TRABAJOS DE COLABORACION

Sobre la comparabilidad de tasas de morbilidad y de sus componentes*

Por **Peter Thullen**

Actuario-Jefe de la División de Seguridad Social de la Oficina Internacional de Trabajo

INTRODUCCION

La presente charla tiene por objeto describir y analizar los procedimientos que contribuyen a la comparabilidad de tasas de morbilidad y de sus componentes, correspondientes a distintos regímenes de subsidio en dinero de enfermedad que se diferencian por las condiciones requeridas para la concesión del subsidio, o por la intensidad de crecimiento de la población asegurada, o también por las unidades estadísticas utilizadas.

Al mismo tiempo es mi deseo familiarizarles con un campo de estudio algo descuidado en los últimos años, el cual, no obstante, resulta verdaderamente atractivo para el actuario y estadígrafo de seguridad social y a la vez de un valor práctico inmediato.

Recordamos que, con respecto a un régimen de seguro de enfermedad cuyo sistema de prestaciones incluye un subsidio en dinero por incapacidad debida a enfermedad, el coeficiente o la *tasa de morbilidad* está definida como el número medio de días subsidiados por «asegurado-año» (es decir por asegurado en el año).

Las tasas de morbilidad pueden establecerse separadamente por sexo o por edad de las personas aseguradas, o también por catego-

* Conferencias pronunciadas los días 22 y 23 de mayo de 1991 en el Centro Internacional de Formación de Técnicos de la Organización Iberoamericana de Seguridad Social y Salón de actos del Instituto de Actuarios Españoles.

rías de una misma actividad económica o profesión[1], pues, son todos factores que pueden influir sensiblemente en el valor de la tasa. Empero, por razones de mayor simplicidad, nos limitaremos generalmente a la tasa global *m* para el conjunto de la población asegurada. Sin embargo, es fácil extender los resultados principales también a tasas especiales referidas a los elementos mencionados.

Cuando la población protegida es absolutamente *estacionaria*, la tasa de morbilidad *m* se presenta frecuentemente bajo la forma de un producto:

$$m = qd,$$

donde *q* significa la frecuencia relativa a *un* asegurado[2] de casos de subsidio iniciados en el año, y *d* la duración media de casos terminados (independientemente de si el caso principió o no en el año de referencia).

La tasa *m* y sus componentes *q* y *d* dependen, por una parte, de las condiciones de salud de la población asegurada, de la organización médica, de las prácticas establecidas, y de factores similares, que determinan lo que podríamos llamar la morbilidad intrínseca del régimen establecido. Por otra parte, dependen de las condiciones que limitan el goce del subsidio, en particular del período de carencia y de la duración máxima legal o reglamentaria del goce del subsidio en un caso. A los fines de esta charla nos interesa medir numéricamente la dependencia con respecto a los dos últimos factores: el período de carencia constituído por los primeros días de incapacidad por los que no se pague el subsidio y que en el seguro social obrero varía normalmente entre tres y siete días, según

[1] Un interesante ejemplo que refleja la dependencia de la tasa de morbilidad de la actividad económica —a la cual se suele prestar menor atención que a la dependencia con respecto al sexo o a la edad— lo constituyen las siguientes cifras del seguro social italiano:

	TASA DE MORBILIDAD	
	1957	1958
Agricultura.	3,95	3,94
Comercio.	5,73	5,16
Industria.	9,69	8,86

[2] No se trata aquí de una frecuencia relativa en el sentido de una probabilidad; en particular *q* puede ser, teóricamente, mayor de 1.

la legislación nacional, y la duración máxima del subsidio autorizada por la Ley en cada caso, que rara vez es menor de seis meses ni mayor de un año.

Conocida numéricamente la influencia de dichos factores sobre la tasa de morbilidad, se podrá examinar cuáles serían las tasas de morbilidad referidas a distintos períodos de carencia o duraciones máximas, pero, por lo demás, a un mismo régimen dado de seguro de enfermedad (por ejemplo, al preparar una reforma legal de dicho régimen); o también se podrá relacionar las tasas de morbilidad de dos o más regímenes distintos de seguro de enfermedad con un mismo período de carencia y una misma duración máxima y luego comparar las tasas de la morbilidad intrínseca de dichos regímenes.

Debe tocarse, al menos brevemente, otro elemento que forma parte de la propia definición de la tasa de morbilidad y cuya posible influencia sobre el valor de la misma pasa muchas veces inadvertida. En efecto, la tasa de morbilidad depende de la concepción o del modo de computar el «asegurado-año». Anteriormente se solía emplear la noción de «obrero-año» equivalente a 300 jornadas de trabajo [3]. En un sistema de cotizaciones semanales, por ejemplo a base de estampillas, se utiliza la noción parecida del «asegurado completo anual» equivalente a 50 cotizaciones semanales efectivas (por ejemplo, 50 estampillas vendidas) [4]. Cuando, por lo contrario el sistema emplea planillas (nóminas) mensuales de cotizaciones y los derechos cualitativos y cuantitativos se relacionan con las cotizaciones «mensuales», independientemente del número de días trabajados en cada mes, un «asegurado-año» podrá tomarse como equivalente a 12 cotizaciones mensuales.

