Programación Lineal-Método Simplex

Por D. Francisco Busquets.

Conferencia desarrollada en las Sesiones Científicas del Seminario de O. R. (Operations Research) de la Delegación de Barcelona del Instituto de Actuarios Españoles, el día 27 de febrero de 1957.

1. *La Programación Lineal como problema matemático.*

1,1. En su aspecto matemático la *programación lineal* se reduce siempre al siguiente problema:

Determinar los máximos de la función lineal de *n* variables

$$Z = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots\ldots + c_n\lambda_n \qquad [1]$$

condicionados al sistema de *m* ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\lambda_n = b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\lambda_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\lambda_n = b_m \end{array} \qquad [2]$$

llamadas relaciones o ecuaciones de *vínculo,* y a las inecuaciones

$$\lambda_j \geqslant 0 \qquad \text{para} \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad [3]$$

siendo $n > m$.

1,2. Pueden presentarse algunas variantes de dicho problema, pero en todos los casos ligeras modificaciones conducen al problema general. Tales son:

a) Determinar el *mínimo* de *Z,* en cuyo caso basta hallar el máximo de la función

$$Z = - c_1\lambda_1 - c_2\lambda_2 - \ldots\ldots - c_n\lambda_n$$

es decir, de la función lineal que resulta de cambiar los signos de los coeficientes.

b) Que alguna de las relaciones de vínculo sea una inecuación, bastando entonces introducir una nueva variable (μ), que en la función a maximizar intervendrá con coeficiente *cero* o negativo de alto valor absoluto, según los casos.

Así, por ejemplo:

$$a_{p1}\lambda_1 + a_{p2}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{pn}\lambda_n \leqslant b_p$$
$$a_{p1}\lambda_1 + a_{p2}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{pn}\lambda_n \geqslant b_p$$

se convierten, respectivamente, en

$$a_{p1}\lambda_1 + a_{p2}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{pn}\lambda_n + \mu = b_p$$
$$a_{p1}\lambda_1 + a_{p2}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{pn}\lambda_n - \mu = b_p$$

2. *Objeto de la Programación Lineal.*

2,1. La Programación Lineal tiene por objeto *buscar la mejor forma de distribución de unas disponibilidades dadas entre diversas aplicaciones posibles, dentro de un criterio de preferencia,* siempre que dicho criterio y la distribución puedan expresarse mediante ecuaciones lineales.

2,2. Uno de los problemas típicos de la programación lineal es el de Hitchcock, que puede representarse por el siguiente esquema:

Aplicaciones / Disponibilidades	A_1	A_2	......	A_q
D_1	λ_{11}	λ_{12}	......	λ_{1q}
D_2	λ_{21}	λ_{22}	......	λ_{2q}
...	......	......	......	......
...	......	......	......	......
D_p	λ_{p1}	λ_{p2}	......	λ_{pq}

Siendo λ_{hk} la cantidad de disponibilidad D_h que se destina a la aplicación A_k.

El número de variables es $p \cdot q$ y las ecuaciones de vínculo resultan de sumar las filas y las columnas del esquema. En efecto, si representamos por el propio símbolo D_h la cantidad de disponibilidad D_h y por A_k el total de disponibilidades distintas aplicadas a la aplicación A_k, las ecuaciones de vínculo serán:

$$
\begin{array}{l}
\lambda_{11} + \lambda_{12} + \ldots\ldots + \lambda_{1q} = D_1 \\
\lambda_{21} + \lambda_{22} + \ldots\ldots + \lambda_{2q} = D_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{p1} + \lambda_{p2} + \ldots\ldots + \lambda_{pq} = D_p \\
\lambda_{11} + \lambda_{21} + \ldots\ldots + \lambda_{p1} = A_1 \\
\lambda_{12} + \lambda_{22} + \ldots\ldots + \lambda_{p2} = A_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{1q} + \lambda_{2q} + \ldots\ldots + \lambda_{pq} = A_q \, .
\end{array}
$$

Es decir, $p + q$ ecuaciones en total, de las que una de ellas, por lo menos, es combinación lineal de las demás. Se obtienen, pues, como máximo, $p + q - 1$ ecuaciones linealmente independientes, número menor que $p \cdot q$.

