

UNA PREDICCIÓN DE LOS TANTOS DE MORTALIDAD GENERAL

Dr. Amancio Betzuen Zalbidegoitia
*Catedrático de Matemática Financiera y Actuarial
de la Universidad del País Vasco*

KEYWORDS

Predicción, censo, tanto de mortalidad, edades, tiempo de calendario.

ABSTRACT

En este trabajo se pretende predecir los tantos de mortalidad futuros a 10 o 20 años a partir de los datos censales correspondientes a los años censales desde 1900 hasta 1990. Los datos generales que se utilizan están abreviados por edades quinquenales y la fórmula que se elige para el ensayo es la ley de Heligman y Pollard. Se dispone de datos observados para la población masculina y femenina y el ensayo se realiza para cada uno de los colectivos por separado.

1. INTRODUCCION

El Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, aprobado por Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre, en el Capítulo II, sección 1ª que se refiere a las Provisiones Técnicas, en su artículo 34 hace referencia expresa a las tablas de mortalidad, entre otras. En dicho artículo establece una serie de requisitos entre las que se encuentra el periodo de observación considerado para la elaboración de dichas tablas. En particular, en el apartado c) del punto 1 indica que dicho periodo no podrá ser anterior en más de veinte años a la fecha de cálculo de la provisión.

Si bien es cierto, que en el apartado siguiente permite elaborar unas tablas basadas en la experiencia propia del colectivo objeto de aplicación de las tablas, siempre cumpliendo una serie de requisitos de carácter estadístico, lo cual, en principio posibilitaría la elaboración de una tabla más actual, no es menos cierto que dichas tablas resultan anticuadas y desviadas en relación a la medida de la mortalidad que pretenden manifestar en los cálculos de la provisión. Como se sabe, dichos cálculos se realizan contemplando el horizonte temporal de las prestaciones futuras.

Por lo tanto, si los cálculos se realizan asumiendo la evolución futura de un colectivo, la tabla de mortalidad debe ser elegida de manera que al menos contemple la estructura del colectivo en el momento presente y no con una antigüedad de veinte años. Para paliar en alguna medida este desfase presentamos un procedimiento para predecir la mortalidad en un plazo futuro, a no más de 20 años. Pensamos que para periodos superiores, la estructura del colectivo se altera, además de en la intensidad de la mortalidad, en la distribución de la intensidad. Esto se puede comprobar cuando se sigue la evolución de la mortalidad de un colectivo a lo largo de un número elevado de años como es nuestro caso.

Queremos dejar de manifiesto que la tabla de mortalidad debe estar referido también al colectivo al que se le aplica. Este no es nuestro caso lamentablemente. Sólo disponemos de datos de la población general y no de una población de asegurados. Queremos indicar también que posiblemente la obtención de los tantos observados no sea todo lo homogénea que hubiéramos querido, no obstante, los mismos se refieren a datos censales desde el año 1900 al año 1990.

2. OBJETO DE ESTE TRABAJO

Hasta fechas recientes los actuarios utilizábamos unas tablas de mortalidad, que en realidad es una representación tabular de una función paramétrica. Esta función paramétrica es, en nuestro caso, un modelo de mortalidad. Antiguamente se referían a este modelo como ley de mortalidad.

Como lo que se obtiene de la experiencia son valores empíricos y estos se corresponden con valores discretos, la función matemática viene a simplificar y al mismo tiempo a representar el "modelo" de mortalidad de un colectivo.

Los colectivos a los que hace referencia el Real Decreto anterior, son colectivos de asegurados, colectivos de rentistas, colectivos de pensionistas, colectivos de activos, etc. Esto significa que cada vez que introducimos en el colectivo de personas una característica diferenciadora surge, como consecuencia, un nuevo grupo cuya homogeneidad como tal se mantiene, siempre y cuando no se introduzcan nuevas características diferenciadoras, que hacen que el colectivo deje de serlo y por consiguiente de nuevo, es necesario separarlo para que el colectivo resultante pueda ser aceptado como homogéneo. Esto es, un colectivo inicial de asegurados deja de ser homogéneo cuando se introduce la característica del sexo, por ejemplo. Desde este punto de vista se considera homogéneo cada uno de los grupos de personas clasificados por sexo.

Como ya quedó indicado, no disponemos de datos como para poder aplicar nuestra metodología a un colectivo de las características antes mencionadas, razón por la cual hemos recurrido a un colectivo que representa la población general. La metodología puede ser aplicada, como tendremos ocasión de comprobar, para cualquier tipo de colectivo contemplado en la Ley y el Reglamento de Ordenación y Supervisión del Seguro Privado.

Hasta el momento presente, en nuestro País, hemos utilizado, desde el punto de vista práctico, por una parte, modelos que representan al pasado y en algunos casos a un pasado bastante lejano. Por otra parte, modelos que no abarcaban todo el rango de edades de un colectivo de personas, sino que se elegía un rango de edades, digamos central, como por ejemplo, desde los 20 hasta los 75 años, y para los dos rangos de edades extremos, se recurría generalmente a fórmulas de tipo polinómico. De esta manera se formaba una función que proporcionaba datos para construir una tabla de mortalidad desde la edad cero hasta la edad última alcanzable por una persona, esto es, la edad w . Como vemos se realizaba, por así decirlo, ajustes parciales.

Lo que pretendemos en este trabajo, y con el objeto de realizar una aportación a la mejora de la herramienta actuarial que se utiliza en la práctica real y al mismo tiempo que, ésta fuera lo más actual posible, es la de presentar una metodología de estimación indirecta de la mortalidad futura y al mismo tiempo que no se defina sobre un intervalo parcial de edades, sino que el modelo abarque todo el rango de edades de un colectivo de personas.

Estas dos son, a nuestro juicio, buenas razones para proseguir con el trabajo. Así que, para continuar, era necesario buscar una función biométrica definida para todo el rango de edades. Para ello el siguiente paso fue "tantear" los modelos que históricamente cumplían estos requisitos. El primero fue el de Thiele. Esta fórmula, a pesar de su antigüedad es suficientemente flexible y a la vez próxima a nuestro modelo de ensayo.

Recordemos que la fórmula en cuestión es del tipo:

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x)$$

Esto significa que, en realidad, está compuesta de tres fórmulas, que se complementan pero que no son parciales, ni tampoco están definidas "a trozos". Lo interesante de cada una de las fórmulas es que consigue que la influencia de la variación de la mortalidad, en cada periodo de vida de una persona, como es: infantil-niñez-juventud, juventud-madurez, madurez-vejez, en la que se observan algunos cambios en la medida de la mortalidad, quedaran reflejados en la fórmula. A esto responde bastante bien la fórmula del tipo Thiele.

