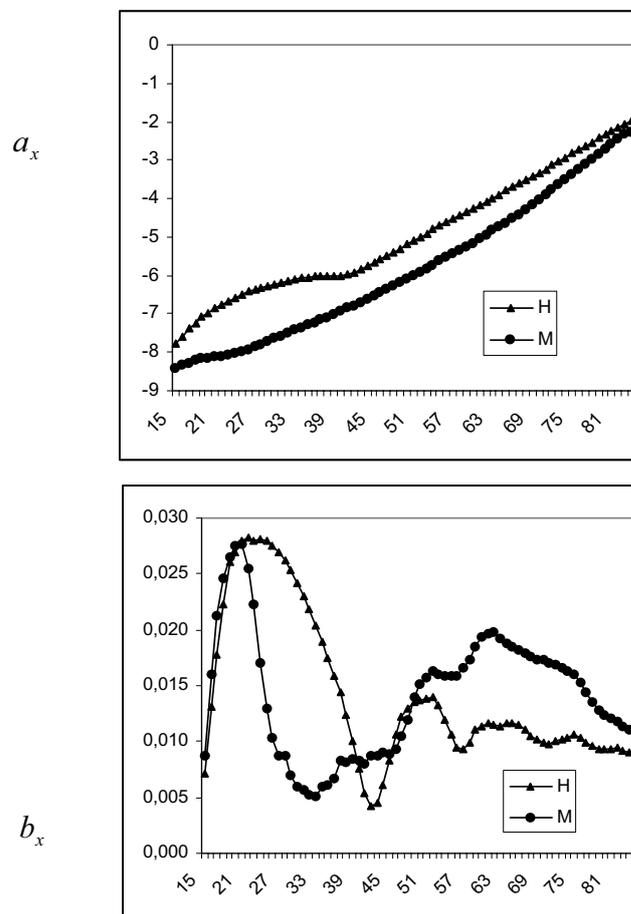
- CARTER, L. Y. LEE, R. (1992). "Modelling and forecasting U. S. mortality." *Journal of the American Statistical Association*. Volumen 87(419).
- DAHL, M. (2004). "Stochastic Mortality in Life Insurance: Market Reserves and Mortality Linked Insurance Contracts." *Insurance: Mathematics and Economics*. Volumen 35
- HULL, J. Y WHITE, A. (1990). "Pricing interest rate derivative securities." *Review of Financial Studies*. Volumen 3.
- HUNT, J., KENNEDY, J. y PELSSER, A. (2000). "Markov functional interest rate models" *Finance & Stochastics*. Volumen 4.
- INTERNATIONAL ACCOUNTING STANDARD BOARD (IASB) (2003b). "*International Accounting Standard 39* Financial Instruments: Recognition and Measurement." December.
- IASB (2003c). "Fair value hedge accounting for a portfolio hedge of interest rate risk." *Exposure draft of proposed Amendment to IAS 39 Financial Instruments: Recognition and Measurement*, August.
- IASB (2005). "The fair value option." *Amendment to IAS 39 Financial Instruments: Recognition and Measurement*, June
- INTERNATIONAL ACTUARIAL ASSOCIATION (2004). "Changes in Accounting Policy while under International Financial Reporting Standards." Preliminary ED.
- NIETO, U. Y VEGAS, J. (1993). "*Matemática Actuarial*." Madrid, Mapfre.
- OLIVIER, P. y JEFFERY, T. (2004). "Stochastic mortality models." Presentation to the Society of Actuaries of Ireland. Disponible en http://www.actuaries.ie/Resources/events_papers/PastCalendarListing.htm
- SCHÖNBUCHER, P. J. (1999). "A Tree Implementation of a Credit Spread Model for Credit Derivatives." Technical report. University of Bonn.
- SCHRAGER, D. F. (2006). "Affine stochastic mortality." *Insurance: Mathematics & Economics*. Volumen 38(1).
- VASICEK O. A. (1982). "An equilibrium characterisation of the term structure." *Journal of Financial Economics*. Volumen 5 (2).