(Debemos hacer observar que algunas de las relaciones, especialmente las que resultan de sumar las filas del esquema, pueden ser inecuaciones de la forma

$$\lambda_{h1} + \lambda_{h2} + \ldots\ldots + {}_{hq} \leqslant D_h$$

ya que, en muchos casos, la solución del problema no exige que se agoten todas las disponibilidades.)

Y la función a maximizar (o minimizar) será:

$$Z = c_{11}\lambda_{11} + c_{12}\lambda_{12} + \ldots\ldots + c_{pq}\lambda_{pq}$$

Como puede verse, los problemas tipo Hitchcock se caracterizan por intervenir las variables solamente con los coeficientes 1 ó 0 en las relaciones de vínculo.

Veamos algunos ejemplos de este tipo de problemas:

2,2-1. *De abastecimientos.* — Distribución en cantidades específicas de disponibilidades de unas mercancías entre varios puntos de destino, al menor coste de transporte posible.

Criterio de preferencia: mínimo de la función *Z*, con coeficientes c_{hk} que representan el coste unitario de transporte desde el lugar de disponibilidad D_h al de destino A_k.

2,2-2. *Productividad de la mano de obra.*—Distribución de cantidades disponibles de distintas clases de mano de obra en la fabricación de diferentes productos posibles de rendimiento conocido, para obtener el máximo beneficio.

Criterio de preferencia: máximo de la función *Z*, con coeficientes c_{hk} que representan el rendimiento del producto A_k por cada hora-hombre de la clase D_h a él dedicada.

2,2-3. *Productividad de las máquinas.* — Distribución de tiempos de trabajo de distintas máquinas en la fabricación de diversos productos posibles, para obtener el máximo beneficio.

Criterio de preferencia: máximo de la función *Z*, con coeficientes c_{hk} que representan el beneficio que se obtiene al dedicar cada hora-máquina D_h a fabricar el producto A_k.

2,2-4. Otro problema de productividad consistiría en determinar la mejor distribución de unas primeras materias dadas en la fabricación de distintos productos posibles para obtener el mayor beneficio. Igualmente originan problemas de este tipo la inversión de diversas disponibilidades financieras, el repartir la producción entre diversos fabricantes que monopolizan unos mercados de capacidades de absorción conocidas, para minimizar el coste total, etc.

2,3. Existen tipos de problemas dentro de la programación lineal más complejos que los de Hitchcock, en los que los coeficientes de las variables en las relaciones de vínculo son, en general, distintos de 1 y 0, como, por ejemplo, cuando se conocen las proporciones en que las disponibilidades se emplean conjuntamente en distintos procesos de fabricación y se trata de obtener cantidades de productos de coste total mínimo o rendimiento máximo.

2,4. El criterio de preferencia puede ser en algunos problemas, probabilístico, es decir, que los coeficientes en Z de las variables sean probabilidades y la propia Z una esperanza matemática a maximizar (o minimizar).

3. *Método Simplex.*

El Simplex es una forma mecánica de resolver, por aproximaciones sucesivas, el problema matemático que hemos enunciado al principio. Tuvo su origen y fundamento en el estudio de los ángulos poliédricos convexos —ejemplo de la aplicación práctica de una elucubración geométrica que durante muchos años fue considerada como mera especulación científica—, pero puede demostrarse por un camino puramente analítico.

Con la notación matricial, el problema planteado se expresa así:

$$\text{máx. } Z = [c_i]\lambda$$
$$A\lambda = P_0$$
$$\lambda_j \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots n$$

siendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \qquad p_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ y } \quad m < n$$

