Juegos cooperativos con pagos laterales: Una aplicación económica

Por
ANTONIA IVARS ESCORTELL
Profesora Facultad Económicas. Universidad Valencia

Los matemáticos formados en la rama de Estadística Investigación Operativa (IO) suelen centrar su interés en la aplicación de las matemáticas. Uno de los campos más fecundos en ese sentido es quizá la Teoría de Juegos cooperativos, que permite modelizar matemáticamente problemas de índole social, económica, política, etc.

La potencia de esta Teoría en dichas áreas se explica fundamentalmente teniendo en cuenta que ya en su origen parte de supuestos susceptibles de ser aplicados a las ciencias humanas, en contraposición a la matemática que se podría denominar clásica, cuyos campos de incidencia han sido fundamentalmente las ciencias y técnicas de la naturaleza.

Precisamente el enorme éxito de las matemáticas en su aplicación a las ciencias naturales ha sido un acicate decisivo en el intento de probar fortuna en los campos sociales. Sin embargo, las leyes de comportamiento humano tienen características propias bien diferenciadas de las naturales, lo cual condiciona el tratamiento de sus problemas, que requieren, por tanto, de una instrumentalización matemática tan peculiar como es la Teoría de Juegos cooperativos.

En este trabajo se pueden considerar tres partes, que pasamos a resumir brevemente.

- En primer lugar, se exponen los fundamentos de la Teoría de Juegos desarrollados por John von Neuman.
  Este autor pretende básicamente la modelización de los acontecimientos sociales a través de juegos de estrategia adecuados, que per-

mitan cuantificar la realidad de un conflicto social. Precisamente este análisis aritmocósmico requiere la rigurosa definición matemática de conceptos tales como pago, comportamiento óptimo, regateo, etc.

— A continuación se comenta la aplicación de dicha Teoría a un problema económico de actualidad: la reestructuración de un sector industrial (se toma como referencia el sector de electrodomésticos de la denominada línea blanca).

— Al final se comentan los avances y estudios que se están realizando en dicho campo.

1. JUEGOS COOPERATIVOS CON PAGOS LATERALES (-)

Para establecer la noción de *juego cooperativo con pagos laterales* se parte de un juego de n personas (podría ser un equipo, una corporación, una nación, etc.) expresado de la forma:

$$(\Sigma i\ Gi),\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

donde Σi es el conjunto de estrategias del jugador i y Gi es su utilidad.

$$Gi : \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i \rightarrow R$$

Cada jugador está informado de todas las posibles alternativas que se le ofrecen y buscará maximizar su utilidad.

Se admite que la cooperación entre jugadores no encuentra ningún obstáculo material, sociológico, psicológico ni de cualquier otro tipo, así como que las utilidades son evaluadas con una misma unidad, común a todos los jugadores, pudiéndose dar transferencias entre ellos.

Así, cada jugador buscará asociarse con otros jugadores de forma que la acción conjunta (coalición) le permita incrementar más su utilidad que si actúa separado.

De este modo se puede "comprar" la colaboración (cooperación) de los jugadores "claves" mediante un pago suplementario. Así se forman las coaliciones y se distribuyen las ganancias (utilidades) entre sus miembros.

Para aclarar conceptos se expone un simple ejemplo: un millonario tiene tres sobrinos y les anuncia que legará su fortuna al que reciba mayoría de votos (2 ó 3) en una votación entre ellos. Si se autoriza la cooperación y el intercambio de pagos entre los jugadores es posible que dos de ellos lleguen al acuerdo de votar, ambos, a uno de los dos, que resultará designado heredero, comprometiéndose a entregar la mitad de la herencia a su socio.

(-) Véanse las obras de IVAR EKELAND *La théorie des jeux et ses applications a l'économie mathématique*, Presses Universitaires de France, 1974, y *Éléments d'Économie mathématique*, 1979.

Consideremos al conjunto formado por n jugadores que lo representaremos por $N=[1, 2, ..., n]$.

Se pueden formar asociaciones de K jugadores, $K<n$, que serán las coaliciones.

Así, pues, se llama coalición a todo subconjunto de N.

A la coalición formada por los n jugadores se le llama la gran coalición. A su vez, el jugador i por sí solo puede formar una coalición, la $[i]$. Entre ambos extremos existe toda la gama de coaliciones de 2, 3, ..., $n-1$ jugador.

El conjunto de las coaliciones no es más que $P(N)$, conjunto de partes de N. Se sabe que si N tiene n elementos, entonces $P(N)=2^n$.

No se pueden dar todas las coaliciones posibles simultáneamente. Un cierto conjunto de interés es necesario para que los jugadores se asocien. Es más, se precisa que los jugadores realicen alianzas porque son numerosas las asociaciones naturales que se disputan los favores de cada uno.

Sólo se formarán finalmente ciertas coaliciones.