Anexo 1. Ajuste del modelo de Lee – Carter a la población andaluza

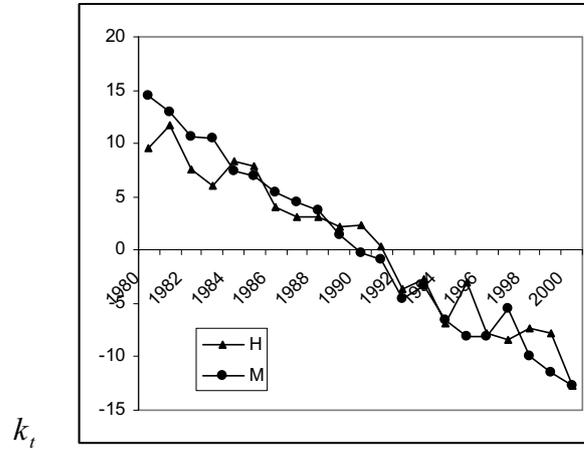
Cómo se explica en la introducción, el modelo de Lee – Carter (1992) ajusta a la medida de mortalidad la función:

$$\ln(q_{xt}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon'_{xt}$$

Relaciona las tasas de mortalidad por edad, parámetros a_x y b_x , con un único factor no observable, k_t , para las características de la mortalidad en el año t conocidas como índice de mortalidad. El resultado de nuestro ajuste a la población andaluza son



Cuadro A.1. Parámetros a_x y b_x del modelo de Lee – Carter ajustados a la población andaluza.



Cuadro A.2. Parámetros k_t del modelo de Lee – Carter

Para la serie temporal del parámetro k_t , han ajustado bien los modelos $ARIMA(0,1,0)$

$$k_y = k_{y-1} - 1,1122 + \varepsilon_y \quad \text{para hombres y}$$

$$k_y = k_{y-1} - 1,3561 + \varepsilon_y \quad \text{para mujeres.}$$

Anexo 2. Resultado para la opción de participación en beneficios del ejemplo del Best Estimate de Seguros de Vida

k	j	1	2	3	4	5
1	2			0,752883	0,821557	0,906367
	1		0,743256	0,791192	0,850558	0,923014
	0		0,791728	0,831455	0,880584	0,939967
	-1		0,843357	0,873764	0,911669	0,957232
	-2			0,918224	0,943851	0,974813
0	2			0,766259	0,832214	0,912824
	1		0,759379	0,805248	0,861592	0,929590
	0	0,781374	0,808901	0,846226	0,892007	0,946664
	-1		0,861650	0,889287	0,923495	0,964051
	-2			0,934537	0,956095	0,981758
-1	2			0,779872	0,843010	0,919327
	1		0,775851	0,819554	0,872768	0,936213
	0		0,826447	0,861260	0,903579	0,953408
	-1		0,880341	0,905086	0,935475	0,970920
	-2			0,951140	0,968497	0,988753

Cuadro A.2. Valoración en el árbol conjunto para el tipo de interés libre de riesgo y el tanto de mortalidad de las PTSV.

Anexo 3. Resultado para el ejemplo del Best Estimate de Seguros de Vida

k	j	1	2	3	4	5
	2			0,083375	0,066241	0,039222
	1		0,057017	0,052384	0,042024	0,024823
1	0		0,022081	0,020466	0,016890	0,009882
	-1		0,007751	0,004943	0,002055	
	-2			0,002276	0,000868	
	2			0,084856	0,067100	0,039502
	1		0,058254	0,053314	0,042569	0,025000
0	0	0,025165	0,022560	0,020830	0,017109	0,009953
	-1		0,007919	0,005031	0,002082	
	-2			0,002316	0,000879	
	2			0,086363	0,067970	0,039783
	1		0,059517	0,054261	0,043121	0,025178
-1	0		0,023049	0,021200	0,017331	0,010024
	-1		0,008091	0,005121	0,002109	
	-2			0,002357	0,000891	

Cuadro A.3. Árbol de valoración de la opción de PB de las PTSV incluyendo riesgo de crédito, con difusión para el tipo de interés libre de riesgo y el spread por riesgo de crédito.