Para entender quizás mejor, lo que se consigue con una fórmula como la citada digamos que la función $f_1(x)$ refleja bastante bien, la fuerte disminución inicial de la mortalidad. Desde los primeros días posteriores al nacimiento, hasta uno o dos meses, la mortalidad disminuye fuertemente, sobre todo al principio, para luego ir aminorando esta progresión decreciente, y así para los 10-12 años llegar a nivelarse.

La función $f_2(x)$ está pensada para que refleje la medida de la mortalidad en un tramo de edades, que podemos indicar de forma aproximada como desde los 12-15 años hasta los 30, 35 ó 40 años. Este tramo, al igual que el primero fue cambiando con el paso del tiempo. Pero esto no solo en intensidad sino que también en estructura. Se trata, por tanto, de un tramo que permite ser tratado según la metodología que a continuación se muestra. No obstante, queremos manifestar que para periodos de calendario superiores a 25, 30 años, la estimación es un poco atrevida, aún incluso disponiendo de datos totalmente fiables hasta el momento final del periodo observado.

Desde el punto de vista práctico Thiele propuso utilizar una función del tipo

$$\mu(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x)$$

en la que cada una de las funciones $\mu_i(x)$ ($i=1,2,3$) tienen su representación principal, en su primer, segundo ó tercer tramo de edades respectivamente.

La expresión que inicialmente Thiele presentó fue:

$$\mu_1(x) = a_1 \exp(-b_1 x)$$

$$\mu_2(x) = a_2 \exp\left[-\frac{1}{2} b_2 (x-c)^2\right]$$

$$\mu_3(x) = a_3 \exp(b_3 x)$$

siendo los siete parámetros positivos.

Cuando se contrastan estas funciones con la evidencia empírica se constata una más que notable aproximación. Así, la primera expresión de Thiele¹, una exponencial negativa, pero del tipo Gompertz, aunque

¹ Thiele, T. N. (1971). "On a mathematical formula to express the rate of mortality throughout the whole of life". JIA. Vol. 16. Thiele fue Profesor de Astronomía en

en sentido decreciente, señala el fuerte decrecimiento inicial de la mortalidad para después ir perdiendo intensidad progresivamente, hasta tal punto que para valores de x superiores a la edad de 20 años dicha expresión no aporta nada y lo mismo ocurre con las otras dos expresiones, que para valores altos de x prácticamente, no aportan valor alguno.

La segunda expresión se corresponde con una función normal (salvando el factor de escala). Dicha expresión es la que presenta una mayor compleja justificación cuando los valores de la mortalidad no muestren una "loma" después de la juventud.

La tercera expresión se corresponde con una función del tipo Gompertz que representa el comportamiento de la mortalidad a edades superiores a la edad media de una persona. Hoy en día, la medida de la mortalidad no sigue exactamente este modelo pero todavía alcanza una más que aceptable representación. Esta expresión una vez estimada no debe aportar valores para edades inferiores a la madurez, tomando valores cada vez mayores a medida que nos acerquemos a la edad final de la tabla.

Observando nuestros datos nos percatamos que, en la primera mitad del siglo pasado, la evolución de la mortalidad perfectamente se podría representar por dos funciones. La justificación es clara puesto que la "loma" que surge en la segunda mitad del siglo pasado o más exactamente a partir de los años 70 de calendario, para las edades comprendidas entre la juventud y el principio de la madurez (18-30), no se apreciaba en dicha primera mitad de siglo y, por lo tanto, esta expresión intermedia de Thiele perfectamente pudiera no ser considerada.

Es cierto que, para este caso, también se puede acudir a una función de dos expresiones como la presentada por Wittstein en 1883,

$$q_x = \frac{1}{m} a^{-(mx)^n} + a^{-(M-x)^n}$$

Copenhagen y destacó por sus aportaciones al campo actuarial y a la estadística-matemática.

que está definida en el intervalo de edades $[0, M]$.

Donde M representa la edad mayor alcanzada. Lo que se pretendía con esta función es que la primera expresión fuera la que realizara la aportación de los valores para edades infantiles y edades jóvenes y que su incidencia fuera despreciable para edades adultas y superiores, esto es, que su influencia tendiera a ser nula a medida que creciera la edad x. Tenía que suceder todo lo contrario con la segunda expresión² y, de esta manera, se conjuntaban ambos términos para proporcionar el modelo buscado.

3. LA ELECCION DEL MODELO

Muchos años más tarde Heligman y Pollard, basados en la idea de Thiele presentaron una nueva fórmula que la podemos expresar de la siguiente forma:

$$\frac{q_x}{p_x} = a_1 (x+b_1)^{c_1} + a_2 \exp \left\{ -b_2 \left[\log \left(\frac{x}{c_2} \right) \right]^2 \right\} + a_3 b_3^x \quad 3$$

definida para $x > 0$.

Para $x=0$, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{q_x}{p_x} = \frac{q_0}{p_0} = a_1 b_1^{c_1} + a_3$$

² Tomando la expresión anterior como definida en el campo continuo y derivando respecto de la edad x con el objeto de obtener el valor mínimo de q_x , se obtiene que:

$$q_x(\min) \rightarrow x_{\min} = \frac{M}{m+1}$$

³ Existen otras variantes. Véase el trabajo de Heligman, L. and J.H. Pollard (1980). " The age pattern of mortality". JIA. Vol. 107.

Existen algunas diferencias entre esta fórmula y la de Thiele. Así, encontramos que la primera expresión decrece con mayor intensidad que la de Thiele y además los parámetros toman ciertos valores muy significativos. Por ejemplo, para los resultados por nosotros obtenidos, los valores de los parámetros a_1 están muy próximos a los valores brutos de q_1 y los valores de b_1 están muy próximos a la diferencia entre q_0 y q_1 . Esto significa que cuanto menor sea a_1 menor es la mortalidad a partir del primer año de vida de la persona y cuanto menor sea b_1 menor es la diferencia entre las probabilidades q_0 y q_1 , luego b_1 nos da la medida en la que q_0 se va acercando a q_1 en el transcurso del tiempo de calendario. En opinión de Heligman y Pollard, el parámetro c_1 mide la rapidez en la que el niño se va adaptando a su entorno, esto es, el "ritmo" al que se está capacitando para resistir las dificultades de la vida. En nuestro caso influye en cierta medida en el valor de q_0 y en los valores posteriores a la mortalidad del primer año. El resultado conjunto de los parámetros de este término se va diluyendo para las edades superiores, a partir de aproximadamente los 10 años.