Este conjunto lo denotaremos por ξ, que es un subconjunto (una parte) de $P(N)$, $\xi \subset P(N)$.

Las coaliciones que no parecen en ξ tienen una existencia virutal; no influirán, pues, en el desarrollo del juego.

Se dirá que ξ es una familia de coaliciones.

La familia ξ satisface la siguiente regla:

1. Todo individuo está representado al menos por una coalición,

$$\nabla\, i \in N\ \exists\ C \in \xi / i \in C$$

Si el individuo i está (pertenece) a la vez a la coalición C y D, no puede estar representado plenamente por C ni por D.

Atribuiremos a cada uno un cierto "porcentaje de representatividad". O sea, existen dos escalares:

$$\alpha^i_C>0 \text{ y } \alpha^i_D>0/\alpha^i_C+\alpha^i_D=1$$

Además, la coalición C representa la fracción α^i_C del individuo i y D la fracción α^i_D.

Así, α^i_C, α^i_D representan plenamente al individuo i.

En el caso en que el jugador i pertenezca a más de dos coaliciones de ξ nos aparecerán tantos escalares como coaliciones, a las que pertenece el individuo i, cada uno de ellos es $\geqslant 0$ y de suma 1.

De este modo cada coalición $C \in \xi$ está afectada por una familia de coeficientes $(\alpha^i_C)\, i \in C$, donde α^i_C es la fracción del individuo i representado por C.

Se impone una segunda regla.

2. Cada coalición representa igualmente a sus miembros.

Matemáticamente, si i y j pertenecen los dos a $C \epsilon \xi$, entonces $\alpha_i^c = \alpha_j^c$. Se conviene denotarlo por $\alpha > 0$, que es la fracción por la que se representan los miembros de C.

Cuando una coalición S esté formada, conseguirá una cantidad de utilidad que será repartida entre sus miembros según los acuerdos previos. Es, pues, natural, caracterizar la "fuerza" de una coalición por la utilidad total que puede asegurarse frente a cualquier oposición. Supóngase que los demás jugadores se alían contra la coalición S; se tiene entonces un juego finito de dos jugadores entre S y N-S, siendo sus ganancias respectivas

$$\sum_{i \epsilon S} Gi \text{ y } \sum_{i \epsilon N\text{-}S} Gi$$

La coalición S puede asegurarse:

$$v(S) = \{\max_{\delta i \, i \epsilon S} (\min_{\delta i \, i \notin S} \sum_{i=1}^{n} Gi\,[\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n])\}$$

siendo δ_i la estrategia seguida por el jugador i.

Por otra parte, es evidente que si S y T son disjuntos, la coalición $S \cup T$ puede asegurarse por lo menos $v(S) + v(T)$. Se dirá que

$$v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T)$$

Para ser coherentes se supone que $v(\emptyset) = 0$. Definamos ahora el modelo general de juego cooperativo con pagos laterales:

1.1. La forma característica de un juego n-personal (cooperativo) con pagos laterales es un par (N, v), en el que:

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

es el conjunto de jugadores, y

$$v \colon N \to R$$

la función característica del juego, que es superaditiva. Esto es:

$$\text{si } S \cap T = \emptyset \qquad v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T)$$

El análisis de juegos cooperativos de n-personas es complejo.

En esta teoría, los conocimientos que se tienen conciernen sobre todo a procedimientos de arbitraje, que en una cierta medida dispensan de jugar.

Esta es una de las cuestiones que se estudiarán para llegar a la noción de "núcleo" del juego.

Supóngase que los n jugadores se reúnen y un árbitro les propone entregar a cada uno una parte del total $v(N)$, por ejemplo, $\mathbf{M}i$ al jugador "i". Para obtener el acuerdo de todos es necesario al menos que:

$$\forall\, i \epsilon N \qquad \mathbf{M}i \geqslant v(i)$$

O sea, que la propuesta del árbitro sea individualmente racional.

Por otra parte, se ha de cumplir:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}i = \nu(N) \qquad \text{OPTIMALIDAD DE PARETO}$$

Las ganancias de los n jugadores juntos no podrán superar la de $\nu(N)$.

Se puede ganar exactamente $\nu(N)$. Ahora bien, una partición tal que $\sum_{i=1}^{n} Ui < \nu(N)$ no será aceptada porque ello sería desperdiciar utilidad

$$\nu(N) - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}i > 0$$

1.2. Se llama *imputación* a todo vector $U=(U_1, ..., U_n) \epsilon R^n$ que verifique:

$$\nabla i \epsilon N \qquad \mathbf{M}i \geqslant \nu(i) \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}i = \nu(N) \tag{1.2}$$

esto es un vector de n componentes, donde cada componente indica la cantidad (utilidad) que recibirá el jugador i. Por supuesto, esta cantidad deberá ser, como mínimo, la que puede recibir cada uno de estos jugadores sin entrar en alguna coalición.