También puede expresarse la matriz A mediante sus columnas, cuyos vectores representaremos por $P_1, P_2, \ldots, P_n$, es decir:

$$A = [P_1 \ldots P_i \ldots P_m \; P_{m+1} \ldots P_k \ldots P_n]$$

Suponiendo que el sistema de ecuaciones de vínculos es reducido —si no lo fuera prescindiríamos de las ecuaciones linealmente dependientes—, la característica de la matriz A será m y podremos ordenar los términos de las ecuaciones de tal manera que el menor principal sea

$$\left| P_1 \; P_2 \ldots P_i \ldots P_m \right| \neq 0 \qquad [4]$$

Partamos de una solución *de base* del sistema [2], es decir, de la solución que resulta de igualar a cero las $n - m$ variables independientes

$$\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots\ldots, \lambda_n$$

(Debe ser tal, que ninguna de las variables dependientes resulte menor que cero; caso contrario deberíamos partir de otro menor de orden m no nulo de la matriz A, y de no existir el que proporcionase sólo soluciones positivas, el problema planteado no tendría solución posible.) Supongamos que tal solución de base es:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y da a la función a maximizar el valor $Z = [c_i]\lambda$.

Dicho valor será máximo si hemos acertado a dar con una *solución óptima,* es decir, con una solución del sistema de ecuaciones de vínculo que dé a Z un valor no superado por los que le dan las demás soluciones no negativas posibles de dicho sistema, pero lo frecuente es que no sea así. Para contrastar este extremo, calcularemos el valor de Z para otra solución del sistema, por ejemplo, la que resulta de hacer $\lambda'_k > 0$ (siendo λ'_k una de las variables arbitrarias). Sea la nueva solución

$$\lambda' = \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_i \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda'_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

para la cual la función toma el valor

$$Z' = [c_i]\lambda'$$

que comparada por diferencia con la anterior dará:

$$Z - Z' = [c_i]\ (\lambda - \lambda') = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda'_1 \\ \lambda_2 - \lambda'_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_i - \lambda'_i \\ 0 \\ 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ -\lambda'_k \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se dirá entonces que la introducción de $\lambda'_k > 0$:

es conveniente, si $Z - Z' < 0$
no es conveniente, si $Z - Z' > 0$
es indiferente, si $Z - Z' = 0$

La determinación *a priori* del signo de dicha diferencia para cada valor positivo dado a las variables de subíndices $k = m + 1, m + 2, \ldots\ldots, n$, nos permitirá determinar si existe o no alguna variable arbitraria que, a los efectos de mejorar el valor de *Z*, conviniere introducir. Este va a ser nuestro primer objetivo.

Sabemos que las columnas de la matriz *A* son combinación lineal de las que forman el menor [4], es decir, para $i = 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$:

$$P_i = x_{1i}P_1 + x_{2i}P_2 + \ldots + x_{mi}P_m$$

siendo alguna $x_{ri} \neq 0$ (obsérvese que para $i = 1, 2, \ldots, m$, sólo uno de los coeficientes será distinto de cero, el de P_i, precisamente, que será igual a la unidad). Luego dicha matriz puede escribirse:

$$A = [P_1 \; P_2 \ldots P_i \ldots P_m] \; [IX]$$

siendo *I* la matriz unidad de orden *m* y

$$X = \begin{bmatrix} x_{1m+1} & \ldots\ldots & x_{1k} & \ldots\ldots & x_{1n} \\ x_{2m+1} & \ldots\ldots & x_{2k} & \ldots\ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{mm+1} & \ldots\ldots & x_{mk} & \ldots\ldots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Y dado que el sistema [2] se verifica para los dos conjuntos de valores λ y λ' que hemos dicho, podremos escribir:

$$[P_1 \; P_2 \ldots\ldots P_m] \; [IX] \; \lambda = P_0$$
$$[P_1 \; P_2 \ldots\ldots P_m] \; [IX] \; \lambda' = P_0$$

y por ser el primer factor una matriz cuadrada no singular,

$$[IX] = [P_1 \; P_2 \ldots\ldots P_m]^{-1} \; P_0$$
$$[IX] = [P_1 \; P_2 \ldots\ldots P_m]^{-1} \; P_0$$

de donde se deduce la igualdad de los primeros miembros.