Como veremos más adelante, los resultados obtenidos por nosotros, muestran una evolución decreciente, en los valores de la terna, $\{a_0, a_1, a_2\}$ conforme transcurre el tiempo de calendario. Si bien, dicha evolución es a ritmo diferente en cada parámetro. Esto permite comprobar una clara interrelación entre los tres parámetros. Como ya quedó indicado, para valores de x superiores a los 10 años aproximadamente, la aportación de este término a los valores de q_x no es significativa.

La segunda expresión está pensada para representar el segundo tramo de edades de la vida de la persona. La idea inicial de Heligman y Pollard fue que este término representara la aportación a la medida de la mortalidad para el tramo intermedio de edades de la vida de una persona. Más exactamente, se pretende que represente la "loma" que empíricamente se constata existe en este tramo de edades. En nuestro caso observamos que esta loma no es simétrica sino que crece más rápidamente por su lado izquierdo (intervalo de edades que transcurre desde los 15 años hacia los 20). No obstante, nos proporciona buenos resultados para años de calendario posteriores a 1960. El descubrimiento de Heligman y Pollard fue que el parámetro a_2 mide

el nivel de mortalidad a edades previas a la edad madura, el parámetro b_2 mide la dispersión en torno al valor de a_2 y c_2 mide la localización del valor máximo de mortalidad para este tramo intermedio de edades.

Como se puede apreciar la no existencia de dicho punto máximo daría al traste con esta expresión. Esa es la razón por la cual, para años de calendario anteriores a 1950, algunos de estos parámetros se desplazan, sin control, dando valores que oscilan mucho y que por lo tanto, no permiten hacer un seguimiento en la evolución de los parámetros. Para lograr esto último es necesario observar el comportamiento de estos parámetros con mayor dedicación.

También en este caso se observa una fuerte interrelación entre los tres parámetros, aunque no tanto como en el caso del primer término. Esto es consecuencia de lo aportado anteriormente. No obstante sí existe esta interrelación y se debe procurar analizar dicha interrelación más a fondo. De esta manera, se "mejora" el ajuste obtenido de la aplicación directa del ajuste no lineal. Aunque también es evidente que esta solución ya no es la óptima que proporciona el algoritmo, sin embargo, al obtener los valores prácticos la desviación no es significativa, dado que este intervalo es poco importante desde el punto de vista práctico y sin embargo se consigue que la "tendencia" de los parámetros sea mucho más representativa⁴.

Esto está en línea con la afirmación de Heligman y Pollard en su trabajo, donde señalan que esta fórmula es suficientemente flexible como para ser aplicada aún cuando no se presente loma alguna en los valores de los tantos de mortalidad. No obstante, esta afirmación nosotros no la vemos tan clara a la vista de los resultados que hemos obtenido en nuestras simulaciones.

El tercer término es el que no presenta mayores dificultades. Además es una copia del modelo aportado por Gompertz. El hecho de que la interpretación de los parámetros no presente dificultades, pues a_3

⁴ Todo esto evidentemente cuando se pretende mantener el mismo modelo paramétrico para todos los años de calendario.

refleja el nivel de mortalidad para la edad madura y posteriores⁵ y b_3 el "ritmo" de crecimiento progresivo de la mortalidad conforme aumenta la edad de un individuo, no significa que la estimación sea perfecta. Los valores ajustados se corresponden bastante bien con los observados pero es posible (aunque esto no lo hemos contrastado) que con alguna variante de la expresión elegida por nosotros, se mejore el resultado para este tramo final, al menos para alguno de los censos considerados.

En cualquier caso, algún intento por nuestra parte, por combinar algún término de una familia de curvas con otras familias, no mejora claramente el resultado. Lo que sí sucede es que se altera la combinación de los términos y en nuestro ensayo prevalece el mantenimiento del modelo a lo largo de todos los años de calendario, pues lo que se pretende es que la variación de los parámetros recojan lo más exclusivamente posible la variación de la mortalidad.

4. COLECTIVO DE HOMBRES

Una vez elegida la función o modelo de mortalidad y teniendo en cuenta que los datos observados que disponemos son los $q^*(x,t)$, para edades quinquenales (x) y las fechas de calendario decenales (t), el siguiente paso consistió en preparar los datos para ser utilizados. Para ello basta con tener en cuenta que

$$\frac{q_x}{p_x} = f(x) \rightarrow q_x = \frac{f(x)}{1+f(x)}$$

de esta manera utilizando los valores de $f(x)$ quedan representados los de q_x .

Para optimizar la función de ajuste $f(x)$ se minimiza la expresión:

$$D = \sum_x [f^*(x) - f(x)]^2$$

⁵ Matemáticamente nos proporciona el nivel de mortalidad extendida a la edad cero.

utilizando alguno de los algoritmos iterativos de minimización de modelos no lineales. En nuestro caso se utilizó el algoritmo de Marquardt⁶.