Además, la suma de dichas cantidades va a ser el total a repartir $\nu(N)$, en el caso en que los n jugadores llegasen a formar la gran coalición.

Este primer criterio se complementa con el siguiente:

1.3. Se dice que una imputación $\mathbf{M} \epsilon R^n$ está *bloqueada* por la coalición S si existe un vector $\mathbf{M}^s \epsilon R^s$ tal que:

$$\nabla i \epsilon S \qquad \mathbf{M}_i^s > \mathbf{M}i \tag{1.3}$$

$$\sum_{i \epsilon S} \mathbf{M}_i^s = \nu(S) \tag{1.4}$$

O sea, se forma una coalición S, en la que cada jugador de dicha coalición recibe más que en dicha imputación; entonces esta imputación está bloqueada por esta coalición. Los jugadores de S efectivamente están motivados como para que se forme dicha coalición.

1.4. Se llama *núcleo del juego* a la unión de imputaciones que no están bloqueadas por ninguna coalición. Esto son posibles imputaciones a formar por los jugadores, ya que no existe coalición alguna de N donde *todos los jugadores reciban más* que las imputaciones del núcleo. En todo juego únicamente se formarán las coaliciones que den lugar a las imputaciones del núcleo; las demás serán rechazadas.

Veamos una caracterización.

Una imputación u pertenece al núcleo del juego si y sólo si

$$\nabla S \epsilon P(N) \sum_{i \epsilon s} \mathbf{M}i \geqslant \nu(S) \tag{1.5}$$

El núcleo del juego es el conjunto de arbitrajes aceptables.

Si el árbitro propone una imputación u que no está en el núcleo, se dice que está bloqueada por una coalición S del núcleo. Lógicamente, los jugadores de S rehusarán dicha imputación.

En efecto, ellos pueden separarse, obtener una ganancia y repartirla dando a cada uno de los *partenaires* $i \in S$ una parte $\mathbf{M}_i^s$ mejor que aquella que habían arbitrado las fórmulas (1.3) y (1.4).

Si, por el contrario, el árbitro les propone una imputación u del núcleo, se evita la escisión.

Así, pues, si se formara la coalición S para rehusar el arbitraje, se arriesga a que se forme la coalición N-S contra ella y limite sus ganancias a $v(S)$.

En este caso, sea cual sea la forma V^s de repartirse la ganancia, se tendría:

$$\sum_{i \in s} V_i^s = v(S) \leqslant \sum_{i \in s} \mathbf{M}i$$

De la proposición (1.4), o bien $V_i^s = \mathbf{M}i, \forall\, i \in S$, en cuyo caso se tendrá el *statu quo ante* para los miembros de la coalición, o bien hay un i para el cual $V_i^s < \mathbf{M}i$, y en este caso la coalición dejaría a uno de sus miembros (el i).

¿Es vacío el núcleo? La respuesta a esta simple cuestión es complicada, pues de ella depende todo el interés de la noción.

Una manera conveniente de ilustrar las imputaciones se basa en un hecho geométrico interesante en los triángulos equiláteros: para dos puntos interiores cualesquiera, la suma de las distancias a los tres lados es siempre la misma.

Una familia de coaliciones ρ de $P(N)$ tal que $\forall\, c \epsilon \rho$, se puede asociar un número $\alpha_c > 0$, cumpliendo

$$\forall\, i \epsilon N. \Sigma\, \alpha_c^2 = 1$$

$$\text{donde } \xi_i = \{\, c \epsilon \xi \,/\, i \epsilon \mathrm{C} \,\}$$

se dice que es compensada.

Dada una familia equilibrada (compensada) $\xi \subset P(N)$, los coeficientes α_c, $c \epsilon \rho$ ¿están determinados de forma única? En general esto no es cierto (contra ejemplo: $\xi = \{\, N, [i] / \forall\, i \epsilon N \}$ se puede tomar $\alpha_c = \alpha$ y $\alpha_i = 1 - \alpha \quad \forall\, \alpha \epsilon\, \exists\, 0,1\, [$). Será único en el caso en que la familia ξ sea minimal, es decir que ξ no contiene una familia ξ' que sea compensada.

Si $\xi' \mathrm{C}\, \xi\, \mathrm{C} \quad P(N) \rightarrow \rho'$ no es compensada.

Sea $\xi \subset P(N)$ una familia de coaliciones minimal; entonces:

a) $\exists$ una única familia de coeficientes $\alpha_c > 0$, verificando la relación: $\forall\, i \epsilon N \sum_{c \epsilon \xi i} \alpha_c = 1$

$$C_i = \{\, c \epsilon \xi \,/\, i \epsilon c \,\}$$

b) Contiene como mucho n coaliciones.