Efectuando por separado los productos que constituyen dichos primeros miembros, después de particionar convenientemente las matrices, resulta:

$$[I \mid X]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_m\\ --\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix} = I\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_m\end{bmatrix} + X\,0 = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_m\end{bmatrix};$$

$$[I \mid X]\begin{bmatrix}\lambda'_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda'_i\\ \cdot\\ \lambda'_m\\ --\\ 0\\ \cdot\\ \lambda'_k\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda'_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda'_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda'_m\end{bmatrix} + \lambda'_k\begin{bmatrix}x_{1k}\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{ik}\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{mk}\end{bmatrix}$$

de donde, igualando y trasponiendo términos,

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 - \lambda'_1\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ \lambda_i - \lambda'_i\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ \lambda_m - \lambda'_m\end{bmatrix} = \lambda'_k\begin{bmatrix}x_{1k}\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{ik}\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{mk}\end{bmatrix}$$

Volviendo a la diferencia de valores de Z, resultará

$$Z - Z' = [c_1 \dots c_i \dots c_m \mid c_{m+1} \dots c_k \dots c_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda'_1 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_i - \lambda'_i \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_m - \lambda'_m \\ - - - - - - \\ 0 \\ \vdots \\ -\lambda'_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [c_1 \dots c_i \dots c_m] \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ik} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mk} \end{bmatrix} \lambda'_k - c_k\lambda'_k = \lambda'_k(Z_k - c_k) = \lambda'_k\omega_k$$

habiendo hecho $Z_k = c_1x_{1k} + \dots + c_ix_{ik} + \dots + c_mx_{mk}$; valor fácil de determinar para cada valor de k si se conocen los términos de la matriz X, de cálculo laborioso pero posible, y

$$\omega_k = Z_k - c_k$$

(Es fácil ver que:

$$\begin{bmatrix} \omega_{m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_n \end{bmatrix} = [c_1 \dots c_i \dots c_m]\, X - [c_{m+1} \dots c_k \dots c_n] I$$

y $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_m = 0$).

El que sea o no conveniente introducir $\lambda'_k > 0$ se ha reducido, pues al signo de ω_k y, si éste es negativo, el beneficio es tanto mayor cuanto mayor sea λ'_k. Obsérvese, no obstante, que las inecuaciones $\lambda'_j \geqslant 0$ limitan las posibilidades de crecimiento de dicha variable, por cuanto de la igualdad [5] resulta:

$$\lambda'_i = \lambda_i - x_{ik}\lambda'_k \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, r, \ldots, m, \qquad [6]$$

y, para valores positivos de x_{ik}, al crecer desde cero λ'_k alcanzará un primer valor para el que será nula alguna de las λ'_i, cuando esto ocurra habremos obtenido el máximo valor con que es posible introducir λ'_k y, a la vez, habremos llegado a otra solución de base del sistema [2], en la que $\lambda'_r = 0$ (en el supuesto de que haya sido ésta la primera en anularse) formará parte de las variables arbitrarias y λ'_k de las dependientes, con valor

$$\lambda'_k = \frac{\lambda_r}{x_{rk}}$$

Estamos ahora en condiciones de describir la tabla del Simplex, es decir, la forma práctica de distribuir los valores y realizar los cálculos de las ω_k.

Con la solución de base de que partimos y los valores de la matriz [IX], que para X deben calcularse como soluciones de los sistemas determinados

$$P_k = P_1x_{1k} + P_2x_{2k} + \ldots + P_mx_{mk}$$

que se forman al dar a k los valores sucesivos $m + 1$, $m + 2$, ..., n, se confecciona la siguiente tabla del Simplex:

			c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n	D
A	B	C	P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n	E
c_1	P_1	λ_1	1	0	…	0	…	0	x_{1m+1}	…	x_{1k}	…	x_{1n}	
c_2	P_s	λ_2	0	1	…	0	…	0	x_{2m+1}	…	x_{2k}	…	x_{2n}	
.	.	.	.	.	…	.	…	.	.	…	.	…	.	
.	.	.	.	.	…	.	…	.	.	…	.	…	.	
c_r	P_r	λ_r	0	0	…	1	…	0	x_{rm+1}	…	x_{rk}	…	x_{rn}	F
.	.	.	.	.	…	.	…	.	.	…	.	…	.	
.	.	.	.	.	…	.	…	.	.	…	.	…	.	
c_m	P_m	λ_m	0	0	…	0	…	1	x_{mm+1}	…	x_{mk}	…	x_{mn}	
		Z	$Z_1 = C_1$	$Z_2 = C_2$	…	$Z_r = C_r$	…	$Z_m = C_m$	Z_{m+1}	…	Z_k	…	Z_n	G
			0	0	…	0	…	0	ω_{m+1}	…	ω_k	…	ω_n	H