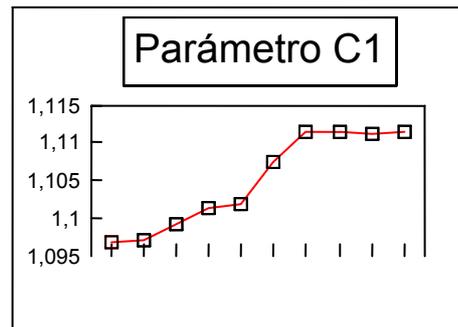
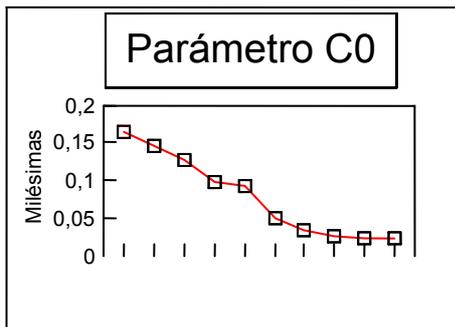
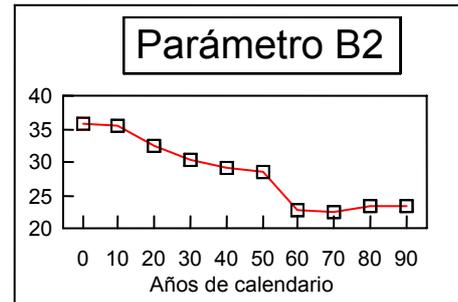
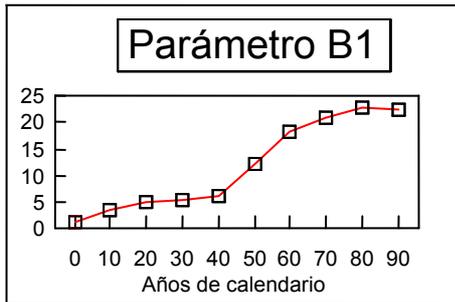
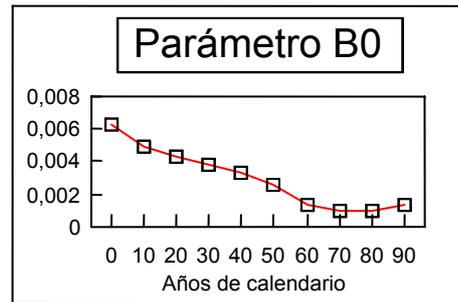
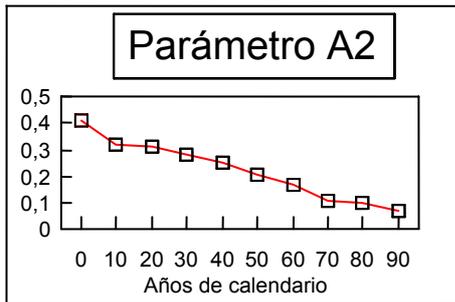
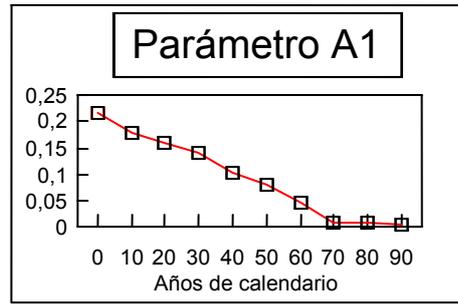
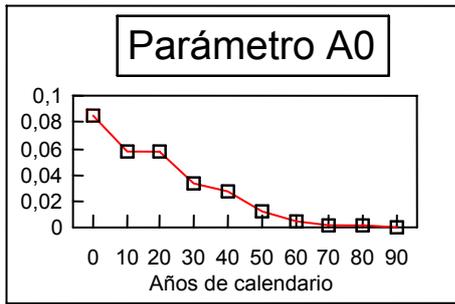
Aplicando el algoritmo citado y revisando los resultados que se iban obteniendo, se eligieron como valores de los parámetros representativos de los parámetros de $f(x)$ de la expresión (1), ajustados a los valores de $f^*(x)$ correspondientes a los datos censales de q^*_x para los años de calendario 1990, 1910, ..., 1990 los que se presentan en la Tabla N° 1. Los gráficos correspondientes a estos valores se presentan en la página siguiente a la citada tabla.

TABLA N° 1

AÑOS DE CALENDARIO	VALORES DE LOS PARAMETROS							
	HOMBRES							
	A0*10 ³	A1*10 ³	A2*10 ²	B0*10 ³	B1	B2	C0*10 ⁵	C1
1900	84,43	218,53	41,10	6,24	1,21	35,75	16,30	1,09678
1910	57,23	179,82	31,80	4,94	3,45	35,40	14,60	1,09698
1920	57,53	158,20	31,18	4,36	4,75	32,60	12,60	1,09901
1930	33,64	142,00	28,20	3,79	5,45	30,40	9,70	1,10130
1940	27,44	102,30	25,20	3,34	6,05	29,10	9,12	1,10176
1950	12,63	80,50	20,50	2,52	12,05	28,40	4,98	1,10740
1960	5,01	45,00	16,60	1,31	18,10	22,71	3,29	1,11134
1970	1,78	7,12	10,70	0,93	20,85	22,38	2,53	1,11140
1980	1,20	8,30	9,50	0,98	22,85	23,40	2,39	1,11125
1990	0,65	2,22	7,15	1,39	22,55	23,32	2,22	1,11130

⁶ Marquardt, D. W. (1963). "An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters". JSIAM. N° 11.

GRAFICO N° 1



Con los valores de los parámetros ajustados se procedió a la representación de las curvas que se obtienen y el resultado se muestra en el gráfico nº 2 . En dicho gráfico, se presentan en ordenadas los valores de $\log(10^5 \cdot q_x)$ con el objeto de apreciar con mayor nitidez la representación de los tantos a través del tiempo de calendario. Se observa que la evolución de los tantos anuales de mortalidad disminuyen progresivamente a lo largo de los años de calendario pero también observamos que se produce una alteración en la intensidad de la progresión, sobre todo a partir de los años de calendario 1960 y para edades posteriores a los 15 y anteriores a los 35 años aproximadamente.

Volviendo al análisis de los parámetros, como se puede apreciar los valores de los mismos resultan decrecientes bastante regularmente, salvo los parámetros b_1 y c_1 que resultan crecientes, lo que permite proceder a una estimación de sus proyecciones hacia el futuro. También es cierto, que se observan algunas alteraciones por los años 1920 y 1940 como consecuencia de la epidemia de 1918 en el primer caso y de la guerra civil, en el segundo. A la vista de estos resultados se procedió a una regresión logarítmico-lineal⁷ para estimar los valores que tomarían dichos parámetros para los años 2000, 2010 e incluso para el 2020.

Una vez obtenidos los valores de los parámetros se procedió a su sustitución en la fórmula (2) obteniendo los valores correspondientes a la función $f(x)$ para los años 2000, 2010 y 2020. Con lo cual se obtienen también los valores de q_x que predecimos para dichos años.

Los valores estimados de q_x para dichos años de calendario y la representación gráfica de la correspondiente función se presentan en la tabla nº 2 y el gráfico nº 3 respectivamente. Una vez obtenidos estos valores de los tanto de mortalidad se pueden obtener, evidentemente, los valores correspondientes a los años intermedios sin más que sustituir los valores de los parámetros para dichos años de calendario.

No quisiéramos dejar de mencionar que tanto el periodo tomado de referencia como la cadencia censal es muy amplia y por consiguiente

⁷ También tenemos en estudio una predicción mediante series temporales.

la precisión de las estimación deben ser tomadas con cierta cautela. Es claro que estimar o predecir unas tablas como las que aquí se presentan, tienen a nuestro juicio mayor importancia que las tablas que se construyen tradicionalmente, pero han de ser estudiadas también con más minuciosidad. De ahí que nos encontremos estudiando otras predicciones tomando un periodo temporal de calendario inferior y con una cadencia también inferior. Incluso incluyendo en los cálculos todas las edades en lugar de datos abreviados.