De acuerdo con el promedio de los días efectivamente trabajados en el año, podrán producirse diferencias sensibles en la tasa de morbilidad de una misma población asegurada, según que se tome como base la última noción de «asegurado-año», equivalente a 12 cotizaciones mensuales, o, por ejemplo, la del «obrero-año». A los efectos de la comparabilidad es, pues, importante que las informaciones relativas a la tasa de morbilidad se acompañen siempre con

---

[3] Esta cifra debería ser ajustada de conformidad con el número normal de días laborables en la semana.

[4] Preferimos 50 semanas a 52, teniendo en cuenta que los períodos de incapacidad —que en muchas legislaciones son asimilados a períodos de seguro— pueden sumar, como promedio, un tiempo muy aproximado a dos semanas.

la indicación no solamente de las condiciones de carácter legal que influyen en la morbilidad, sino también del sistema de cotizaciones y de la noción específica de «asegurado-año» que se aplican.

Después de estas consideraciones preliminares pasamos al tema que nos hemos propuesto examinar. La primera parte versará sobre algunos métodos que se emplean para hacer comparables las tasas de morbilidad cuando los sistemas tienen establecidos distintos períodos de carencia y/o distintas duraciones máximas para el disfrute del subsidio. En la segunda parte se compara la tasa de morbilidad de una población absolutamente estacionaria con la de una población creciente, suponiendo invariadas las demás características o condiciones que afectan la morbilidad. En la tercera y última parte se tratará de hacer comparables dos nociones distintas de frecuencias q y $\overline{q}$ de casos de subsidio en el año (y las correspondientes duraciones medias d y $\overline{d}$ de casos), donde q significa, como ya se ha definido, la frecuencia de casos iniciados por «asegurado-año» y $\overline{q}$ la de casos (iniciados o no en el año) que estén en curso de pago durante algún período del año, noción utilizada, por ejemplo, en estadísticas del seguro inglés.

Mientras que en la primera parte se exponen hechos ya conocidos —quizá algunos bajo un ángulo nuevo—, las otras dos partes se ocupan de resultados recientes, contenidos en un trabajo que está por publicarse [5]. Al mismo tiempo, el conocimiento de la primera parte contribuirá a la comprensión de las dos siguientes.

I. Tablas de Serie, y factores de reducción para diferentes períodos de carencia y duraciones máximas.

1. Consideramos un sistema de subsidios en dinero en caso de incapacidad debida a enfermedad, caracterizado por determinado período de carencia (que puede ser 0) y determinada duración máxima legal del disfrute del subsidio en un caso dado. Se supone que el «caso» esté debidamente definido por Ley o por Reglamento.

---

[5] P. Thullen: *Remarks on the Mortality Rate*; Revista Internacional de Actuariado y Estadística de la Seguridad Social; núms. 5-6 (1960).

TABLA DE SERIE. (CHECOSLOVAQUIA-OBREROS-VARONES-1935

t (días)	l_t	d_t	$\sum_{v=1}^{t} l_v$
1	100.000	420	100.000
2	99.580	537	199.580
3	99.043	1.198	298.623
4	97.845	3.379	396.468
5	94.466	5.981	490.934
6	88.485	8.454	579.419
7	80.031	5.410	659.450
8	74.621	8.054	734.071
9	66.567	6.492	800.638
10	60.075	5.717	860.713
11	54.358	4.697	915.071
12	49.661	4.192	964.732
13	45.469	4.345	1.010.201
14	41.124	1.992	1.051.325
15—21	39.132	13.446	1.276.875
22—28	25.686	6.945	1.433.702
29—35	18.741	4.398	1.550.011
36—42	14.343	3.061	1.640.486
43—49	11.282	2.132	1.712.372
50—56	9.150	1.503	1.771.575
57—63	7.647	1.158	1.821.289
64—70	6.489	917	1.864.037
71—77	5.572	659	1.900.856
78—84	4.913	516	1.933.550
85—91	4.397	438	1.962.870
92—98	3.959	362	1.989.382
99—105	3.597	312	2.013.572
106—112	3.285	251	2.035.791
113—119	3.034	217	2.056.367
120—126	2.817	186	2.075.490
127—133	2.631	168	2.093.340
134—140	2.463	141	2.110.151
141—147	2.322	126	2.126.055
148—154	2.196	121	2.141.078
155—161	2.075	100	2.155.179
162—168	1.975	97	2.168.723
169—175	1.878	87	2.181.533
176—182	1.791	296	2.193.866
183—210	1.495	252	2.237.743
211—245	1.243	184	2.283.639
246—280	1.059	138	2.322.623
281—315	921	122	2.356.536
316—350	799	51	2.386 099
351—364	748	748	2.396.053

Se plantea el problema de establecer el método que permita comparar las tasas de morbilidad correspondientes a diferentes períodos de carencia y/o diferentes duraciones máximas legales.

2. Para resolver el problema se utilizan los llamados «coeficientes de reducción», definidos por primera vez por CH. MOSER [6]. Consideramos aquí el método elemental discontinuo de deducir estos coeficientes con ayuda de una «tabla de serie».

Una tabla de serie tiene una estructura análoga a la de una tabla de supervivencia en el seguro de vida y representa el orden de eliminación de un conjunto de casos (o sea de un grupo de enfermos en disfrute de subsidio) con la misma fecha de comienzo del disfrute del subsidio. Indicamos como ilustración una tabla de serie del seguro obrero checoslovaco, según experiencia de 1939, para varones.

