UNA APROXIMACIÓN A UNA OPERACIÓN DE SEGURO DE AUTOS MEDIANTE LA TÉCNICA *FUZZY*

Raquel Caro Carretero
Profesora de la Universidad Pontificia Comillas

Resumen

En el presente trabajo se pretende analizar algunas de las ideas básicas que subyacen en la lógica borrosa y describir su posible aplicación en la Ciencia Actuarial. En este sentido, se ofrece una definición flexible de *"buen conductor"*. Para ello, se considera la Estadística Común que presenta UNESPA (Dirección General de Seguros) en el Informe Actuarial del Seguro de Responsabilidad Civil del Automóvil del año 1997 para la categoría de turismos[37].

La metodología desarrollada en el área de conjuntos borrosos puede aplicarse de manera exitosa en varias áreas de la Ciencia Actuarial, como pueden ser las predicciones a largo plazo, la estimación y la clasificación de riesgos, o la tarificación del seguro.

Key Words. Lógica clásica, lógica fuzzy, predicado vago, conjunto borroso, función de pertenencia, seguro de responsabilidad civil del automóvil.

1. Introducción

La mayoría de los actuarios confían en la *axiomática probabilística de Kolmogorov*, y en número creciente utilizan el *enfoque bayesiano.* No obstante, ambos modelos descansan en la hipótesis que los resultados de un evento aleatorio pueden observarse y ser identificados con precisión. La *probabilidad* y la *estadística* son herramientas básicas, utilizadas por el actuario para desarrollar modelos que describen la frecuencia media de siniestralidad y la cuantía de los siniestros.

[37] La Estadística Común sirve de base para el cálculo de las tarifas de primas. La muestra manejada representa el 45,12% de la cuota de mercado del Ramo de Automóviles.

No obstante, una parte importante del trabajo de un actuario se basa en hacer estimaciones conservadoras de los riesgos que luego ofrece a los asegurados a través de un contrato de seguro. Así, y en la medida que los actuarios hacen predicciones, la *lógica borrosa* (en adelante, lógica fuzzy) debería atraer su interés, dado que manejan ciertas magnitudes que son difíciles de definir en forma *precisa* a la hora de adoptar decisiones, proceso altamente subjetivo. De hecho, uno de los principios económicos básicos en que se fundamenta el seguro es el de la utilidad. El seguro existe porque los tomadores de decisiones tienen aversión al riesgo. Se puede decir, por tanto, que debido a la percepción cambiante del mundo, un decisor *no* tiene una función de utilidad cierta e invariable, sino incierta y variable asociada a un resultado modelado posiblemente por conjuntos borrosos.

De esta forma, se podría discutir la aplicación de la teoría de los conjuntos borrosos a la formalización de la *imprecisión*, la *vaguedad*, así como la *incertidumbre*[38] en modelos aplicados por actuarios

2. ¿Qué es la lógica fuzzy?

La lógica es la Ciencia que estudia los principios formales y normativos del razonamiento. Dentro de ésta, la lógica clásica estudia aquellos principios que se refieren al razonamiento *deductivo*, como el que se realiza en el campo de las matemáticas. La lógica fuzzy se refiere a los principios formales del razonamiento *aproximado*, considerando el enfoque clásico (razonamiento *preciso*) como un caso límite incluido en el anterior.

El origen de la lógica fuzzy y de la teoría de conjuntos borrosos se remonta a 1965, fecha en la que Lotfi A. Zadeh, profesor de la Universidad de California de Berkeley, introdujo el concepto de conjunto borroso o difuso [Zadeh, 65].

Desde que L.A. Zadeh publicó su trabajo, la teoría de conjuntos borrosos ha recibido cada vez más atención por parte de investigadores en una variedad de áreas científicas. Y a pesar de ser la lógica fuzzy un campo recientemente desarrollado dentro de las matemáticas, en los más de treinta años de su

[38] En muchas ocasiones se utiliza el término *incertidumbre* en su sentido amplio para englobar a los tres conceptos.

existencia se ha producido gran número de contribuciones teóricas y aplicadas, entre ellas, la aparición en el mercado de multitud de productos de gran consumo (cámaras fotográficas, lavadoras, sistemas de freno, etc.), originando lo que se conoce como *tecnología fuzzy*. Cabe destacar que España ha sido uno de los primeros países del mundo en la investigación de la lógica fuzzy, sobre todo en sus aspectos teóricos. Desde luego, en el día de hoy, no creemos exagerar al decir que se investiga y se publica mucho más en este campo que en el nuestro de la Ciencia Actuarial. De hecho, hay formado un grupo mucho más internacional y se publican, de forma periódica, revistas científicas que están contribuyendo a nuevos desarrollos teóricos y prácticos en el campo del análisis de riesgo, inteligencia artificial (sistemas expertos), análisis y clasificación de patrones y toma de decisiones.

3. Lógica fuzzy versus lógica clásica

Los conjuntos borrosos surgen como un intento de superar la rigidez de la teoría clásica de conjuntos (álgebra de Boole) a la hora de clasificar elementos de un universo conocido que responden a una determinada propiedad, de manera que no sólo la verifican o no la verifican, sino que en muchos casos la verifican parcialmente; es decir, es sobre la base de razonamientos "débiles" por oposición a los "fuertes" de las matemáticas clásicas. Por tanto, es menos una cuestión de sí o no que una cuestión de grado. De esta manera, la teoría de conjuntos borrosos aparece asociada a una lógica multivaluada, así como la teoría clásica de conjuntos se basa en la lógica bivaluada de Boole. Mientras en el álgebra de Boole un elemento está contenido o no en un conjunto dado, en la teoría de conjuntos borrosos la transición entre la pertenencia y no-pertenencia es gradual y no brusca: un elemento puede "más o menos" pertenecer a un conjunto.