GRAFICO N° 2

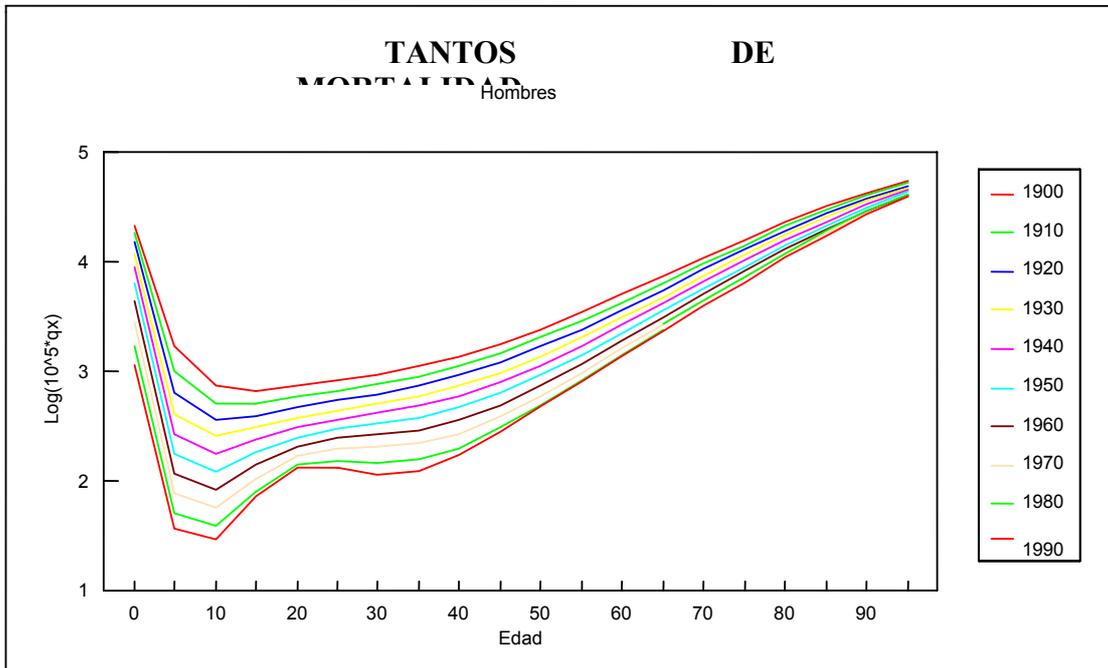
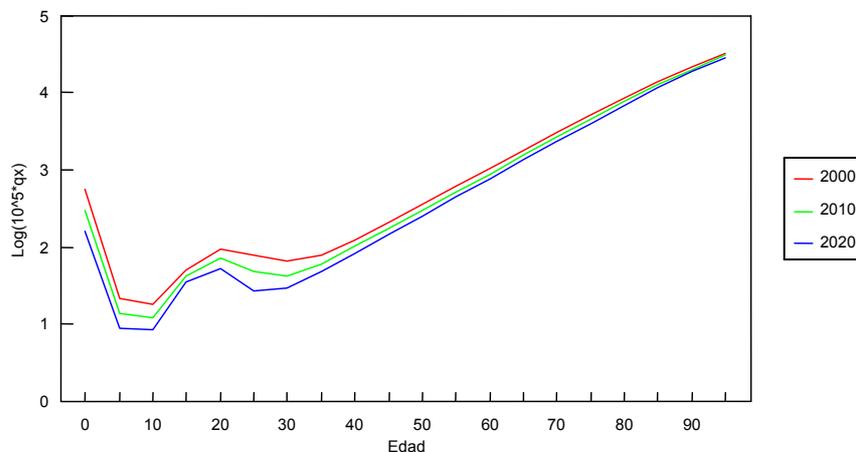


TABLA N° 2

Edad	HOMBRES		
	AÑOS DE CALENDARIO		
	2000	2010	2020
5	0,005628	0,003051	0,001607
10	0,000215	0,000139	0,000089
15	0,000179	0,000121	0,000083
20	0,000502	0,000414	0,000359
25	0,000938	0,000735	0,000525
30	0,000799	0,000489	0,000271
35	0,000648	0,000419	0,000299
40	0,000786	0,000604	0,000486
45	0,001228	0,001005	0,000830
50	0,002059	0,001720	0,001439
55	0,003514	0,002970	0,002510
60	0,006027	0,005145	0,004391
65	0,010347	0,008921	0,007690
70	0,017735	0,015445	0,013447
75	0,030259	0,026631	0,023426
80	0,051186	0,045558	0,040522
85	0,085333	0,076891	0,069219
90	0,138939	0,126919	0,115799
95	0,218199	0,202374	0,187420

GRAFICO N° 3
TANTOS DE
Hombres



5. ANALISIS DEL COLECTIVO DE MUJERES

Dado que disponemos de datos del colectivo de mujeres es condiciones análogas a las del colectivo de hombres, procedemos de forma similar en este caso y los resultados que hemos obtenido se presentan a continuación. Para empezar digamos que los valores de los parámetros tienen un comportamiento similar aunque evidentemente diferente. En unos casos la evolución es más o menos severa o suave en el caso de mujeres y viceversa pero el sentido de la tendencia es, básicamente, en ambos, el mismo. La representación gráfica de los parámetros se presenta en el gráfico n° 4. Los valores correspondientes a los parámetros se presentan en la tabla n° 3.

Lo que ciertamente se deja notar con mayor claridad es que la estructura del colectivo de mujeres se mantiene durante más tiempo invariante. Se puede decir que salvo los dos o tres últimos censos no se atisba una "loma" en las edades correspondientes a la juventud y edades posteriores. Esto se puede apreciar en el gráfico n° 5. Los valores estimados para los años de calendario 2000, 2010 y 2020 se presentan en la tabla n° 4 y la representación gráfica de la curva que se obtiene, en el gráfico n° 6.