La tabla se refiere a 100.000 casos que principian en el día $t = 1$. La primera columna indica la duración en días (luego agrupados por semanas), la segunda el número l_t de casos que «sobreviven» el día t, o sea, que se hallan aún en curso de pago al comienzo del día t (o del período semanal), la tercera el número de casos eliminados al pasar del día t al día $t + 1$ (o en el curso de la semana) [7] y la cuarta el número acumulado de subsidios diarios pagados hasta el día t incluído (o la semana incluída).

Obsérvese la rápida eliminación de casos después de la primera semana. Así, al cabo de tres semanas, de 100.000 casos quedan apenas la cuarta parte (25.686) y después de seis meses, menos del 1,5 por 100 del número inicial de casos.

De los valores de la tabla se deduce inmediatamente la duración media d de los l_1 casos, con respecto a la duración máxima de $\omega = 364$ días $= 52$ semanas, que es:

$$d = \frac{\sum_{t=1}^{\omega} l_t}{l_1} = 23{,}96 \text{ días,}$$

[6] *Rapports présentés au 3ème Congrès International d'Actuaires*, Paris, 1900. CH. MOSER: Communication touchant une table de morbilité.

[7] Se supone que un día iniciado con incapacidad sea pagado como día entero, como sucede también en la práctica.

y análogamente con respecto a cualquier otra duración máxima menor que ω.

3. Será util —también para la mejor comprensión de las segunda y tercera partes de esta charla— detenerse un instante en el método de construcción de una tabla de serie basada directamente en el material estadístico disponible.

Se toman al efecto los l_1 casos *terminados* en un período dado, por ejemplo en un año, y se los clasifica por duración, siendo d_t el el número de casos de duración t (días); sea, además, ω la duración máxima legal.

En la hipótesis de que la duración promedia de los casos no depende del día en que se iniciaron, se procede como si todos los casos observados hubiesen principiado en un mismo día, $t = 1$; y formando entonces los siguientes términos (comenzando por el último):

$$
\begin{aligned}
l_\omega &= d_\omega \\
l_{\omega-1} &= d_\omega + d_{\omega-1} \\
\ldots & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
l_1 &= d_\omega + d_{\omega-1} + \ldots + d_2 + d_1,
\end{aligned}
$$

se obtiene directamente la tabla de serie. Si se desea, se la puede normar refiriéndola a 100.000 casos iniciales, por ejemplo, multiplicando todos los términos por el correspondiente factor de proporcionalidad $\frac{100.000}{l_1}$. Se establece, por último, la cuarta columna mediante sumación sucesiva de los términos de la segunda, comenzando por $t = 1$.

No podemos detenernos aquí en la consideración de los interesantes trabajos que se ocupan del ajuste de los valores l_t, en particular mediante funciones analíticas [8].

4. Cuando se da una *población* asegurada *absolutamente estacionaria,* un segundo método relativamente simple de construcción de una tabla de serie es el siguiente:

Se consideran todos los casos en curso de pago en un día determinado T y se los clasifica según su duración en el pasado, con-

[8] Cabe mencionar aquí el fenómeno de la acumulación de las cifras d_t para múltiplos de 7, originada por la tendencia de extender los certificados de

tando ésta desde el día T hacia atrás hasta el día del comienzo de cada caso inclusive. Sea λ_t el número de casos de duración t (días); $t = 1, 2, \ldots, \omega$.

Siendo la población dada absolutamente estacionaria, se supone que en cada día principia igual número α de casos. Si $\{ l_t \}$ significa una tabla de serie correspondiente a la población y al sistema dados, entonces l_t representa, según definición, el número de casos que de l_1 casos iniciales han «sobrevivido» t días, y, por ende, la expresión $\alpha \dfrac{l_t}{l_1}$ representa el número de casos que de α casos iniciados hace t días atrás «sobreviven» el día t. Se obtiene así directamente la relación:

$$\lambda_t = \frac{\alpha}{l_1} l_t = \beta l_t \; ; \quad \beta = \frac{\alpha}{l_1} = \text{constante.}$$

Es decir, la sucesión de valores $\{ \lambda_t \}$ es idéntica a la sucesión $\} l_t \{$, con excepción de un factor constante multiplicador y, en consecuencia, puede también tomarse como una tabla de serie.

Se llama la atención sobre el hecho de que lo anterior no es válido sino para poblaciones absolutamente estacionarias, y será una de las tareas que nos proponemos resolver más adelante, la de encontrar la diferencia entre las sucesiones $\{ l_t \}$ y $\{ \lambda_t \}$ para poblaciones no estacionarias.

5. Volviendo ahora a la tarea de establecer los coeficientes de reducción, suponemos dada una tabla de serie $\{ l_t \}$ que corresponde

---

incapacidad por 7 días completos. Un ejemplo, ciertamente algo exagerado, representan las siguientes cifras de la experiencia de determinado régimen (1953):

t	d_t	t	d_t
...	.....	13	769
5	2.442	14	2.243
6	2.111	15	648
7	8.172	..	.....
8	1.282	20	475
...	.....	21	1.076
		22	371
		..	.....

a la experiencia de determinado sistema con el período de carencia 0, la duración máxima ω, y la tasa de morbilidad $m(0,\omega)$.