La lógica booleana, puramente binaria, apareció al principio como la herramienta matemática más potente para modelar agrupamientos y discriminaciones. Si se considera que un individuo está vivo o muerto, es fácil la comparación de éste con otros individuos. Así, si se considera este atributo u otros, se puede agrupar o discriminar. No obstante, algunos de los atributos descriptivos de un individuo vienen definidos por medio de cantidades *imprecisas* o *aproximadas*, o corresponden a situaciones cualitativas no forzosamente binarias. Por esto, la organización de una colección de objetos en forma de grupos tiene que sobrepasar la idea puramente de clasificación lógica estricta. La lógica fuzzy ofrece un modelo de la percepción clasificadora del universo gracias a la posibilidad de permitir la atribución de un individuo a tantas clases y en el grado en que sea necesario.

La lógica fuzzy difiere de los sistemas lógicos convencionales en su capacidad para suministrar un modelo para el razonamiento que tiene más de *aproximado* que de *preciso*. La lógica clásica bivalente trata sobre el razonamiento con proposiciones que siempre van a ser o verdaderas o falsas. No obstante, en el lenguaje común con el que nos comunicamos, muchas de las proposiciones no pueden considerarse ni del todo verdaderas ni del todo falsas. Nuestro lenguaje ordinario está plagado de conceptos vagos y juicios aproximados, tales como "gente joven", "coche rápido", "temperaturas bajas", etc., expresados a través de propiedades que no admiten una transición brusca del cumplimiento al no-cumplimiento de las mismas. Por ello, una forma natural de modelar estos predicados es mediante el uso de conjuntos borrosos. De esta manera, si se intenta clasificar a los habitantes de una ciudad utilizando un conjunto clásico, al definir el predicado "joven" se precisa de otro del tipo "es joven todo habitante con menos de *h* años". Así, muchos habitantes con solo tener *h* años o *h* años y un día se les calificaría automáticamente como no-jóvenes.

De la misma forma, y dentro de un plano actuarial, si se considera el conjunto de "*conductores jóvenes*", en álgebra booleana, un individuo o pertenece o no pertenece al conjunto de "*conductores jóvenes*". Esto implica que un individuo se movería de la categoría "*conductores jóvenes*" al conjunto complementario "*conductores no-jóvenes*".

La teoría de conjuntos borrosos puede suministrar procesos de decisión que son mucho más flexibles que aquellos originados por la teoría convencional de conjuntos. Además, los actuarios, mucho más dados a tratar con incertidumbre que con vaguedad, han transformado con frecuencia conceptos imprecisos en reglas de "todo o nada". Tal es el caso de las aseguradoras belgas que han utilizado la evidencia estadística borrosa "*jóvenes conductores provocan más accidentes de automóvil*" unida a la regla de tarificación a posteriori "*conductores por debajo de 23 años pagarán una franquicia determinada si producen un siniestro*". De esta manera, joven equivaldría a "*debajo de 23 años*". ¡Un individuo con 23 años es joven y un individuo con 23 años y un día no es joven! La teoría de conjuntos borrosos permite grados de pertenencia. Dependiendo de la aplicación específica, se debería decidir, por ejemplo, que conductores por debajo de 20 son definitivamente jóvenes y aquellos que superen los 30 años son definitivamente no-jóvenes y que un conductor con 23 años es "más o menos" joven o que es joven con un grado de pertenencia de 0,7 en una escala de 0 a 1. El hecho de tomar una escala numérica, como el intervalo [0, 1], permite una representación conveniente del grado de pertenencia. En este sentido la teoría de conjuntos borrosos puede proporcionar una definición más flexible del concepto "*jóvenes conductores*".

4. Conceptos matemáticos básicos

4.1. Predicado vago. Conjunto borroso

Un *predicado vago* es un predicado, al que llamamos **A** (el nombre de una propiedad de los objetos, nombre o etiqueta lingüística), que al aplicarlo a una cierta colección **U** de objetos, el *universo del discurso*, ésta no queda completamente clasificada en sólo dos subclases. Los predicados que clasifican a **U** en dos conjuntos complementarios son los predicados clásicos. Por ejemplo si **U** es el conjunto de los números naturales y **A** es el predicado primo, U queda clasificado en los conjuntos

$$\mathbf{A_1 = \{x \in U, x \text{ es primo}\}}$$
$$\mathbf{A_0 = \{x \in U, x \text{ no es primo}\}}$$

puesto que cualquier número natural es primo o no lo es, y teóricamente no hay ninguno del que se dude si estará en A_1 o en A_0.

Sin embargo, si **U** = [18, 35] y el predicado es **A** = "*joven conductor*", entonces no es posible una clasificación perfecta de **U** en solo dos clases, ni lo es en tres, ni lo es en ningún número de clases. Siempre quedan elementos de **U** por clasificar. Con seguridad $18 \in \mathbf{A_1} = \{\mathbf{x \in U, x \text{ es joven}}\}$ y $35 \in \mathbf{A_0} = \{\mathbf{x \in U, x \text{ es no joven}}\}$. Pero un individuo con 23 años, ¿es "*joven conductor*" o no es "*joven conductor*"*?* Con el predicado **A** podemos hablar de "*joven conductor*" como de algo variable que se distribuye sobre todo U = [18, 35]. Así, dados **A** y U = [18, 35], μ_A: **U** $\rightarrow$**[0, 1]** será su *función de pertenencia*, tal que el número $\mu_A(\mathbf{x})$ representa el grado con el que **x** es compatible con **A**. El grado de pertenencia de un objeto a un conjunto se representa por medio de un numero real entre 0 y 1, límites clásicos de la lógica fuzzy, donde 0 representa la no-pertenencia y 1 la pertenencia completa. Por tanto, esta definición generaliza el concepto de un conjunto no borroso.