Es equivalente decir:

1. El núcleo del juego es no vacío.

2. Para toda la familia compensada $\xi \subset P(N)$ y para toda la familia $(\gamma_c)\, c\epsilon\rho$ de coeficientes asociados se tiene:

$$\sum_{c\epsilon\xi i} \gamma_c \nu(C) \leqslant \nu(N)$$

$$\xi_i = \{ c\epsilon\xi \,/\, i\epsilon c \}$$

3. Si en una familia compensada $\xi \subset P(N)$ dado $u\epsilon R^n / \forall\, c\epsilon\xi \sum_{i\epsilon c} u_i \leqslant \nu(c)$, entonces: $\sum_{i\epsilon N} u_i \leqslant \nu(N)$; en estas condiciones se dice que el juego es compensado.

1.5. *Nucleolo.*

Expongamos unos conceptos previos para llegar al concepto de nucleolo.

Para $p\epsilon N$, se define sobre R^p dos relaciones binarias denotadas por $<$ y $\leqslant$ por:

$$X < Y \rightarrow \exists\, j\epsilon \{1, 2, \ldots, P\} / Xi = Yi \text{ para } i < jx$$

$$Xi < Yj \tag{5.1}$$

$$X \leqslant Y \rightarrow X < Y \quad \text{o} \quad X = Y \tag{5.2}$$

Se prueba que la relación es una relación de orden total llamado orden lexicográfico.

También se muestra que todo compacto no vacío $K \subset R^p$ posee un mínimo lexicográfico único.

Se define componente a componente una aplicación $\theta : R^p \rightarrow R^p$ llamada de clasificación, como:

$$\begin{aligned} &\theta_1(X) = \text{máx}\{ Xi / 1 \leqslant i \leqslant P \} = Xi_1 \\ &\theta_2(X) = \text{máx}\{ Xi / 1 \leqslant i \leqslant P\, i \neq i_1 \} = Xi_2 \\ &\vdots \\ &\theta_j(X) = \{ \text{máx}[Xi / 1 \leqslant i \leqslant P\, i \neq i_1, \ldots, i \neq i_{j-1}] \} Xi_j \end{aligned} \tag{5.3}$$

O sea, los componentes de $\theta(X)$ son las componentes del vector X clasificadas en orden decreciente, o sea, de la mayor a la menor.

Esta clasificación de θ es continua.

Para toda imputación $(u_i)\, i\epsilon N$ y toda coalición $S \subset N$ llamaremos

$$u(S) = \sum_{i\epsilon S} u_i \tag{5.4}$$

En R^{2^n} escribiremos abusivamente:

$$V \rightarrow \text{el vector de componentes } \nu(S),\ S \subset N \tag{5.5}$$

$$U \rightarrow \text{el vector de componentes } \mu(S),\ S \subset N \tag{5.6}$$

Se llama nucleolo del juego (N, v) a una imputación $(\bar{u}_i)\, i\epsilon N$ tal que, para toda imputación $(u_i)\, i\epsilon N$ se tiene:

$$\theta(v-\bar{u})\leqslant\theta(v-u) \tag{5.7}$$

En general, 5.7 conduce a $\theta_1(v-\bar{u})<\theta_1(v-u)$, pero $\theta_1(v-u)$ es la mayor componente de $v-u$.

Una coalición $S\subset N$ estará lesionada por la imputación u si $v(S)-u(S)>0$ y se estimará beneficiada si $v(S)-u(S)<0$.

Así, $v(S)-u(S)$ mide el descontento de la coalición S con la imputación U. La imputación $\bar{u}$ minimiza, pues, el descontento máximo; en otros términos, el nucleolo minimiza la demanda más descontenta.

La noción de nucleolo es de Schmeider (1966). Su interés principal reside en que se puede muy fácilmente demostrar su existencia y su unicidad para un juego cualquiera.

Además, si el núcleo es no vacío, contiene el nucleolo.

Así, pues, el nucleolo provee (nos da) una imputación interesante si el núcleo es vacío, y permite escoger simplemente una imputación del núcleo si éste es no vacío.

Se demuestra que todo juego posee un nucléolo único, y que si el núcleo del juego (N, v) es no vacío, contiene al nucléolo.

1.6. Kopelowitz da un algoritmo para calcular el nucleolo por a lo sumo $n-1$ programa lineal (donde n es el número de jugadores) (*).

Sea (N, v) un juego cooperativo $v: P(N)\rightarrow R$.

Dada $X=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una imputación o pago.

El exceso de una coalición S con respecto al pago del vector X está definido $\forall\, S\subset N$ por:

$$e(S, X)=v(S)-\sum_{i\epsilon S} Xi$$

En el presente modelo, la función característica y los pagos son de forma que $e(S, X)\leqslant 0$.

Entonces es más conveniente trabajar con variables transformadas.

Sea $c=-v$ una función "coste" definida $\forall\, S\subset N$; con $c(\emptyset)=0$ hacemos $y=-X$ representa menos el vector de pagos (imputación) (vector de contribución).