Distínguense tres tipos o niveles de factores de reducción, pero luego veremos que todos pueden ser expresados por los llamados factores «primarios» de reducción que definiremos a continuación:

a) El factor «primario» de reducción[9] es el que corresponde a la sustitución de la duración máxima ω por otra η, manteniéndose el período de carencia de 0 días; lo designamos con $R(\eta)$, siendo $m(0,\eta) = R(\eta)\, m(0,\omega)$.

Si se efectúa la indicada *sustitución, la tasa de morbilidad* se reduce en la proporción que existe (de acuerdo con la tabla de serie) entre el número acumulado de días subsidiados hasta $t = \omega$ y el número acumulado de días subsidiados hasta $t = \eta$; y en consecuencia:

$$R(\eta) = \frac{\sum_{1}^{\eta} l_t}{\sum_{1}^{\omega} l_t}, \qquad R(0) = 0 .$$

Utilizando la tabla de serie ya indicada ($\omega = 364$) se obtiene, por ejemplo, para $\eta = 182$:

$$R(182) = \frac{2193866}{2396053} = 0{,}916.$$

b) Cuando se introduce el período de carencia $e \neq 0$ y al mismo tiempo la duración máxima η (en vez de ω), el factor «secundario»[9] $R(e;\eta)$ se expresa por:

$$R(e;\eta) = \frac{\sum_{e+1}^{\eta} l_t}{\sum_{1}^{\omega} l_t} = \frac{\sum_{1}^{\eta} - \sum_{1}^{e}}{\sum_{1}^{\omega}} = R(\eta) - R(e)$$

---

[9] Para la denominación de factor «primario» y factor «secundario» de reducción, véase por ejemplo, el trabajo de M. A. COPPINI, citado al final del capítulo.

Para $e = 3$ y $\eta = \omega$ se obtiene con ayuda de la misma tabla:

$$R(3;\omega) = \frac{2396053 - 298623}{2396053} = R(\omega) - R(3) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875;$$

y para $e = 3$ y $\eta = 182$:

$$R(3;182) = \frac{2193866 - 298623}{2396053} = R(182) - R(3) =$$

$$= 0{,}916 - 0{,}125 = 0{,}791.$$

Anotamos de paso que de conformidad con la tabla de serie utilizada, la tasa de morbilidad y, por ende, el *coste* de un sistema caracterizado por el período de carencia de tres días y la duración máxima de 52 semanas resulta inferior al coste de un sistema sin período de carencia, pero con la duración máxima reducida a 26 semanas. Depende ésto de la baja frecuencia de enfermedades de larga duración pero que desde un punto de vista social reclaman mayor protección.

c) Para comparar diferentes sistemas de subsidio, que tienen establecidos distintos períodos de carencia y duraciones máximas, es necesario referirlos a un mismo período de carencia e_o y una misma duración máxima η_o. Se plantea, pues, la tarea de establecer factores de reducción para pasar de un período de carencia *e* y una duración máxima η cualesquiera, al período e_o y a la duración η_o del sistema de referencia. El correspondiente factor de reducción, que designamos por:

$$R_{e,\eta}(e_o;\eta_o)$$

es igual a:

$$R_{e,\eta}(e_o;\eta_o) = \frac{\sum_1^{\eta_o} l_t - \sum_1^{e_o} l_t}{\sum_1^{\eta} l_t - \sum_1^{e} l_t};$$

dividiendo numerador y denominador por $\sum_1^{\omega} l_t$ se obtiene:

$$R_{e,\eta}(e_0;\eta_0) = \frac{R(e_0;\eta_0)}{R(e;\eta)} = \frac{R(\eta_0) - R(e_0)}{R(\eta) - R(e)}.$$

d) Lo anterior demuestra que se pueden determinar todos los tipos de factores de reducción conociendo los factores «primarios» $R(\eta)$. A continuación se establece una tabla de tales factores primarios, calculados directamente a base de los valores de la tabla de serie ya utilizada (en algunos casos por interpolación).

DURACION MAXIMA (días) η	FACTOR DE REDUCCION $R(\eta)$	DURACION MAXIMA (días) η	FACTOR DE REDUCCION $R(\eta)$
0	0,000	90	,817
1	,042	120	,859
2	,083	150	,890
3	,125	180	,914
4	,165	210	,934
5	,205	240	,951
6	,242	270	,965
7	,275	300	,977
14	,439	330	,989
28	,598	360	,999
30	,612	364	1,000
60	,751		

Existen múltiples tablas de factores de reducción ya calculadas (generalmente con métodos analíticos más refinados) correspondientes a diversas experiencias.[10]

6. La tabla de serie y con ella, entre ciertos límites, los factores de reducción, dependen de las características del grupo asegurado. Utilizando, por ejemplo, la tabla de serie propia de cada grupo de la experiencia checoslovaca, se obtienen los siguientes factores de reducción para la duración máxima de $\omega = 182$ días, manteniendo $e = 0$ días:

---

[10] Véase la lista de publicaciones al final del capítulo.

GRUPO ASEGURADO	R (0;182)
Obreros (tabla contenida en el párrafo 2)	0,92
Obreras	0,91
Obreros de 16 a 20 años de edad	0,96 aprox.
Obreros de 60 años y más de edad	0,80 »

Pasando a la categoría de empleados, también se producen cambios, algunos sensibles, en los factores de reducción.