La hipótesis o principio de extensión de los predicados borrosos establece que, dada la terna (U, P, μ_A)[39], queda definido un conjunto $\tilde{A}$, al que todo elemento **x** de **U** "pertenece" con un grado de pertenencia $\mu_A(\mathbf{x})$ y al que daremos el nombre de *conjunto borroso*. Por comodidad, y siempre que ello no induzca a equívocos, se representa al conjunto borroso con la misma letra y tipo de letra que al predicado vago que lo origina.

4.2. La función de pertenencia

La función de pertenencia es una generalización de una función característica de un conjunto clásico, fuerte o nítido ("crisp set", en la teminología sajona), **C**, que se representa como

$$\mathbf{X_C : X \rightarrow \{0, 1\}} \qquad / \qquad \mathbf{X_C\,(x)} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in C \\ 0, & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

El punto clave del trabajo pionero de L.A. Zadeh es el reemplazo de la función característica binaria de los elementos de un conjunto clásico o nítido por una función característica con un intervalo en la recta real como condominio. Por tanto, los conjuntos borrosos extienden la noción de conjunto a una pertenencia parcial del mismo, representada por una función de pertenencia.

La función de pertenencia define cómo de similar es un objeto al concepto del conjunto. En un conjunto clásico la función de pertenencia es 0 ó 1 (o es completamente similar o es completamente diferente al conjunto). En conjuntos borrosos, la función de pertenencia tiene un rango de 0 a 1 e incorpora todos los valores posibles entre estos dos.

Cabe destacar la dificultad práctica de establecer la función de pertenencia, esencial para tener definido operativamente un conjunto borroso. Por tanto, el problema que se nos plantea es el de determinar la correspondiente función μ_A: **U→[0, 1]**, dado un predicado **A** sobre un universo **U**, ya que tal función no es única y depende del contexto. Las funciones de pertenencia pueden determinarse sobre la base de criterios individuales subjetivos u objetivos, criterios colectivos, procedimientos experimentales, etc. Ello implica la no determinación biunívoca de un conjunto borroso.

[39] U como universo del discurso, A como predicado vago y μ_A como su función de pertenencia.

Dentro de la flexibilidad que permite la definición de función de pertenencia de un conjunto borroso y cara a las aplicaciones, además de funciones de tipo "lineal"[40], como la triangular, la sigmoidal o la trapezoidal (se muestran en la figura 1.b), c) y d), respectivamente), en otros casos, y por necesidad de una cierta regularidad de estas funciones en lo que a su continuidad y derivabilidad se refiere, se utiliza, entre otras, la función sigmoidal en su forma más general, conocida también como curva logística (ver figura 2) y que puede servir como una "suavización" de la figura 1.c).

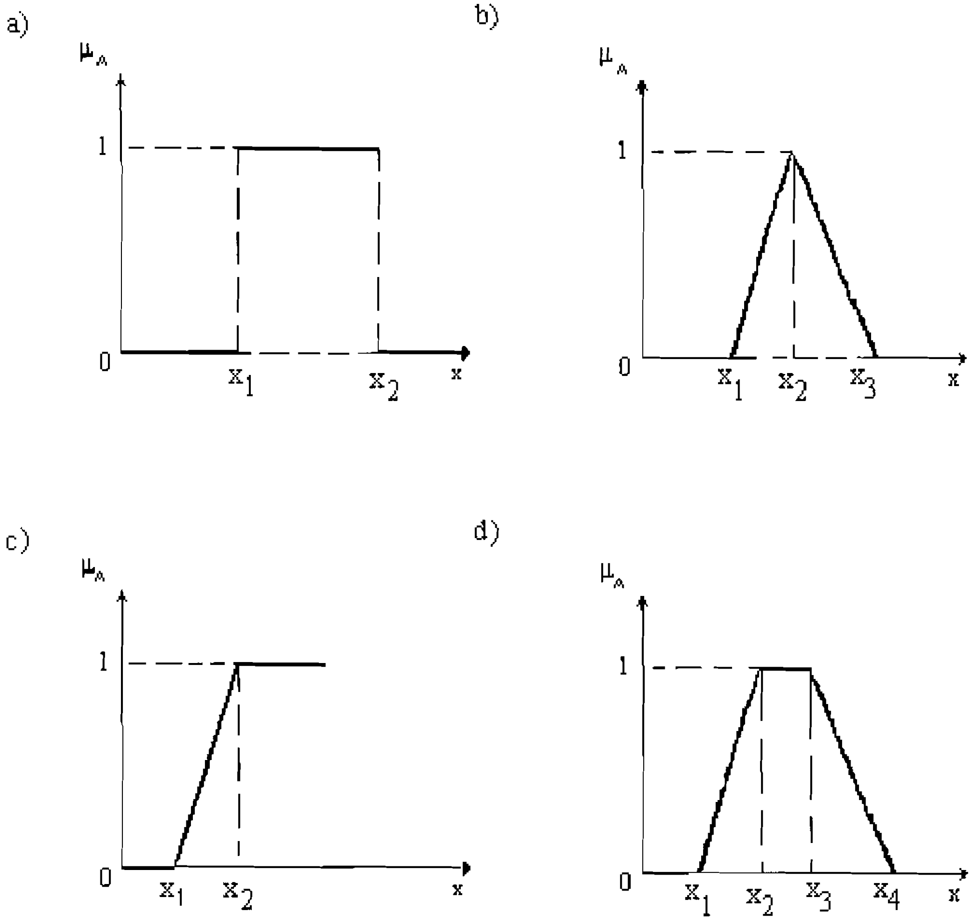

Figura 1.- Formulaciones lineales

[40] El caso a) corresponde a la gráfica de la función de pertenencia de un predicado clásico, es decir, a la gráfica de la función característica del conjunto clásico.