GRAFICO N° 4

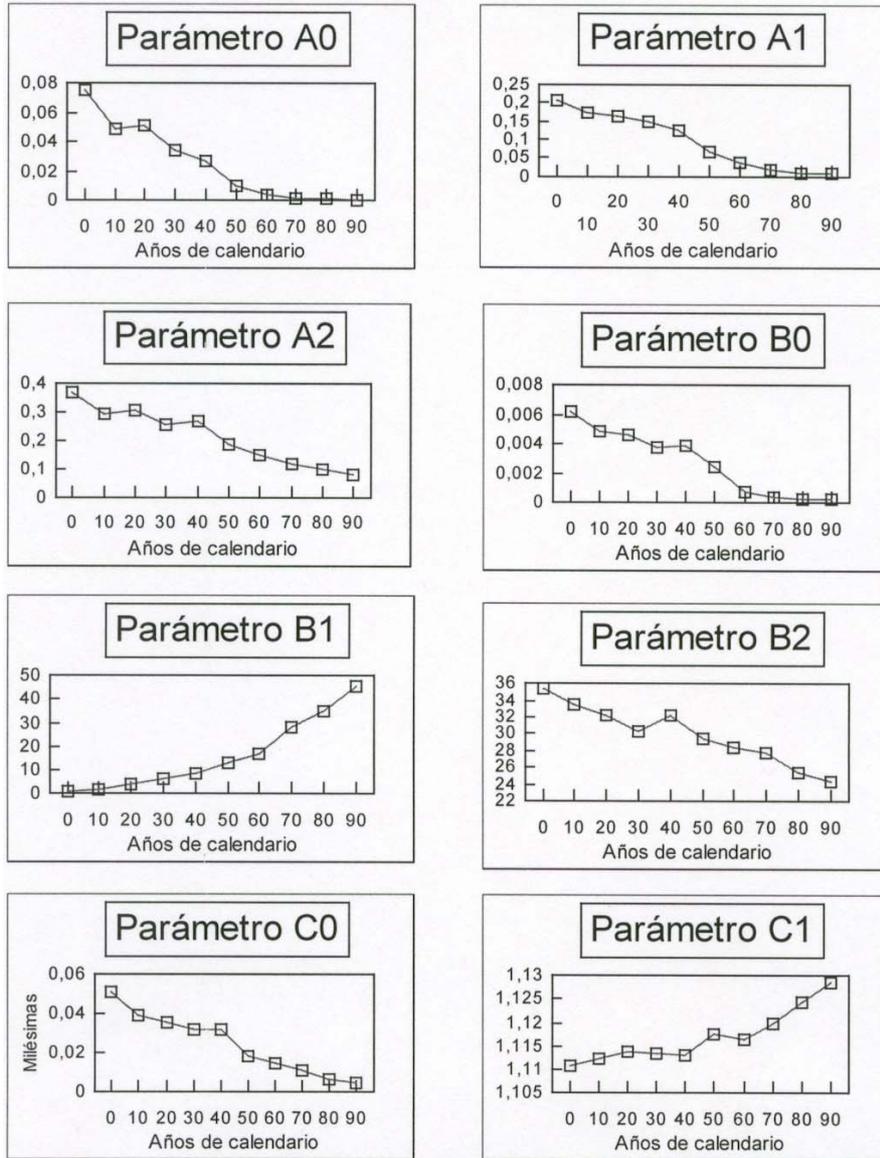


GRAFICO N° 5

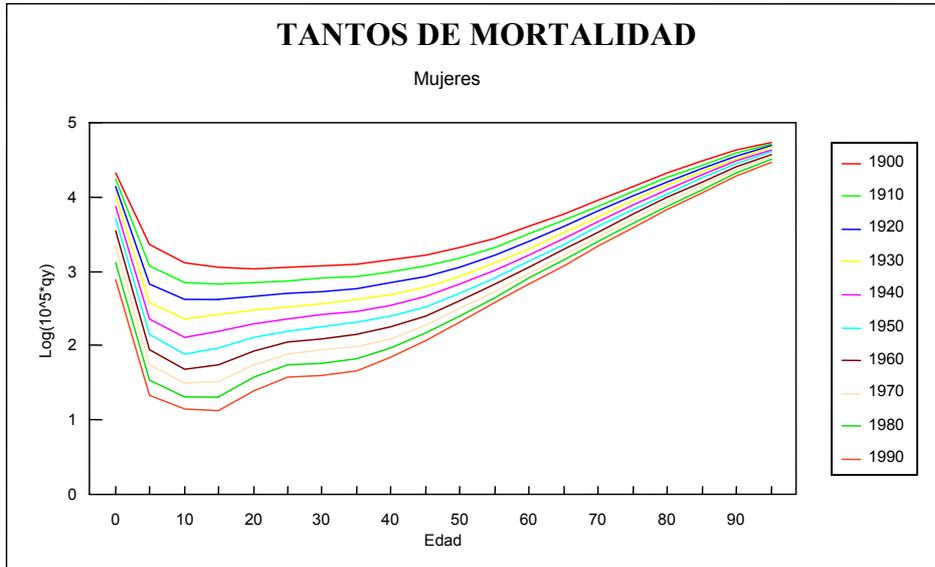
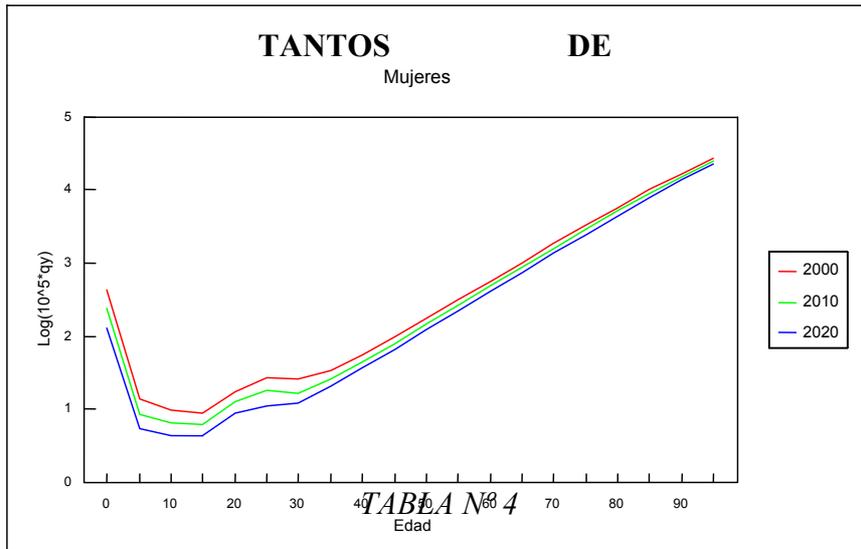