El exceso negativo estará definido por $f(\mathrm{S}, \mathrm{Y})=f(S, Y)=C(S)-\sum_{i\epsilon S} Yi$.

(*) *International Journal of Game Theory*, vol. 3, issue 1, pages 21-29, Physica-Verlag, Vienna.

Kopelowitz procede para calcular el nucleolo como sigue.

Considera el problema lineal:

$$\text{Máx } r$$

$$r \leqslant f(S, Y) \ \forall \ S C N \qquad (I_1)$$

$$s \cdot a \qquad \sum_{i=1}^{n} Yi = C(N)$$

hay 2^n subconjuntos de N.

Sea r_1 el valor de r como solución óptima y A_1 el conjunto de coaliciones de S en las que el exceso negativo es igual a r_1 para toda solución óptima (Y, r_1) e I_1.

Si y es única, entonces se tiene lo buscado.

De otro modo, formamos un segundo programa lineal I_2, añadiendo al programa I_1 las restricciones

$$f(S, Y) = r_1 \qquad \forall \ S \epsilon A_1$$

Hasta que la solución óptima y no sea única continuamos definiendo $A_k = \{ S / f(S, Y) = r_k \ \forall \ S C N \}$. Para toda solución óptima $(Y, r_k) \epsilon I_k$ y formando el $(k+1)^{o}$ programa añadiendo al K-ésimo programa las restricciones

$$f(S, Y) = r_k \qquad \forall \ s \epsilon A_k$$

una única solución "y" será obtenida después de a lo sumo $n - 1$ vez que el programa lineal haya sido resuelto.

El nucleolo (negativo) puede ser interpretado como el vector de contribución "y", que lexicográficamente maximiza el mínimo exceso de coste sobre contribuciones para todas las coaliciones.

1.7. Soluciones de Von Neuman-Morgenstern (*)

En su libro *The Theory of Games and Economic Behavior (La teoría de los juegos y el comportamiento económico)* Von Neuman y Morgenstern definieron primero el juego de n-personas e introdujeron su concepto de una solución.

Todo el trabajo que desde entonces ha sido realizado sobre los juegos de n-personas ha estado influido por este trabajo ahora clásico.

Volvamos al análisis de bloqueaje. Esta vez no nos contentaremos en saber que la coalición S puede bloquear la imputación u; le pediremos preci-

(*) MORTON D. DAVIS, Alianza Universidad, 1971.
VON NEUMAN and OSCAR MORGENSTERN: *Theory of Games and Economic Behavior*, Ed. Princeton, 1944.

sar su pensamiento y que se diga la nueva imputación que se propone en vez de u.

Se pretende construir un catálogo de imputaciones bloqueantes y buscar la más pequeña posible.

Precisando esta idea, se considera un juego cooperativo (N, v) con pagos laterales.

Una imputación ω bloquea a una imputación u si existe una coalición SCN tal que:

$$u_i < \omega_i \qquad \forall\, i \epsilon S$$

$$\sum_{i\epsilon S} \omega_i \leqslant v(S)$$

Una solución de Von Neuman-Morgenstern es toda familia M de imputación tal que:

1. Cada imputación que no está en la solución está dominada por una imputación que está en la solución.

2. Ninguna imputación en la solución está dominada por cualquier otra imputación en la solución.

Desde el comienzo, N-M renunciaron a toda esperanza de encontrar una solución única de pago para los juegos de n-personas.

Pudieran existir juegos particulares en los que tal solución sería plausible, pero "la estructura... considerada sería entonces extremadamente sencilla: existiría un absoluto estado de equilibrio en el que las porciones cuantitativas de cada participante estarían exactamente determinadas".

Según N-M, su concepto de solución consiste en no fijar un sistema rígido de distribución, es decir, imputación, sino más bien una variedad de alternativas, que probablemente expresarán todas algunos principios generales, pero que no obstante difieren entre ellas en muchos aspectos particulares.

Este sistema de imputaciones describe el orden establecido de la sociedad "o" un estándar aceptable de comportamiento.

Entonces, una solución consiste no en una, sino en muchas imputaciones que juntas tienen una cierta consistencia interna.

Después de la obra de N-M (1944), la cuestión es saber si todo juego posee una solución $M \neq 0$ había quedado en *suspense*. Lucas (1968) tuvo una respuesta negativa, construyendo un contraejemplo con 10 jugadores.

La dificultad reside en el hecho de que la relación de bloqueaje entre imputaciones no es ni antisimétrica ni transitiva.

La única consideración de carácter general que se puede hacer es que si el núcleo C y una solución N-M, M, son las dos no vacías, entonces CCM.

1.8. El valor de Shapley.

Shapley estudió el juego de *n*-personas de otra forma. Consideró el juego desde el punto de vista de los jugadores y trató de contestar a la pregunta: dada la función característica de un juego, ¿de qué valor es el juego para un jugador particular? (*).