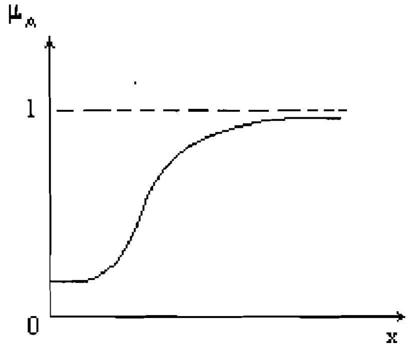

Figura 2.- Curva logística

El eje de abscisas x representa una escala numérica en la que se agrupan los elementos de **U** gracias a una determinada característica.

El problema de la estimación práctica de las funciones de pertenencia no ha sido sistemáticamente estudiado en la literatura sobre conjuntos borrosos. Sin embargo, se han sugerido por algunos autores, de forma independiente, algunas ideas y métodos [Dubois y Prade, 80]. No obstante, en todos los métodos de estimación de la función de pertenencia se aprecia la carencia de generalidad.

4.3. Definición de las operaciones básicas en conjuntos borrosos

Los conjuntos borrosos pueden ser sometidos a similares operaciones que los conjuntos clásicos, dado que los primeros son una generalización de los segundos.

La cuestión clave es la extensión de las operaciones entre conjuntos definidos en la lógica clásica a conjuntos borrosos. A diferencia de lo que sucede en la lógica clásica, hay muchas formas de definir estas operaciones.

La extensión natural del álgebra clásica se puede presentar de la forma que seguidamente se comenta.

a) Complementariedad

Si $\widetilde{A}$ = (**A**, μ_A) es un conjunto borroso de **U**, entonces su complementario $\widetilde{A}^c$ es un conjunto borroso de **U** con la función de pertenencia,

$$\mu_A^c\,(x) = 1\text{-}\mu_A\,(x) \qquad\qquad \forall\, x \in U$$

Esta definición no es la única aceptable del complementario pero sí la usual.

G.J. Klir y T.A. Folger [Klir y Folger, 88] especifican dos requerimientos axiomáticos para esta operación.

Una característica importante de muchos predicados vagos es tener asociado su antónimo, que es otro predicado vago. En general, no coincide el antónimo de **A** (**Ant A**) con la negación o complementariedad de **A**, $\widetilde{A}^c$.

b) Intersección

La intersección de dos conjuntos borrosos (**A**, μ_A) y (**B**, μ_B) se define como el conjunto borroso (**C**, μ_C) tal que

$$\mu_C = \min\,(\mu_A(x), \mu_B(x)) \qquad\qquad \forall\, x \in U$$

La intersección borrosa general de dos conjuntos borrosos **A** y **B** se especifica por una función **i: [0, 1]x [0, 1]** $\rightarrow$ **[0, 1]** tal que

$$\mu_{A\cap B}(x) = i\,(\mu_A(x), \mu_B(x)) \qquad\qquad \forall\, x \in U$$

G.J. Klir y T.A. Folger [Klir y Folger, 88] amplían esta definición clásica especificando los axiomas de la intersección de conjuntos borrosos.

Además del operador **mín** se puede utilizar otro operador intersección diferente, como por ejemplo el *producto algebraico* [Dubois y Prade, 80],

$$\mu_{A\bullet B}\,(x) = \mu_A\,(x) \bullet \mu_B\,(x) \qquad\qquad \forall\, x \in X$$

La elección de un determinado operador está en función de la naturaleza del problema, aunque el operador **min** es el más utilizado.

c) Unión

La unión de dos conjuntos borrosos $(\mathbf{A}, \mu_A)$ y $(\mathbf{B}, \mu_B)$ se define como el conjunto borroso $(\mathbf{C}, \mu_C)$ tal que

$$\mu_C(\mathbf{x}) = \mathbf{max}\ (\mu_A(\mathbf{x}), \mu_B(\mathbf{x})) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{U}$$

La unión borrosa general de dos conjuntos borrosos se especifica por una función $\mathbf{u}$: $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]\mathbf{x}[\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ que produce los valores de una función de pertenencia de $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ tal que

$$\mu_{A\cup B}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mu_A(\mathbf{x}), \mu_B(\mathbf{x})) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{U}$$

G.J. Klir y T.A. Folger [Klir y Folger, 88] especifican una serie de requerimientos axiomáticos de la función **u**, como una justificación de la elección del operador **max**.

Además del operador **max** se puede utilizar otro operador unión diferente, como puede ser la *suma probabilística* [Dubois y Prade, 80]:

$$\mu_{A+B}(\mathbf{x}) = \mu_A(\mathbf{x})+\mu_B(\mathbf{x})-\mu_A(\mathbf{x}).\mu_B(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{U}$$

E. Trillas [Trillas *et al.*, 93] muestra cómo t-normas y t-conormas se pueden utilizar para generalizar la definición de la unión e intersección borrosa. Las t-normas y t-conormas se incluyen en la clase general de t-operadores. Éstos son importantes porque dan más flexibilidad que la lógica clásica, al preservar las propiedades básicas de la unión e intersección en al ámbito clásico.

Al operador de la intersección se le suele asociar con el conector lingüístico "*y*", así como el operador unión actúa como conector "*o*" y el complementario actúa como el modificante "***no***". Estos operadores son esenciales para el adecuado uso de las funciones de implicación borrosa, es decir, el análisis de situaciones del tipo:

si $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$, entonces $\mathbf{A_3}$.