TABLA N° 3

AÑOS DE CALENDARIO	VALORES DE LOS PARAMETROS							
	MUJERES							
	A0*10 ³	A1*10 ³	A2*10 ²	B0*10 ³	B1	B2	C0*10 ⁵	C1
1900	75,33	205,12	36,65	6,24	0,91	35,43	5,10	1,11076
1910	48,47	172,30	29,48	4,86	1,14	33,54	3,90	1,11229
1920	51,16	161,30	30,66	4,57	3,88	32,23	3,57	1,11375
1930	33,58	148,40	25,22	3,71	6,12	30,23	3,22	1,11334
1940	26,95	126,10	26,70	3,90	8,45	32,23	3,21	1,11310
1950	10,21	66,10	18,50		12,67	29,45	1,81	1,11770
1960	3,92	37,50	14,90	0,72	16,67	28,33	1,48	1,11640
1970	1,77	19,30	11,60	0,32	28,22	27,76	1,09	1,11990
1980	0,78	10,10	9,90	0,22	35,22	25,35	0,66	1,12450
1990	0,53	6,10	8,10	0,21	45,56	24,35	0,42	1,12850

GRAFICO N° 6



Edad	MUJERES		
	AÑOS DE CALENDARIO		
	2000	2010	2020
0	0,000138	0,000086	0,000053
5	0,000096	0,000064	0,000042
10	0,000090	0,000062	0,000043
15	0,000175	0,000124	0,000090
20	0,000267	0,000177	0,000109
25	0,000253	0,000167	0,000122
30	0,000331	0,000258	0,000206
35	0,000553	0,000448	0,000364
40	0,000975	0,000801	0,000658
45	0,001744	0,001447	0,001199
50	0,003141	0,002628	0,002198
55	0,005669	0,004783	0,004035
60	0,010226	0,008704	0,007406
65	0,018397	0,015800	0,013564
70	0,032892	0,028526	0,024724
75	0,058146	0,050982	0,044658
80	0,100780	0,089496	0,079364
85	0,169071	0,152440	0,137175
90	0,269763	0,247621	0,226732

6. CONCLUSIONES

Aunque a lo largo de este trabajo hemos ido dejando comentarios y observaciones a modo de conclusiones, podemos concluir de forma resumida que el procedimiento seguido para predecir la mortalidad hacia el futuro, en una buena metodología aunque mejorable según nuestro criterio. La extrapolación de los resultados pasados y presentes no siempre es un buen criterio aunque como sucede en este caso la tendencia de la evolución de los parámetros estaba bastante clara.

Las curvas de regresión que hemos considerado fueron las logaritmico-lineales y aunque para algunos de los parámetros no fueron las mejores las hemos mantenido para unificar el criterio.

El periodo u horizonte temporal que hemos considerado es muy atractivo pero a nuestro juicio muy amplio. Durante una centuria las modificaciones en la estructura del tanto de mortalidad es múltiple e intervienen causas ajenas a las que se deben considerar como objetivamente incidentes en su variación. Un periodo de tiempo como el transcurrido desde 1960, por ejemplo, nos parece mucho más aprovechable para este objetivo y por ende reflejaría más acertadamente la evolución de los parámetros.

La consideración de edades individuales también nos parece mucho más preciso. Por esta razón estamos perfeccionando este trabajo con algunas de estas modificaciones.

Un aspecto importante y al que no hemos hecho mención a lo largo de este trabajo es la interrelación que se presenta entre alguno de estos parámetros. A la vista de nuestros análisis las interrelaciones más fuertes se presentan entre los parámetros de cada terna $\{a_0, a_1 \text{ y } a_2\}$ y $\{b_0, b_1 \text{ y } b_2\}$. También entre los parámetros $\{c_0 \text{ y } c_1\}$. Quizás la correlación más importante a tener en cuenta sea la que corresponde a la terna $\{a_0, a_1 \text{ y } a_2\}$, más bien por su influencia en la mortalidad inicial y en los primeros años de vida de la persona, aunque desde el punto de vista comercial de las operaciones de seguro no tengan relevancia.

Teniendo en cuenta lo que hemos manifestado en el epígrafe 3 al referirnos a los parámetros y a los valores que se obtienen de a_0 , a_1 y a_2 , así como los valores de q_0 y q_1 , se puede contrastar que lo allí mencionado empíricamente es lo que sucede estadísticamente. Así las ecuaciones de correlación y los coeficientes de determinación que se obtienen entre cada uno de los parámetros a_0 , a_1 y a_2 con respecto a q_0 y q_1 son los siguientes, para el caso de hombres:

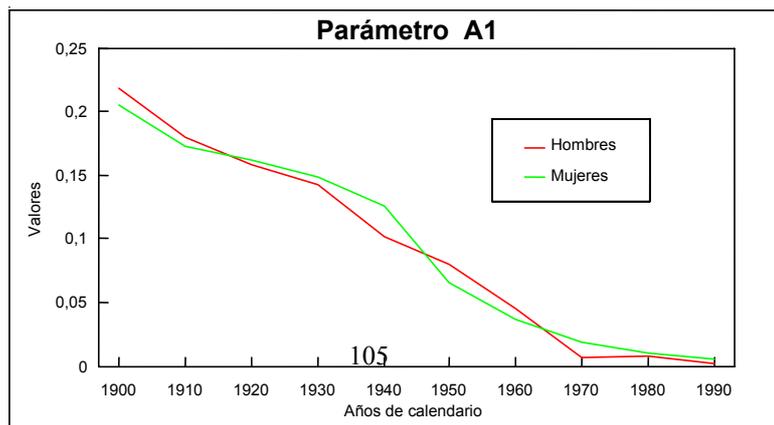
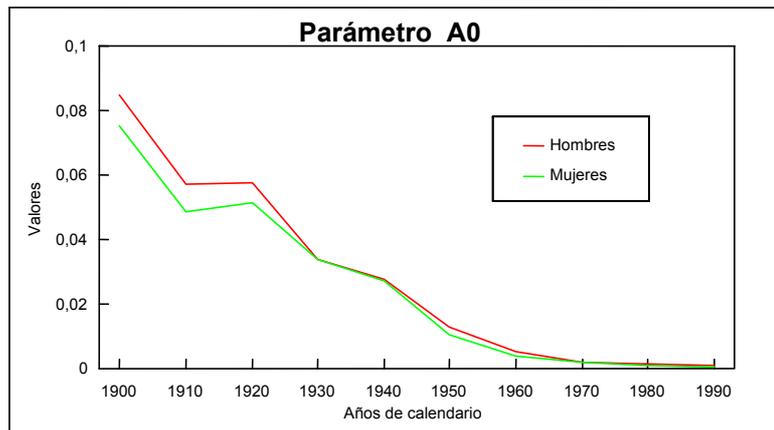
$$a_0 = 0,000312 - 0,06493q_0 + 1,437848q_1 \quad R^2 = 0,9984$$