Tiene, por lo tanto, cierta importancia elegir en cada caso concreto una tabla de serie o una de las tablas ya establecidas de factores de reducción, correspondiente a una población asegurada que tenga características similares a las de la población a la cual se está aplicando la tabla. En el caso de que se desee comparar varios sistemas, con poblaciones aseguradas de distintas características, mediante la reducción de las condiciones de cada sistema a un mismo período de carencia y a una misma duración máxima, conviene emplear —siempre que sea posible— diferentes tablas de serie o de factores de reducción, según corresponda mejor a cada una de las poblaciones en examen. No siempre es factible proceder según esta regla y las operaciones de reducción deben efectuarse a base de una sola tabla (o, por ejemplo, a base de dos tablas, una para hombres y otra para mujeres). En estos casos debe tenerse en cuenta el eventual margen de error en los resultados.

7. En el cuadro de la página 14 se comparan las tasas de morbilidad de algunos sistemas concretos, mediante reducción del período de carencia a $e_0 = 3$ días y de la duración máxima a $\eta_0 = 182$ días. Para mayor simplicidad aplicamos a todos los sistemas la tabla de serie de nuestro ejemplo (párrafo 2 del presente capítulo)[11], recordando que los resultados deben considerarse como aproximaciones únicamente.

Los símbolos usados son los ya explicados.

Valores originales del sistema (i):

e_i = período de carencia,

η_i = duración máxima,

$m(e_i, \eta_i)$ = tasa de morbilidad.

[11] Con excepción de Bélgica, en cuyo caso se aplican las tablas de series checoslovacas, correspondientes a obreros, obreras, empleados, empleadas, según la categoría de trabajadores de que se trate.

País (año) y personas protegidas	Valores originales			Reducción para $e_o = 3, \eta_o = 182$		
	e_i	η_i	$m(e_i; \eta_i)$	$R(e_i; \eta_i)$	$\frac{R(3;182)}{R(e_i; \eta_i)}$	$m(3;182)$
AUSTRIA (1958): Asalariados y asimilados, todas las actividades........	3	364	9,22	0,8754	0,9036	8,3
BELGICA (1954):						
Obreros............	3,5	182	7,18	0,7705	1,0266	7,4
Obreras............	»	»	12,71	0,7796	1,0233	13,0
Empleados..........	30	»	1,84	0,2711	2,8425	5,2
Empleadas	»	»	3,11	0,2547	2,9976	9,3
COSTA RICA (1955): Asalariados, todas las actividades	4	175	2,26	0,7450	1,0617	2,4
CHECOSLOVAQUIA (1958): Idem...............	0	365	15,08	1,0000	0,7910	11,9
EL SALVADOR (1958): Asalariados Industria y Comercio (Zona metropolitana)	3	364	3,17	0,8754	0,9036	2,9
FRANCIA (1955): Asalariados, todas las actividades	3	360	9,4	0,8743	0,9047	8,5
ITALIA (1958):						
Obreros comerciales.	3	180	5,16	0,7895	1,0019	5,2
— industriales.	3	150	8,86	0,7654	1,0334	9,2
PARAGUAY (1956): Asalariados, todas las actividades	7	182	1,68	0,6404	1,2352	2,1
PORTUGAL (1958): Asalariados, Industria y Comercio.........	6	270	8,6	0,7231	1,0939	9,4
TURQUIA (1958): Asalariados, no agrícolas	3	273	6,0	0,8417	0,9398	5,6
YUGOSLAVIA (1958): Asalariados, todas las actividades	0	Sin límite	13,17	1,000	0,7910	10,4

NOTAS: Bélgica: Obreros (as): El período de carencia es de 3 días *laborables*, que aproximamos con 3,5 días de calendario.

Francia: La duración máxima de algunas enfermedades (de «larga duración») es de 3 años.

Checoslovaquia y Yugoslavia: Para fines de cálculo se tomó $\eta_i = 364$.

La reducción con respecto al período de carencia $e_0 = 3$ días y la duración máxima $\eta_0 = 182$ días, se realiza en dos etapas:

$R(e_i; \eta_i)$ = factor auxiliar (secundario) de reducción para pasar de $e = 0$ a e_i y de ω a η_i;

$R_{e_i, \eta_i}(3;182) = \dfrac{R(3;182)}{R(e_i; \eta_i)}$ = factor final de reducción (paso de e_i a 3, y de η_i a 182)[12];

$m(3;182) = R_{e_i, \eta_i}(3;182)\ m(e_i; \eta_i)$ = tasa reducida de morbilidad.

Recordamos que algunas diferencias en las tasas pueden derivarse, en parte, de distintas nociones de «asegurado-año» utilizadas. Resulta de particular interés observar las tasas, relativamente bajas, de morbilidad de los tres países latinoamericanos contenidos en el cuadro, lo cual parece corresponder a un fenómeno muy generalizado que no ha podido dilucidarse aún por completo. Ciertamente, diferencias en la estructura de la población asegurada con respecto a sexo y edad, en la definición de «asegurado-año» y en el grado de industrialización explicarán una parte, mas no toda la diferencia que se observa en comparación con los países europeos.

8. Bibliografía

Entre los trabajos relativos a la construcción analítica de factores de reducción se citan los siguientes, presentados a la Primera Conferencia Internacional de Actuarios y Estadígrafos de la Seguridad Social, celebrada en Bruselas en noviembre de 1956:

M. A. Coppini: Factores de reducción y de clasificación de enfermedades según su duración.

W. Hiernaux y A. Lacrosse-Marcel: Factores de reducción que deben utilizarse en el seguro de enfermedad.

[12] $R(3,182) = 0{,}791$, con excepción de Bélgica (obreras, empleados, empleadas).