En la práctica las líneas B y D contienen siempre los símbolos P_j sin traducción numérica, y sirven para indicar el orden en que se toman las variables.

Si todas las diferencias $\omega_k = Z_k - c_k$ para $k = m + 1, \ldots, n$, son positivas, sabremos que no puede mejorarse el valor de Z introduciendo, con valor mayor que cero, alguna de las variables arbitrarias; habremos, por lo tanto, hallado una solución óptima. Si alguna de dichas diferencias es negativa, la introducción de la variable que corresponda a la diferencia negativa de mayor valor absoluto [1] (supongamos que ésta es ω_k) en la solución de base, mejorará el valor de Z. El valor máximo, λ'_k, que podamos dar a dicha variable es, como hemos dicho antes, el que anula una de las variables de la base sin variar el signo de las demás. Para determinar λ'_k habida cuenta de las relaciones [6] que, como máximo, deben anularse, formaremos los cocientes:

$$\frac{\lambda_1}{x_{1k}}, \frac{\lambda_2}{x_{2k}}, \ldots\ldots, \frac{\lambda_r}{x_{rk}}, \ldots, \frac{\lambda_m}{x_{mk}}$$

(sólo son necesarios los cocientes de divisor $x_{ik} > 0$) el menor de ellos $\left(\text{suponemos como hemos dicho antes, que lo es } \frac{\lambda_r}{x_{rk}}\right)$ será el valor buscado, es decir, tomaremos $\lambda'_k = \frac{\lambda_r}{x_{rk}}$ que, junto con los demás valores de las variables $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{r-1}, \lambda'_{r+1}, \ldots, \lambda'_m$, proporcionados por [6], constituirá la nueva solución de base con la que podremos formar una nueva tabla del Simplex.

Los valores de la matriz X' de la nueva tabla pueden hallarse por fórmulas de recurrencia análogas a las que han proporcionado los valores de λ'_j. Veámoslo.

---

(1) Para progresar más rápidamente, deberemos tomar como variable a introducir en la nueva solución de base la que, para el valor ω_k negativo, proporciona un mayor producto $\lambda'_k\omega_k$. El mayor trabajo que representa buscar este producto se compensa al ahorrar tablas sucesivas del Simplex.

El menor correspondiente a la nueva base será:

$$\left| P_1 \; P_2 \; \ldots \; P_{r-1} \; P_{r+1} \; \ldots \; P_m \; P_k \right|$$

y, por lo tanto, para i = 1, 2, ..., n, tendremos:

$$P_i = [P_1 \ldots P_{r-1} \; P_{r+1} \ldots P_m | P_k] \begin{bmatrix} x'_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_{r-1i} \\ x'_{r+1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_{mi} \\ ---- \\ x'_{ki} \end{bmatrix} =$$

$$= [P_1 \ldots P_{r-1} \; P_{r+1} \ldots P_m] \begin{bmatrix} x'_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_{r-1i} \\ x'_{r+1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_{mi} \end{bmatrix} + P_k x_{ki}$$

Con la antigua base teniamos:

$$P_i = [P_1 \ldots P_{r-1} P | {}_r P |_{r+1} \ldots P_m] \begin{bmatrix} x_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{r-1i} \\ --- \\ x_{ri} \\ --- \\ x_{r+1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mi} \end{bmatrix} =$$

$$
= [P_1 \ldots P_{r-1}\ P_{r+1} \ldots P_m] \begin{bmatrix} x_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{r-1i} \\ x_{r+1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mi} \end{bmatrix} + P_r x_{ri}
$$

y, también,

$$
P_k = [P_1 \ldots P_{r-1}\ P_{r+1} \ldots P_m] \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{r-1k} \\ x_{r+1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mk} \end{bmatrix} + P_r x_{rk}
$$