No obstante, Shapley encontró un método para calcular el valor de un juego para cada jugador, generalmente llamado el valor de Shapley, sobre la base de la función característica solamente.

A este número se llegaba, *a priori,* haciendo abstracción de todos los otros factores importantes.

El esquema de Shapley es sólo uno de los muchos que podrían servir para este propósito. ¿Por qué usar uno y otro? Shapley justifica su elección como sigue: menciona tres requisitos que piensa debería satisfacer cualquier esquema razonable, y continúa mostrando que este esquema satisface estos axiomas y que realmente es el único que los satisface.

Los requisitos críticos son éstos:

1. El valor de un juego para un jugador depende solamente de la función característica.

Esto significa que los valores son asignados independientemente de las identidades o características de los jugadores.

Por ejemplo, en un juego de regateo en el que los dos jugadores no obtienen nada cuando permanecen solos, pero comparten algo cuando se unen, sus valores serían los mismos.

2. Un pago en el que cada jugador recibe su valor es una imputación.

Shapley supone que los jugadores racionales formarán una imputación (también acepta los supuestos de N-M de superadición y la transferencia de utilidades). Puesto que la suma de los pagos es necesariamente igual al valor de la coalición de *n*-personas (por definición de imputación) y el valor del juego para un jugador es un pago medio (en cierto sentido), se sigue que la suma de todos los valores debería ser igual al valor de la coalición de *n*-personas.

3. Para un jugador, el valor de un juego compuesto es igual a la suma de los valores de los juegos componentes.

Supongamos que un grupo de jugadores está comprometido simultáneamente en dos juegos. Definimos un nuevo juego con estos mismos juga-

(*) El concepto de solución de Shapley es el que generaliza más directamente, para *n* jugadores, la idea de repartición. Corresponde más al espíritu de un arbitraje equitativo entre *n* jugadores que a una lucha severa entre las diferentes coaliciones posibles.

dores, en el que el valor de una coalición sea igual a la suma de los valores que tenía en los dos juegos originarios.

En este nuevo juego, cada jugador tiene un valor de Shapley y el axioma 3 establece que debería igualar a la suma de los valores de Shapley de los jugadores en los dos juegos ordinarios.

Para cada coalición S, sea $D(S)$ la diferencia entre los valores de la coalición S, y la coalición S sin el jugador "i" [si "i" no está en S, $D(S)=0$].

Para cada coalición S se calcula

$$\left[\frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}\right]\cdot D(s) \qquad \text{siendo } s=\text{card}(S)$$

$n \rightarrow$ el número de jugadores en el juego
$n! \rightarrow n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 1$

Sumando estos números para todas las coaliciones S, la respuesta es el valor de Shapley para "i", o sea,

$$Xi(v)=\sum_{SCN}\frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}\,[v(s)-v(s-\{i\})]$$

La fórmula de Shapley puede también derivarse de un modelo de regateo. Imagínese que al principio un jugador se une a otro para formar una coalición intermedia de dos personas; después, a estas dos se les une un tercer jugador y, finalmente, se forma una coalición de n-personas, uniéndose un nuevo jugador cada vez. Supongamos que en cada estadio el nuevo jugador obtiene la ganancia marginal: la diferencia en los valores de la coalición ya formada y la coalición con el nuevo jugador.

Si se supone que la coalición final de n-personas es tan probable que se forme en una forma como en otra, la ganancia esperada de un jugador es su valor de Shapley.

Aclaración de la fórmula:

1. Hay exactamente $n!$ maneras de formar la coalición que reúne a los n jugadores, de ahí la división por $n!$

2. Hay también $s!(n-s-1)!$ maneras para el jugador "i" de intervenir en $(s+1)^{\circ}$ posición después de una coalición S de tres miembros, de ahí la multiplicación de la ganancia marginal a cada coalición S de $Ps(N)$, subconjunto de $P(N)$ formado por todas las coaliciones que comprenden un número S de jugadores por $s!\,(n-s-1)!$

Esta derivación del valor de Shapley es interesante, pero no muy convincente.

Incluso así, no es razonable esperar que el nuevo jugador obtenga toda la ganancia marginal, y no está claro que los órdenes de formación sean todos igualmente probables.

En el análisis del problema de negociación Nash aporta una solución (*).

El objeto del desarrollo que hace Nash es el estudio de cómo se negocia la repartición de los frutos de la colaboración entre *dos* jugadores, teniendo en cuenta la razón de reintegro de fuerzas, las informaciones y las posibilidades de amenaza.

Hay que destacar el concepto de punto de ruptura $R=(u_1^0, u_2^0)$, que representa el nivel de satisfacción que obtiene cada jugador en caso de no acuerdo.