W. UHLMANN: Contribución a la representación matemática de la salida de enfermedad (Entkrankung). *Este último trabajo contiene una lista de trabajos anteriores sobre el mismo tema.*

A éstos conviene agregar:

O. I. T. Compulsory Sickness Insurance; Serie M., número 6 (Ginebra, 1927), que reproduce en su capítulo II, § 4, algunas tablas de factores de reducción.

II. — TASAS DE MORBILIDAD EN POBLACIONES NO ABSOLUTAMENTE ESTACIONARIAS

1. La población asegurada no estacionaria es una función del tiempo; designemos con P(t) el número de personas protegidas en el día *t*. Al respecto suponemos —sin que ello afecte la validez general de los resultados— que todas las entradas y salidas se realicen concluído el día, de modo que P(t) representa, durante todo el día *t*, un número entero determinado. Suponiendo siempre el año equivalente a 365 días, la población media protegida durante el año está representada por:

$$\overline{P} = \frac{1}{365} \sum_{t=1}^{365} P(t).$$

Si designamos con $\frac{q}{365}$ la frecuencia de casos de subsidio que se inician en un día, con respecto a una persona protegida, y si suponemos $\frac{q}{365}$ constante, entonces q también resulta ser la frecuencia de casos de subsidio que se inician en el año, relativa a un componente de la población media protegida $\overline{P}$.

Consideramos dos fórmulas para la tasa de morbilidad:

a) la del producto:

$$m = qd, \qquad d = \frac{\Sigma l_i}{l_1} = \frac{1}{l_1}(l_1 + l_2 + \dots + l_\omega),$$

donde $\{ l_i \}$ significa una tabla de serie aplicable al sistema; *m* es independiente de las variaciones de la población P (t).

b) el valor exacto de la tasa de morbilidad, $\overline{m}$, igual a la razón entre el número (B) de días de subsidio pagados en el año y la población media protegida en el año ($\overline{P}$):

$$\overline{m} = \frac{B}{\overline{P}}.$$

Nuestro propósito es establecer una relación matemática entre $m = qd$ y $\overline{m}$.

Si P(t) es creciente, se puede suponer *a priori* $\overline{m} > m = qd$. En efecto, una parte de los días subsidiados pagados en el año de observación proviene de casos iniciados en años anteriores cuando la población asegurada era menor, y, por ende, el número de casos inferior al de los casos iniciados en el año de observación.

2. Para encontrar una expresión matemática para B, procederemos de la manera siguiente: si $\{ l_i \}$ representa nuevamente una tabla de serie en el sentido ya explicado, se pagarán con respecto al primer día del año ($t = 1$) subsidios por:

$\frac{q}{365} \frac{1}{l_1} P(1)\, l_1$ casos que se iniciaron ese primer día $t = 1$;

$\frac{q}{365} \frac{1}{l_1} P(0)\, l_2$ casos iniciados el día $t = 0$, o sea el último día del año anterior.

$\frac{q}{365} \frac{1}{l_1} P(-1)\, l_3$ casos iniciados el día $t = -1$, o sea el penúltimo día del año anterior;

etcétera, y, por último, por:

$\frac{q}{365} \frac{1}{l_1} P(2 - \omega)\, l_\omega$ casos iniciados el día $t = 2 - \omega$.

Si se procede en la misma forma con respecto a cada día del año y luego se ordenan convenientemente todos los términos, se obtiene para B una suma doble:

$$B = \frac{q}{365} \frac{1}{l_1} \sum_{i=1}^{\omega} \left[l_i \sum_{t=1}^{365} P(1 - i + t) \right].$$

Teniendo en cuenta que $\overline{P} = \frac{1}{365} \sum_{t=1}^{365} P(t)$, queda finalmente:

$$\overline{m} = \frac{B}{\overline{P}} = \left\{ \frac{q}{l_1} \sum_{i=1}^{\omega} \left[l_i \sum_{t=1}^{365} P(1 - i + t) \right] \right\} : \left\{ \sum_{t=1}^{365} P(t) \right\}.$$

3. Examinemos ahora el caso de mayor interés; el de una población que crece en progresión geométrica:

$$P(t) = c\, a^t; \qquad c = \text{constante},$$

siendo *a* el «coeficiente de crecimiento diario».

La población promedio en el año ($1 \leqq t \leqq 365$) está entonces representada por:

$$\overline{P} = \frac{1}{365} \sum_{t=1}^{365} P(t) = \frac{c}{365} (a + a^2 + \ldots + a^{365})$$

$$= \frac{c}{365} \frac{a^{365} - 1}{a - 1}.$$

Análogamente se obtiene (no nos detenemos en detalles de la demostración):

$$B = \frac{q}{365} \frac{c}{l_1} a \frac{a^{365} - 1}{a - 1} (l_1 + l_2 a^{-1} + l_3 a^{-2} + \ldots + l_\omega a^{-\omega+1}),$$

de suerte que para $\overline{m} = \frac{B}{\overline{P}}$ resulta la fórmula:

$$\overline{m} = \frac{q}{l_1} (l_1 + l_2 a^{-1} + l_3 a^{-2} + \ldots + l_\omega a^{-\omega+1}).$$