Se define modificador lingüístico como una partícula lingüística que, antepuesta a un predicado vago, sigue originando un predicado vago, de extensión mayor o menor que la del predicado original.

En sistemas clásicos el único modificador de predicados frecuentemente usado es la negación. En la lógica fuzzy existe una variedad de modificadores lingüísticos de predicados. Los dos más importantes son MUY y MÁS O MENOS, que antepuestos al predicado vago **A**, originan otros dos predicados vagos, **MA** y ± **A**. El primero tiene menor extensión que **A**. Se le puede asociar, entre otras, la siguiente función de pertenencia,

$$\mu_{MA}(x) = [\mu_A(x)]^2 \qquad \forall x \in U$$

Gráficamente:

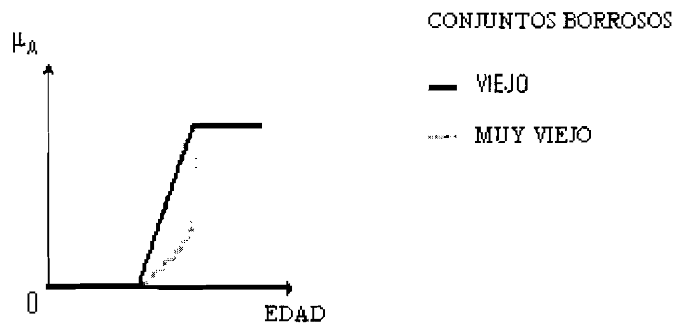

Figura 3.- Modificador lingüístico MUY

Si el universo del discurso está formado por los habitantes de una población determinada y consideramos el conjunto borroso de los que son viejos, podemos distinguir el de los MUY viejos. Esto no sucede con los conceptos exactos; por ejemplo el concepto primo es exacto ya que la misma definición solo permite clasificar entre primo y no primo y no distingue muy primo de primo.

El segundo de los modificadores tiene mayor extensión que **A** y se le asocia, entre otras, la función de pertenencia

$$\mu_{\pm A}(x) = +\sqrt{\mu_A(x)}$$

Tales modificadores juegan un papel esencial en la generación de valores de una variable lingüística[41] interpretados como etiquetas de conjuntos borrosos del intervalo unidad.

Se pueden obtener los "valores lingüísticos" de la variable lingüística "edad" con la familia de modificadores de la siguiente manera:

J = "joven"
Ant J = "viejo" = V
MJ = "muy joven"
±J = "más o menos joven" = de mediana edad

Por limitación probada en la capacidad de la mayoría de los humanos en graduar variables lingüísticas, es aconsejable que el número de "valores" de estas variables oscile entre 3 y 7.

De esta manera, la cartera de asegurados en una entidad aseguradora se puede representar, por ejemplo, a través de tres conjuntos borrosos (joven, mediana edad y viejo).

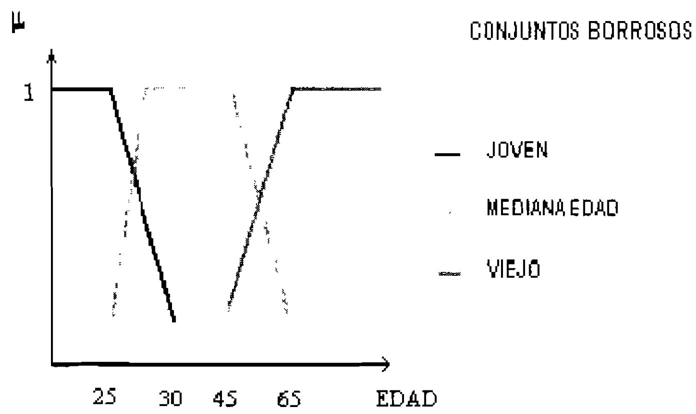

Figura 4.- Conjuntos borrosos definidos en el universo edad

[41] Una variable lingüística es, en el contexto de la lógica fuzzy, el nombre de un predicado vago. Es decir, una variable que toma valores que son palabras o sentencias de un lenguaje.

5. Contribuciones en el campo actuarial

La lógica fuzzy es, relativamente, una nueva disciplina dentro de las matemáticas en un proceso constante de cambio. Es posible que la Ciencia Actuarial, basada en los modelos probabilísticos clásicos, no gane mucho en aplicaciones inmediatas de conjuntos borrosos en este campo. Sin embargo, la metodología desarrollada en el área de conjuntos borrosos puede aplicarse de manera exitosa en varias áreas de la Ciencia Actuarial, como pueden ser las predicciones a largo plazo, la clasificación de riesgos, la suscripción, la estimación de riesgos o la tarificación del seguro.

Los conjuntos borrosos han sido aplicados recientemente a problemas de decisión del seguro. Cabe destacar algunos trabajos en este campo: G.W. DeWit [DeWit, 82] describe cómo utilizar conjuntos borrosos en seguros de vida individuales, J. Lemaire [Lemaire, 90] extiende este trabajo aportando una definición flexible de "tomador preferido". También V. Young [Young, 93] aplica de manera similar su técnica a seguros de vida colectivos y J.D. Cummins y R.A. Derrig [Cummins y Derrig, 93] aplican la lógica fuzzy para calcular "tendencias" borrosas en el seguro de daños propios.

5.1. Clasificación de los riesgos

La clasificación de los riesgos es uno de los temas de más controversia en el sector asegurador en nuestros días, y sobre todo si dichas controversias están basadas en criterios de alguna importancia social. En el seguro de vida, el distinguir entre hombre y mujeres puede verse como una discriminación de sexos en el mundo del trabajo. En el seguro de accidentes, las tarifas del seguro del automóvil, considerando el lugar de residencia, pueden verse como discriminatorias entre aquellos que viven en el interior de la ciudad y los que no. Como C.L.Trowbridge [Trowbridge, 89] apuntaba, el seguro de automóvil para los habitantes del interior de la ciudad, no se puede ver como favorable para ellos, ya que se considera automáticamente que tienen mayor riesgo.