De este modo, según la solución de Nash, se selecciona como solución el punto S, que maximiza el producto $(u_1 - u_1^0)(u_2 - u_2^0)$ (en el caso de dos jugadores).

2. MODELO ELABORADO

2.1. *Panorámica sobre el actual estado del sector de electrodomésticos*

El sector de fabricantes de aparatos electrodomésticos de línea blanca está atravesando por una situación económica adversa, expresada por una atonía de la demanda, una baja productividad, falta de competitividad a mercados exteriores (Mercado Común), un déficit de explotación creciente y costes financieros excesivos que impiden a las empresas hacer frente por sí mismas a esta situación.

Ante este panorama, la Administración decidió el año pasado la reestructuración del sector.

El retraso en la llegada de esta reestructuración se debe a la ralentización que ha supuesto cada gobierno y, por tanto, de sus responsables políticos. Desde la gestión del entonces vicepresidente económico Abril Martorell (quien quería acometerla empresa por empresa) hasta el actual ministro de Industria, Ignacio Bayón, quien es partidario de la actualización sectorial, la situación de las empresas se ha ido deteriorando progresivamente.

El resultado era la publicación en el *Boletín Oficial del Estado* del 17 de octubre de un Real Decreto, el de 26 de septiembre de 1980. Con él se pretende adecuar las industrias españolas a las necesidades nacionales actuales, por medio de una serie de acciones que tienden a conseguir, entre otros objetivos, la especialización de la producción, el aumento de la productividad, a la promoción económica, social y profesional de los trabajadores de las agrupaciones sociales, además de establecer una mejor competitividad en el sector, de cara a la integración europea.

(*) RAPOPORT, A., y PERNER, J. (1974): "Testing Nash's Solution of the Cooperative Game", en *Game Theory as a Theory of Conflict Resolution.*

Al amparo de dicho Decreto se han ido formando diversos *holdings* de empresas.

2.2. *Explicación del modelo*

Pensando en la reestructuración que actualmente se está realizando en los sectores hoy en crisis y las medidas tomadas como la formación de diversos *holdings*, nos hemos planteado el siguiente problema:

Se parte de un determinado sector que precisa de una reestructuración. Dentro de dicho sector, debido a unas ciertas características, como, por ejemplo:

- su situación geográfica,
- la comunicación con el resto del país, etc.,

van a ser objeto de estudio tres empresas, que las representaremos por A, B, C. Dichas empresas se reparten el mercado de dos productos que ellos mismos fabrican, que representaremos por X_1 y X_2.

En la siguiente tabla aparecen las unidades producidas de cada uno de los productos, así como la producción total de la empresa, considerada como la suma de las unidades producidas de cada producto. También la exportación parcial y total de los productos de cada empresa, así como también el tanto por uno de la producción de ellos.

TABLA 1

Empresas	PRODUCCIÓN			EXPORTACIÓN			Porcentaje X_1 α	Porcentaje X_2 β
	Total	X_1	X_2	Total	X_1	X_2		
A	186	186	—	93	93	—	1	0
B	186	—	186	70	—	70	0	1
C	152	48	104	50	—	50	0,36	0,68

Según se desprende de la tabla, la empresa A se dedica sólo a la fabricación de un producto X_1, siendo su producción de 186 miles de unidades anuales. De estas unidades se sabe que exportan 93 miles de unidades anuales.

Para las otras dos empresas la tabla funciona del mismo modo:

- B produce 186.000 unidades anuales de X_2 y exporta 70.000 unidades anuales.
- C produce 48.000 unidades al año de X_1 y 104.000 unidades al año de X_2, y exporta 50.000 unidades anuales de X_2.

El presente estudio puede dar una idea de cómo se puede utilizar, en general, la teoría de juegos anteriormente expuesta a casos particulares que se aproximan a la realidad.

Los beneficios de las posibles reestructuraciones se miden en la forma de una subvención global que la Administración ofrece de acuerdo con ciertas condiciones, de las que se deducen los oportunos costes.

El problema se plantea en los siguientes términos:

Dadas estas tres empresas, se pretende que se llegue a formar una coalición entre ellas, de modo que la utilidad (que en este caso va a ser el dinero a recibir por medio de la subvención) de dicha cooperación venga dada por la función característica.

Así, pues, cada una de dichas empresas es capaz de saber el beneficio que puede recibir, si permanece sola o si actúa en cooperación con una o las otras dos empresas, mediante la mencionada función característica que definiremos posteriormente.

Nos hacemos, pues, las siguientes preguntas:

— ¿Llegarán estas empresas a un acuerdo y formarán la deseada coalición?

— ¿Cómo se repartirán dicha subvención?

Una vez planteado el problema, se va a definir la función característica (en este caso la subvención a recibir en cada caso).

Los criterios que servirán para atribuir la subvención son:

— el aumento de producción,
— el aumento del número de productos exportados,
— el mayor grado de especialización de la producción.