4. Para la última expresión puede encontrarse una interpretación sorprendente y simple, utilizando la sucesión de valores $\{ \lambda_i \}$, donde, con respecto a determinado día escogido, λ_i significa el número de casos de subsidio en vigor en dicho día con la duración (contada *hacia* atrás, incluyendo el día de referencia) de exactamente i días. Escogemos como día de referencia $t = 0$ (para cualquier otro día, el resultado final sería idéntico). Entonces es fácil ver que para $P(t) = ca^t$:

$$\lambda_i = \frac{q}{365} P(-i+1) \frac{l_i}{l_1} = \frac{q}{365} c\, a^{-i+1} \frac{l_i}{l_1} =$$

$$= \gamma\, a^{-i+1}\, l_i \; ; \; \gamma = \text{constante}$$

y, por tanto,

$$\frac{\sum\limits_1^{\omega} \lambda_i}{\lambda_1} = \frac{1}{l_1} (l_1 + l_2 a^{-1} + l_3 a^{-2} + \ldots + l_\omega a^{-\omega+1}) \; ;$$

o sea:

$$\overline{m} = q\,\delta\,, \qquad \delta = \frac{\sum\limits_1^{\omega} \lambda_i}{\lambda_1}\,.$$

Esta última fórmula tiene la misma estructura que:

$$m = qd\,, \qquad d = \frac{\sum\limits_1^{\omega} l_i}{l_1}\,,$$

con la sola diferencia de que la sucesión de valores $\{ \lambda_i \}$ es sustituída por la tabla de serie $\{ l_i \}$. En otros términos, se obtiene el valor exacto $\overline{m}$ de la tasa de morbilidad, al reemplazar d por δ en la fórmula clásica $m = qd$.

Si la población es absolutamente estacionaria: $a = 1$, sabemos que $\delta = d$, o sea $\overline{m} = m$, lo que queda también confirmado por la fórmula anterior para δ.

Si la población es creciente: $a > 1$, δ es tanto más pequeña cuanto más grande sea a, es decir la *tasa de morbilidad* $\overline{m}$ *disminuye* *proporcionalmente al coeficiente de incremento a.* En particular, puesto que $\overline{m}$ corresponde a las obligaciones financieras de la entidad aseguradora, estas *obligaciones son una función decreciente de a.*

5. Se plantea el problema de si existe para $a \neq 1$ una diferencia notable entre los valores $\overline{m}$ y m, o si $m = qd$ puede considerarse en la práctica como una aproximación suficiente del valor exacto $\overline{m}$ de la tasa de morbilidad.

A tal efecto citemos un ejemplo calculado a base de la tabla de serie ya utilizada, suponiendo un incremento anual del 5 por 100 de la población asegurada. Se obtiene (período de carencia: 0; duración máxima: 52 semanas):

$$\delta = 26{,}8, \qquad d = 27{,}0; \qquad \frac{\delta}{d} = 0{,}993\ ;$$

lo cual demuestra que la diferencia es despreciable para fines prácticos. La diferencia relativa es mayor, cuando existe un tiempo de carencia largo; si éste fuese, por ejemplo, de 4 semanas, se obtendría:

$$\delta = 53{,}7, \qquad d = 54{,}5\ ; \qquad \frac{\delta}{d} = 0{,}985\ .$$

En resumen, si bien la diferencia relativa entre δ y d no es elevada, sería recomendable aplicar la fórmula $\overline{m} = q\delta$ en vez de la usual $m = qd$, pues la primera es de validez más general; en particular da valores exactos para poblaciones crecientes o decrecientes geométricamente, y es de suponer que también para otras poblaciones variables produzca, en general, valores más precisos que la fórmula $m = qd$.

III. Comparación entre la frecuencia relativa q de casos que principian en el año y la frecuencia relativa $\overline{q}$ de casos que se hallan vigentes en alguna época del año.

1. Nuevamente se designa con $\overline{P}$ la población media protegida durante el año de observación, y con $P_1 = P(1)$ el número de personas protegidas en el primer día del año.

Siendo $\overline{q}$ la frecuencia de casos que se hallan vigentes en alguna época del año, en relación con la población media $\overline{P}$, se tiene la siguiente igualdad:

Número de casos vigentes en alguna época del año
$=$ Número de casos vigentes en el primer día del año e iniciados en años anteriores.
$+$ Número de casos iniciados en el año.

O sea, en fórmula:

$$\bar{q}\,\bar{P} = \sum_{i=2}^{\omega} \lambda_i + q\bar{P} = \sum_{i=1}^{\omega} \lambda_i - \lambda_1 + q\bar{P} = \lambda_1 \left[\frac{\sum\limits_{1}^{\omega} \lambda_i}{\lambda_1} - 1 \right] + q\bar{P},$$

refiriendo la sucesión $\{\lambda_i\}$ al primer día del año.

Como $\lambda_1 = \frac{q}{365} P_1$, se obtiene:

$$\bar{q}\,\bar{P} = \frac{q}{365} P_1 (\delta - 1) + q\bar{P},$$

o también:

$$\bar{q} = q\left(1 + \frac{P_1}{\bar{P}} \frac{\delta - 1}{365}\right).$$

2. Consideremos ahora el caso de una población absolutamente estacionaria: $P_1 = P(t) = \bar{P}$. En este caso $\delta = d =$ duración media de casos terminados, obteniéndose:

$$\bar{q} = q\left(1 + \frac{d - 1}{365}\right) = q\,\frac{364 + d}{365},$$

fórmula que permite calcular $\bar{q}$ conociendo q y d.