Una de las principales razones por las que entra a debate la clasificación es porque con frecuencia, correctamente o no, se suele asociar la clasificación con una discriminación del precio. J.Stiglitz [Stiglitz, 77] hace un estudio de la discriminación del precio en el seguro de accidentes. Considera que existen dos grupos de consumidores: los de bajo riesgo y los de alto riesgo. Para que se dé el equilibrio en precios, los dos grupos de consumidores (en este caso, con diferentes riesgos) nunca deben comprar el mismo contrato. El modelo, aunque simplificado, suministra una visión significativa dentro de la economía del seguro. Los resultados de Stiglitz indican que una clasificación de riesgos no es una discriminación de precios.

En el caso de clasificación del riesgo, el propósito es distinguir entre riesgos que son significativamente diferentes. Una población con el 90% de individuos con alto riesgo y el 10% de individuos de bajo riego será significativamente diferente de aquella que tenga 10% de individuos de alto riesgo y 90% de individuos de bajo riesgo. No obstante, la significatividad estadística puede no ser suficiente. Así, se puede tener una forma más eficiente de clasificar los elementos de una población de acuerdo con el riesgo cuando se emplean los *métodos de agrupamiento (clustering) borrosos* [Ostaszewski, 93].

Los algoritmos[42] clásicos de agrupación generan patrones de forma que cada objeto es asignado a exactamente un grupo. Con frecuencia, sin embargo, los objetos pueden no pertenecer totalmente a un grupo, porque están de alguna manera "entre" varios. Los métodos de agrupación borrosos son una herramienta poderosa para representar la estructura de los datos en una situación determinada.

J.Lemaire [Lemaire, 90] aplica la teoría de conjuntos borrosos para suministrar una definición más flexible que las utilizadas actualmente por algunas entidades aseguradoras, del concepto "tomador preferido" en seguro de vida.

5.2. Tarificación en el seguro

La lógica fuzzy puede utilizarse para la toma de decisiones, en cuanto a la tarificación del seguro se refiere, cuando el asegurador considera objetivos lingüísticos imprecisos o "borrosos", es decir, la variable objetivo toma un valor que es un adjetivo. La lógica fuzzy permite combinar objetivos y restricciones en conflicto. En este sentido V.Young [Young, 96], teniendo en cuenta los datos del seguro de vida colectivo de una compañía de seguros, muestra cómo construir y poner en funcionamiento un modelo de lógica

[42] Intuitivamente, se suele asociar la idea de algoritmo con un conjunto de pasos y operaciones que permiten obtener un cierto resultado a partir de unos datos iniciales.

fuzzy en el cambio de tarifas cuando se tiene en cuenta alguna restricción o información secundaria.

Con frecuencia los actuarios y todos aquellos que toman decisiones en el ámbito del seguro consideran como información secundaria los datos estadísticos que se refieren a la experiencia de siniestralidad y que, generalmente, no incluyen explícitamente en sus modelos de tarificación. Se podrían plantear reglas que reflejan la filosofía de la empresa, tales como "se requieren tarifas *estables*". Éstas pueden comprometer la información competitiva o volumen de ventas, y un actuario podría crear reglas que representen cómo esos datos afectan a la tarificación. Las reglas también pueden incluir datos financieros, tales como, "aumentar las tarifas si se experimenta un ratio de pérdida alto o un beneficio marginal bajo o una cantidad insuficiente de negocio suscrito o renovado".

La teoría de conjuntos borrosos suministra un camino para tratar de manera explícita y consistente estas restricciones lingüísticas. A través de conjuntos borrosos se puede dar respuesta a nociones imprecisas cuyos límites no están claramente definidos, como puede ser el concepto de "tarifas estables".

Poniendo un ejemplo, se puede decir que al principio del año, un actuario debe plantearse: "si el número de pólizas de seguro decrece un cierto porcentaje durante ese año, entonces debería disminuir la tasa en ese porcentaje". Esta regla es precisa y nos deberíamos plantear cuestiones como "¿qué haré si el número de pólizas de mi compañía decrece una cantidad *moderada*?". Esto puede conducir a la sentencia borrosa de implicación "si el número de pólizas de mi compañía decrece una cantidad *moderada*, entonces disminuiré la tasa *moderadamente*". Cabe destacar que esta sentencia borrosa tiene más información que la sentencia no borrosa.

5.3. Una aplicación de la técnica fuzzy

Vamos a aplicar la teoría de conjuntos borrosos con la intención de suministrar una definición más flexible del concepto "*buen conductor*". Se considera el Informe Actuarial del Seguro de Responsabilidad Civil del Automóvil del año 1997, con datos de 1995, que presenta UNESPA (Dirección de Seguros).

La elevada competencia entre las entidades aseguradoras ha dado lugar a una gran subdivisión de los tomadores. El concepto de "*buen conductor*" para las entidades aseguradoras, en el sentido de tomador preferido, se ha modificado una y otra vez y como resultado se han venido aplicando descuentos según el solicitante cumpla determinados requerimientos, como por ejemplo, en el número de siniestros o en su cuantía. De hecho, es una estricta interpretación del criterio "*personas que tengan menor número de siniestros con menor cuantía, son mejores conductores*". De esta manera, se demanda una serie de condiciones de forma estricta.

Si se considera un número de siniestros superior a la frecuencia media que refleja la Estadística Común que presenta Unespa y que sirve de base para el cálculo de las tarifas de primas, ¡esto implicaría que las tarifas de tomador preferido no se pueden aplicar, incluso si el tomador cumple el resto de requisitos!