$$a_1 = -0,00549 + 1,186397q_0 - 1,23166q_1 \quad R^2 = 0,971$$

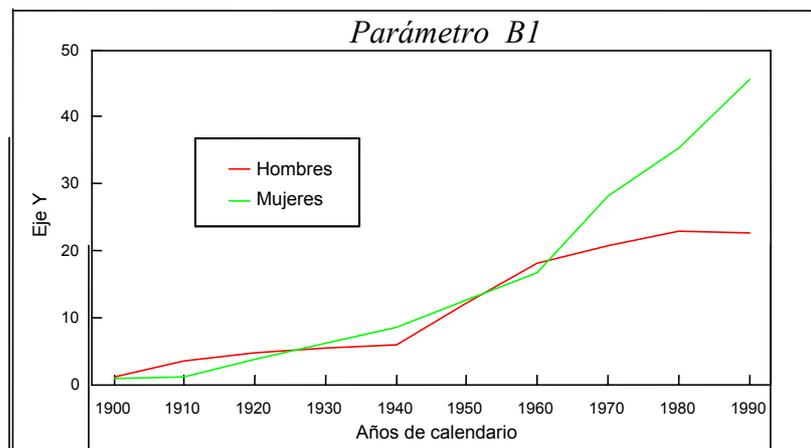
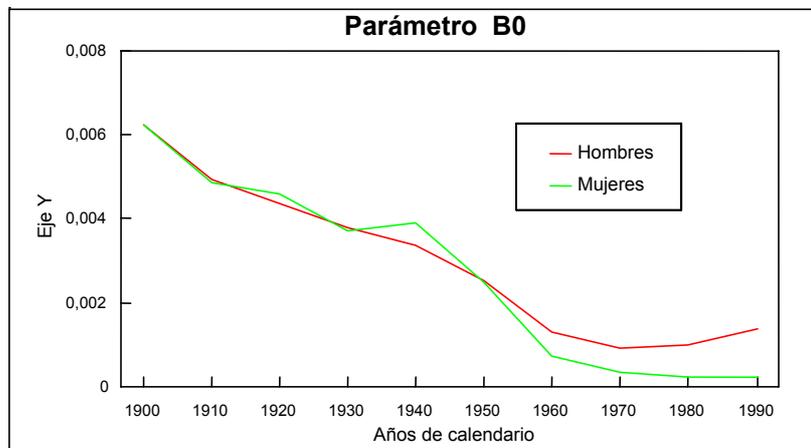
$$a_2 = 0,065215 + 2,408906q_0 - 4,39801q_1 \quad R^2 = 0,985$$

Como se puede observar la influencia de q_1 en el parámetro a_1 es manifiesta. También se puede apreciar que la incidencia de los tantos q_0 y q_1 sobre el parámetro a_1 es importante e influyen de forma contraria. Esto es, q_1 disminuye a lo largo del tiempo de calendario pero q_0 también. Lo que sucede es que la disminución de q_0 no necesariamente supone una disminución en la diferencia $q_0 - q_1$. Resumiendo hay una fuerte dependencia entre los tantos q_0 y q_1 y los parámetros a_0 y a_1 que son los que marcan las pautas hacia el futuro de la mortalidad infantil.

Finalmente y a modo de contraste visual entre la evolución de los parámetros, en el caso del colectivo de hombres versus caso del colectivo de mujeres se presentan a continuación unos gráficos comparativos en los que queda de manifiesto que, para la mayoría de los parámetros, se da una clara evolución similar de los parámetros.

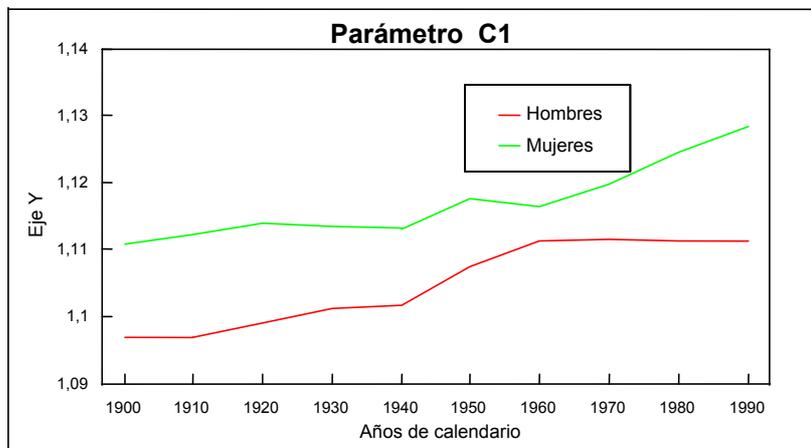
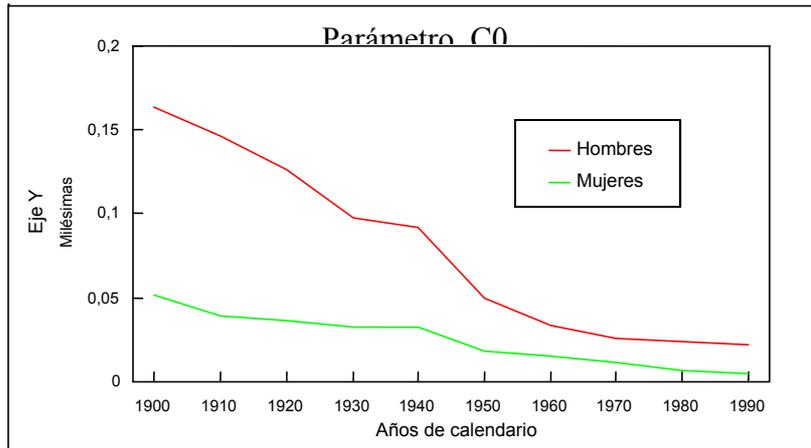


Una predicción de los tantos de mortalidad general



106





BIBLIOGRAFIA

- BETZUEN, A. (2000) **"Una estimación de la tendencia de la mortalidad abreviada futura a través de la evolución de los parámetros"**. V Congreso Nacional y III Hispano-Italiano de Matemática Financiera y Actuarial. Bilbao.
- HELIGMAN, L. and J.H. POLLARD (1980). **"The age pattern of mortality"**. JIA. Vol. 107.
- MARQUARD, D. W. (1963). **"An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters"**. JSIAM. N° 11.
- THIELE, T. N. (1971). **"On a mathematical formula to express the rate of mortality throughout the whole of life"**. JIA. Vol. 16.

0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
Años de calendario

0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
Años de calendario