3. Cuando se designa con $\bar{d}$ la duración media de casos correspondientes a $\bar{q}$, con respecto a los días que caen dentro del año de observación, tenemos, siempre en la hipótesis de una población absolutamente estacionaria:

$$\bar{q}\,\bar{d} = q\,d = m.$$

Esto permite invertir la fórmula anterior, obteniendo primero:

$$365\,\frac{\bar{q}}{q} = 364 + \frac{\bar{q}}{q}\,\bar{d}$$

y después de una simple transformación:

$$q = \bar{q}\ \frac{365\ \bar{d}}{364}$$

o también:

$$\frac{q}{\bar{q}} = \frac{365 - \bar{d}}{364}\ .$$

4. Una estadística del sistema inglés para el año 1958 [13], que permitió calcular directa y separadamente tanto la relación $\frac{q}{\bar{q}}$ como el valor $\frac{365 - \bar{d}}{364}$, dió la oportunidad de comprobar la validez de la última fórmula en la práctica.

Con muy pocas excepciones, existe una coincidencia razonable entre $\frac{q}{\bar{q}}$ y $\frac{365 - \bar{d}}{364}$. Unicamente enfermedades de una duración media excepcionalmente larga (por ejemplo, los grupos C1 y C2 que comprenden la tuberculosis pulmonar y otras formas de la tuberculosis), y que, por ende, incluyen un número considerable de casos iniciados en años anteriores (correspondiéndoles un cociente $\frac{q}{\bar{q}}$ relativamente pequeño), muestran discrepancias mayores. Pero, en estos casos, nuestra hipótesis tácita de que se trata, aproximadamente de una población estacionaria con frecuencia de casos y duraciones medias también más o menos constantes, no puede mantenerse con respecto a casos de enfermedad que se extienden sobre un período largo de tiempo, a veces de varios años; en particular, nuevos métodos de curación pueden haber influído sensiblemente

---

[13] *Report of the Ministry of Pensions and National Insurance for the year 1958;* Her Majesty's Stationery Office, London, 1959. Los números de días de enfermedad en este informe se refieren a días laborales y tuvieron que ser convertidos primero a días de calendario, lo cual se hizo con suficiente aproximación tomando un día laboral como 1,16 días de calendario.

En efecto, se obtiene:

GRUPO DE ENFERMEDADES [14]	HOMBRES		MUJERES	
	$\frac{q}{\bar{q}}$	$\frac{365-\bar{d}}{364}$	$\frac{q}{\bar{q}}$	$\frac{365-\bar{d}}{364}$
Todos los casos	0,90	0,89	0,88	0,88
C1	0,33	0,40	0,25	0,34
C2	0,46	0,54	0,28	0,42
C3	0,33	0,33	0,30	0,37
C4—C6	0,96	0,95	0,93	0,94
C7	0,97	0,95	0,97	0,95
C8—C11	0,94	0,94	0,92	0,93
C12	0,69	0,70	0,50	0,59
C13	0,81	0,84	0,82	0,82
C14	0,88	0,86	0,84	0,83
C15—C18	0,77	0,78	0,82	0,83
C19	0,72	0,71	0,75	0,75
C20	0,53	0,53	0,46	0,48
C21	0,86	0,85	0,86	0,86
C22	0,93	0,93	0,92	0,92
C23—C24	0,65	0,68	0,46	0,44
C25	0,62	0,61	0,38	0,41
C26	0,71	0,71	0,58	0,61
C27	0,91	0,90	0,85	0,83
C28	0,99	0,97	0,99	0,97
C29	0,98	0,97	0,98	0,97
C30	0,99	0,97	0,99	0,96
C31	0,84	0,86	0,84	0,87
C32	0,91	0,89	0,92	0,91
C33	0,66	0,67	—	—
C34	0,92	0,91	0,94	0,93
C35	0,93	0,92	0,92	0,92
C36	0,91	0,90	0,91	0,90
C37	0,87	0,86	0,79	0,78
C38	0,97	0,96	0,96	0,95
C39 - C40	0,93	0,92	0,90	0,90
C41—C42	0,85	0,85	0,87	0,87
C43	—	—	0,87	0,89
C44	0,97	0,97	0,97	0,96
C45	0,91	0,90	0,87	0,87
C46	0,93	0,92	0,82	0,82
C47	0,89	0,88	0,83	0,84
C48	0,71	0,73	0,50	0,46
C49	0,88	0,87	0,87	0,87
C50	0,92	0,92	0,91	0,91

[14] «Lista especial («C») de 50 causas para la presentación tabular de la morbilidad para los Seguros Sociales»; O. M. S., Manual de Clasificación Estadística Internacional de Enfermedades, Traumatismos y Causas de Defunción; Ginebra, 1950.

sobre la morbilidad específica de tal enfermedad. Sin embargo, varios grupos de enfermedades largas muestran una coincidencia sorprendente entre $\frac{\overline{q}}{q}$ y el valor teórico $\frac{365 - \overline{d}}{364}$.

* * *

He llegado al fin de nuestras charlas sobre las tasas de morbilidad. A pesar de la aridez de un tema tan lleno de fórmulas y cifras, espero haber despertado en ustedes algún interés en este campo de estudio aún tan poco explorado; si lo he logrado me sentiré plenamente recompensado.