La teoría de conjuntos borrosos puede aplicarse para suministrar una definición más flexible de "*buen conductor*". Se considera el criterio:

"si el solicitante en cuestión tiene una frecuencia media de $\mathbf{r}_1$, un coste medio por siniestro de $\mathbf{r}_2$ y una edad $\mathbf{r}_3$ con $\mathbf{r}_4$ años de antigüedad en el carnet de conducir, entonces es un *buen conductor*".

Esto significa que un "*buen conductor*" es clasificado como un riesgo preferido. Obviamente, similares consideraciones se pueden dar para solicitantes de alto riesgo.

De esta forma, se propone una solución al problema de definir el riesgo preferido de manera más precisa, pero haciéndolo borroso. Siguiendo a J.Lemaire [Lemaire, 90], cada tomador se representa por un vector de datos $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$, donde

$\mathbf{r}_1$ = la frecuencia media de siniestralidad
$\mathbf{r}_2$= el coste medio por siniestro
$\mathbf{r}_3$ = la edad del conductor en años
$\mathbf{r}_4$ = la antigüedad del carnet de conducir en años

Simplificando, se asume que los requisitos para la consideración de "*buen conductor*" deberían basarse en los valores que toman estas cuatro variables.

Se construye el conjunto borroso $\tilde{A}$ de tomadores con "baja" frecuencia de siniestralidad que se puede definir por la función de pertenencia $\mu_A(\mathbf{x})$[43]:

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & r_1(x) < 0{,}10987 \\ \dfrac{0{,}2764 - r_1(x)}{0{,}16653} & 0{,}10987 \leq r_1(x) < 0{,}2764 \\ 0 & r_1(x) \geq 0{,}2764 \end{cases}$$

donde $\mathbf{r_1(x)}$ es la frecuencia media de siniestralidad del asegurado **x**.

El conjunto borroso $\tilde{B}$ de tomadores con un coste medio "aceptable" que se puede definir por la función de pertenencia $\mu_B(\mathbf{x})$:

$$\mu_B(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & r_2(x) < 248.929 \\ \dfrac{320.060 - r_2(x)}{71.131} & 248.929 \leq r_2(x) < 320.060 \\ 0 & r_2(x) \geq 320.060 \end{cases}$$

donde $\mathbf{r_2(x)}$ es el coste medio por siniestro del asegurado **x**.

El conjunto borroso $\tilde{C}$ de tomadores con una edad "madura" que se puede definir por la función de pertenencia $\mu_C(\mathbf{x})$:

[43] El Informe Actuarial del Seguro de Responsabilidad Civil del Automóvil del año 1997 ha servido de base para la formulación de las funciones de pertenencia.

$$\mu_C(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & r_3(x) < 18 \\ 3\left(\dfrac{r_3(x)-18}{7}\right)^2 & 18 \le r_3(x) < 22 \\ 1-3\left(\dfrac{25-r_3(x)}{7}\right)^2 & 22 \le r_3(x) < 25 \\ 1 & 25 \le r_3(x) < 35 \\ 1-3\left(\dfrac{r_3(x)-35}{30}\right)^2 & 35 \le r_3(x) < 45 \\ 3\left(\dfrac{65-r_3(x)}{30}\right)^2 & 45 \le r_3(x) < 65 \\ 0 & r_3(x) \ge 65 \end{cases}$$

siendo $\mathbf{r_3(x)}$ la edad del conductor $\mathbf{x}$.

Por último, el conjunto borroso $\tilde{D}$ de tomadores con una antigüedad "adecuada" del carnet de conducir que se puede definir por la función de pertenencia $\mu_D(\mathbf{x})$:

$$\mu_D(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & r_4(x) < 3 \\ \left(\dfrac{r_4(x)-3}{3}\right)^2 & 3 \le r_4(x) < 5 \\ 1-\left(\dfrac{6-r_4(x)}{3}\right)^2 & 5 \le r_4(x) < 6 \\ 1 & 6 \le r_4(x) < 11 \\ 1-\left(\dfrac{r_4(x)-11}{9}\right)^2 & 11 \le r_4(x) < 14 \\ \left(\dfrac{20-r_4(x)}{9}\right)^2 & 14 \le r_4(x) < 20 \\ 0 & r_4(x) \ge 20 \end{cases}$$

siendo $\mathbf{r_4(x)}$ la antigüedad del carnet de conducir del asegurado $\mathbf{x}$.

Gráficamente se pueden representar las funciones de pertenencia de los cuatro conjuntos borrosos de la siguiente manera:

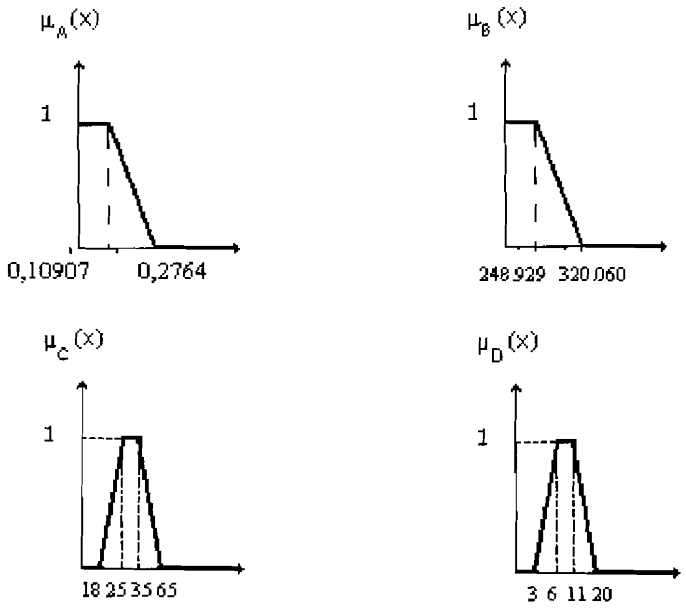

Figura 5.- Funciones de pertenencia

El conjunto borroso $\tilde{P}$ de riesgos preferidos se define como

$$\tilde{P} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C} \cap \tilde{D}$$