Igualando los valores de P_i, sustituyendo P_k, traspasando todos los términos al primer miembro y reduciendo, queda:

$$
[P_1 \ldots P_{r-1}\ P_{r+1} \ldots P_m] \begin{bmatrix} x'_{1i} + x_{1k}\, x'_{ki} - x_{1i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_{r-1i} + x_{r-1k}\, x'_{ki} - x_{r-1i} \\ x'_{r+1i} + x_{r+1k}\, x'_{ki} - x_{r+1i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_{mi} + x_{mk}\, x'_{ki} - x_{mi} \end{bmatrix} +
$$

$$
+ P_r\,(x_{rk}\, x'_{ki} - x_{ri}) = 0
$$

de donde, identificando:

$$
x'_{ji} + x_{jk}\, x'_{ki} - x_{ji} = 0 \qquad \text{y} \qquad x_{rk}\, x'_{ki} - x_{ri} = 0
$$

$$
(\text{para } j = 1, 2, \ldots, r - 1, r + 1, \ldots, m)
$$

es decir:

$$x'_{ki} = \frac{x_{ri}}{x_{rk}} \qquad y \qquad x'_{ji} = x_{ji} - x_{jk}\, x'_{ki}$$

Los valores de ω'_i pueden determinarse también a partir de los ω_i en efecto:

$$\begin{aligned}\omega'_i = Z'_i - c_i = c_1\, x'_{1i} + \dots + c_{r-1}\, x'_{r-1i} + \\ + c_{r+1}\, x'_{r+1i} + \dots + c_m\, x'_{mi} + c_k\, x'_{ki} - c_k = \\ = c_1(x_{1i} - x'_{ki}\, x_{1k}) + \dots + c_{r-1}(x_{r-1i} - \\ - x'_{ki}\, x_{r-1k}) + c_{r+1}(x_{r+1i} - x'_{ki}\, x_{r+1k}) + \\ + \dots + c_m(x_{mi} - x'_{ki}\, x_{mk}) + c_k\, x'_{ki} - c_i + \\ + c_r(x_{ri} - x'_{ki}\, x_{rk}) =\end{aligned}$$

(obsérvese que este sumando vale cero)

$$Z_i - c_i - x'_{ki}(Z_k - c_k) = \omega_i - x'_{ki}\, \omega_k$$

Si representamos ω_i por x_{0i} (lo que equivale a considerar H como la fila cero de F), podemos escribir, en general:

$$\begin{aligned} x'_{1i} &= x_{1i} - x'_{ki}\, x_{1k} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_{mi} &= x_{mi} - x'_{ki} x_{mk} \\ x'_{0i} &= x_{0i} - x'_{ki}\, x_{0k} \end{aligned}$$

En la nueva tabla puede suceder que, para todos los valores posibles de *i*, sea $\omega'_i \geqslant 0$, en cuyo caso hemos llegado a una solución óptima (por cuanto no existirá ninguna variable independiente cuya introducción en la base pueda mejorar el valor de Z'), o bien, que sea $\omega'_i < 0$ para alguno de los valores de *i*, lo que indicará que se impone tomar una nueva solución de base, con la sustitución adecuada de variables, para formar otra nueva tabla del Simplex. Así se procederá con sucesivas tablas, hasta encontrar aquélla que, para todo *i*, tenga [1] $\omega_i \geqslant 0$. El número de tablas a confeccionar será, evidentemente, $\binom{m}{n}$.

(1) Para lo que sigue, las expresiones ω_i, λ_i, *Z*, etc., significarán valores de la última tabla del Simplex.