Al igual que en la lógica clásica, la noción de intersección está cercana a la noción del conector **"y"**. Si por ejemplo el asegurado **x** está caracterizado, respecto al conjunto *"buen conductor"*, por la cuaterna $\mathbf{r(x) = (r_1(x), r_2(x), r_3(x), r_4(x))}$, su grado de pertenencia a dicho conjunto vendrá dado por

$$\boldsymbol{\mu_P(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x), \mu_D(x))}$$

Un individuo tendrá una pertenencia total en **U** si tiene una frecuencia media de siniestralidad del 0,10987, un coste medio del 248.929, una edad de 25 años y 6 años de antigüedad del carnet de conducir. Esto corresponde a un enfoque clásico.

Un tomador con **r(x) = (0,10; 267.700; 22; 4)**, es decir, con una frecuencia media de siniestralidad del 10%, con un coste medio de siniestralidad de 267.700, con 22 años y 4 años de antigüedad del carnet de conducir, es un individuo con un grado de pertenencia al conjunto "*buen conductor*" dado por:

$$\mu_P(x) = \min \left(\mu_A(x) = 1,\ \mu_B(x) = \frac{(320.060 - 267.700)}{71.131},\ \mu_C(x) = 1 - 3\left(\frac{25-22}{7}\right)^2,\ \mu_D(x) = \left(\frac{4-3}{3}\right)^2\right) = \min\ (1;\ 0{,}73;\ 0{,}45;\ 0{,}11)$$

Esto quiere decir, que la operación intersección asigna un grado de pertenencia que corresponde al criterio que más infringe en la definición de "*buen conductor*"; en este caso **0,11**, que corresponde a la antigüedad del carnet de conducir, variable altamente correlada con la edad del conductor habitual.

Existe la posibilidad de utilizar otros operadores que definen la intersección borrosa y que corresponden a interpretaciones más flexibles del conector "*y*". La selección de un operador concreto dependerá del grado de intersección que se asocie a los diferentes conjuntos implicados.

Este concepto de riesgo preferido que se presenta, es muy simple; consiste en una aplicación directa de los conceptos teóricos de conjuntos borrosos. No obstante, cabe destacar que, aunque otros métodos más complejos pueden ser más potentes, la simplicidad es un punto a nuestro favor, especialmente en aplicaciones. K. Ostaszewski propone otras alternativas dentro de la lógica fuzzy [Ostaszewski, 93].

6. Conclusiones

La teoría de conjuntos borrosos ha sido y seguirá siendo una disciplina a discutir. No obstante, el presente trabajo puede de alguna manera convencer a aquellos escépticos de su utilidad. De hecho será de gran valor para aquellos que estén interesados en tratar los aspectos básicos de la teoría y explorar su potencial como metodología para el tratamiento de fenómenos que son demasiado complejos o se definen de forma no precisa cuando se analizan por métodos convencionales.

Sin embargo, como H.J. Zimmerman [Zimmerman, 91] apuntaba "no hay nada borroso sobre la teoría de conjuntos borrosos. Los métodos matemáticos de conjuntos borrosos son precisos". Paradójicamente, la teoría de conjuntos borrosos no es borrosa, sino matemática y precisa, aunque a veces tienda a parecer técnica en sus detalles.

7. Referencias

- Cummins, J.D. y Derrig, R.A. (1993): *Fuzzy Financial Pricing of Property-Liability Insurance.* Working Paper, Center for Research on Risk and Insurance. Wharton School of the University of Pennsylvania. Philadelphia.
- DeWit, G. W.(1982): *Underwriting and Uncertainty, Insurance.* Mathematics and Economics 1, pp. 277-285.
- Dubois, D y Prade, H (1980): *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Academic Press, Ltd. London.
- Klir, G.J. y Folger, T.A. (1988): *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information.* Prentice Hall. Englewood Cliffs. New Jersey.
- Lemaire, J. (1990): *Fuzzy Insurance.* ASTIN Bulletin 20, pp. 33-55.
- Ostaszewski, Krzysztof M. (1993): *An Investigation into Possible Applications of Fuzzy Set Methods in Actuarial Science.* A.S.A. Society of Actuaries. USA.
- Stiglitz, J. (1977): *Monopoly, Non-linear Pricing and Imperfect Information: The Insurance Market.* Review of Economic Studies 44, pp. 407-430.
- Trillas, Enric y Gutiérrez Ríos, Julio (1992): *Aplicaciones de la Lógica Borrosa.* Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC). Madrid.
- Trillas, Enric *et al.* (1994): *Fundamentos e Introducción a la Ingeniería "Fuzzy".* Omron Electronics S.A. Madrid.
- Trowbridge, C. L. (1989): *Fundamental Concepts of Actuarial Science.* Actuarial Education and Research Fund. Schaumburg, Illinois.
- Young, Virginia R. (1996): *Insurance Rate Changing: A Fuzzy Logic Approach.* The Journal of Risk and Insurance, volumen 63, nº 3, pp. 461-484.

- Zadeh, L. A. (1965): *Fuzzy Sets*. Information and Control 83, pp. 338-353.
- Zadeh, L.A. (1973): *Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cibernetics SMC-3, pp. 28-44.
- Zimmerman, H. J. (1991): *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Second Edition. Kluwer Academic Publishers. Massachusetts.