Obtenida una tabla del Simplex sin *omegas* negativos (en lo que sigue prescindiremos de las ω_i correspondientes a las variables dependientes de la base, para las que sabemos que dichos valores son nulos) puede ocurrir:

a) Que todos los valores ω_i que consideramos sean mayores que *cero*, lo que significará que el problema no tiene más que una solución óptima, la de base, que corresponde a dicha tabla.

b) Que haya algún $\omega_i = 0$, lo que significará que existen varias soluciones de base posibles, tantas como *omegas* nulos más uno, porque cualquier variable arbitraria λ_i con ω_i nulo puede sustituir a una de la base sin alterar el valor de Z, constituyendo otra solución de base. Todos estos óptimos de Z, que son soluciones de base, se llaman soluciones *óptimas fundamentales* del problema, para distinguirlas de las *óptimas derivadas*, que son las que tienen distintos de cero los valores de más de *m* de las variables λ_i, y pueden obtenerse de dos formas distintas: Como combinación lineal de algunas de las soluciones óptimas fundamentales, con coeficientes $k_1, k_2, \ldots, k_p$ cualesquiera que verifiquen la igualdad $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = 1$, o bien dando a alguna de las variables independientes con $\omega_i = 0$, un valor $\lambda_i > 0$ intermedio, para que las de la base no tomen valores negativos o nulos.

Resumiendo:

Si podemos confeccionar una primera tabla del Simplex, el problema de la programación lineal tendrá solución:

— *Unica*, si la tabla que proporciona la solución óptima de base no contiene más ceros en la fila H que los correspondientes a las variables de la base.

— *Múltiple*, si existe en la fila H algún otro cero. En este caso, tendrá tantas soluciones óptimas fundamentales como resulte de aumentar una unidad al número de ceros de la fila H correspondientes a variables independientes, e infinitas soluciones óptimas derivadas. (Aunque puede ocurrir que alguna de dichas soluciones, fundamentales o derivadas, por no ser enteras, no tengan significado económico en ciertos problemas).

4. *Simplificación de los cálculos.*

El cálculo verdaderamente engorroso del método expuesto, es el de los valores de la matriz X de la primera tabla del Simplex. Cuando se trata de problemas tipo Hitchcock, pueden determinarse los términos de dicha matriz por un sistema de tanteos bastante fácil, por cuanto las columnas del menor principal sólo contienen las cifras *0* y *1*, pero en problemas de otro tipo hay que resolver $n - m$ sistemas de ecuaciones con coeficientes diversos.

Podemos, no obstante, eludir dicho cálculo mediante el artificio de añadir variables adicionales a las relaciones de vínculo, una variable distinta para cada relación, en la siguiente forma:

$$\begin{array}{l}
\mu_1 + \dots + a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1n}\lambda_n = b_1 \\
\mu_2 + \dots + a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{2n}\lambda_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mu_m + a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \dots + a_{mn}\lambda_n = b_m
\end{array}$$

cuyas variables entrarán en la función a maximizar con coeficientes *cero* o negativos de alto valor absoluto [1], según que en el problema propuesto pueda o no tener sentido el que algún μ_j entre con valor distinto de cero en la solución o soluciones óptimas.

Podemos entonces partir de la siguiente solución de base del sistema

$$\begin{array}{ll}
\mu_1 = b_1 & \\
\mu_2 = b_2 & \\
\dots\dots\dots & \lambda_i = 0 \text{ (para } i = 1, 2, \dots, n) \\
\dots\dots\dots & \\
\mu_m = b_m &
\end{array}$$

(1) En este último caso basta designar con el símbolo $-M$ a dichos coeficientes y considerarlos superiores en valor absoluto a cualquier número que intervenga en el cálculo.

el menor principal, que es el correspondiente a esta solución, tiene la forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

por lo que la matriz *X* coincide con la *A* y los valores de las filas G y H se calculan fácilmente.

Con ello se aumenta considerablemente el número de variables así como el número de tablas a confeccionar, por cuanto todas o casi todas las variables tomadas en la primera base tendrán que eliminarse una a una para llegar a una solución óptima fundamental, pero el mayor trabajo que esto representa queda sobradamente compensado por el que se ahorra de entrada, especialmente si se emplea una calculadora electrónica, instrumento indispensable para la mayor parte de problemas que se presentan en la práctica, dado el gran número de variables que acostumbran a intervenir.