Respecto a los costes, sólo se tienen en cuenta los que se generan tras la transformación de la producción. En el caso de abandonos se puede hablar de reestructuración cuando hay dos (o más) empresas que se coaligan y siguen produciendo los mismos productos en cooperación, o bien abandonan uno de éstos para especializarse en la producción de otro.

La subvención a recibir va a estar en función de las siguientes normas:

1. Se comparará a las empresas por el total de las *unidades producidas*. Así, se considera como "empresa mayor" la que tiene más producción.

2. Si dos empresas se coaligan admitiremos que la "empresa mayor" absorbe a la menor, de forma que cuando hablemos de incremento de producción éste se entenderá como la producción que tenía la empresa menor.

3. Respecto al incremento de exportación se actuará de la misma forma. En el supuesto de una coalición, el incremento de exportación será la exportación de la empresa menor (comparadas según unidades producidas).

4. Una empresa por sí sola, o en el ente resultado de una coalición, puede reestructurarse abandonando o dejando de producir un producto o bien transformando algunas cadenas de producción.

Imponemos que en este caso sólo se podrá abandonar el producto de más baja producción por motivos como podrían ser el mantener el mayor número de puestos de trabajo.

5. Se persigue la especialización u homologación de dichas empresas.

6. Para poder trabajar mejor con los datos de este problema, se ha transformado la tabla 1 en otra semejante, tabla 2, de modo que las unidades que aparecen en la nueva tabla son unidades estándar. De esta forma se trabaja con unidades homogéneas.

TABLA 2

Empresas	Producción			Exportación			Porcentaje X_1 α	Porcentaje X_2 β
	ΔP	X_1	X_2	ΔE	X_1	X_2		
A	62	62	—	31	31	—	1	0
B	93	—	93	35	—	35	0	1
C	68	16	52	25	—	25	0,235	0,764

Para este cambio se ha tomado la siguiente equivalencia:

Tres unidades del producto x_1 equivalen a dos unidades del producto x_2 y a una unidad estándar.

7. En el caso de reestructuración por abandono de un producto, al hablarse de incremento de producción y de exportación, serán los mismos que si no hay tal abandono, pero existe en este caso un coste de transformación.

2.3. *La función característica*

Siendo $N=\{1,2,3\}$, las empresas A, B, C, y $\nu : P(N) \rightarrow R$, se construye la función característica del siguiente modo:

$$\forall\, SCN\ \nu(s)= \left[\frac{(M\times\Delta P)+(R\times\Delta E)}{1+\alpha\cdot\beta} \right] -(c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

El significado de cada uno de los parámetros que aparecen en la (construcción) definición de la función característica es el siguiente:

— ΔP es el incremento de producción que se produce al formarse la coalición R con o sin abandono de producción.

— ΔE es el incremento de exportación que se produce al formarse la coalición S.

— M es la prima o subvención unitaria que se le ofrece a la coalición S por el incremento de producción resultante.

— R es la prima o subveción unitaria que se le ofrece a la coalición S por el incremento de exportación.

— α y β son constantes que representan el tanto por uno de unidades producidas de ambos productos. Por definición se cumple que $\alpha+\beta=1$.

— y_1 representa el número de unidades estándar que se han abandonado del producto x_1 y se transformarán en el producto x_2.

— y_2 representa el número de unidades estándar que se han abandonado del producto x_2 y se transforman en el producto x_1.

— c_1 y c_2 son constantes técnicas de las transformaciones:

c_1 es el coste unitario de transformar una unidad estándar del producto x_1 a x_2.

c_2 es el coste unitario de pasar una unidad estándar del producto x_2 a x_1.

Debido a que estas constantes no van a influir en el razonamiento de este problema, les asignamos los valores:

$$C=0{,}2$$
$$C=0{,}1$$

Así, pues, según la función característica, se prima tanto el incremento de producción como el incremento de exportación (es directamente proporcional). Se penaliza la falta de homologación, ya que si se produce un solo producto (independientemente de cuál sea), el producto $\alpha\cdot\beta$ será siempre "0", y entonces el denominador es mínimo y, en consecuencia, el cociente es máximo. Por el contrario, si se produce un 50 por 100 de cada uno de ellos, el producto $\alpha\cdot\beta$ es máximo e igual a 0,25 y el cociente es mínimo.

3. ESTUDIO MATEMATICO DEL PROBLEMA

Primeramente calcularemos, mediante la función característica, la prima que puede recibir cada empresa al coaligarse o reestructurarse.

$\forall\, SCN$ por $\nu_1(S)$ se representa a la cantidad (prima) que obtienen las empresas que forman el subconjunto S (al coaligarse).

$\forall\, SCN$, $\nu_2(S)$ representa que, una vez formada la coalición S, hay reestructuración por abandono de producción (se deja de producir uno de ambos productos para su mejora y especialización en el otro).

$\forall\, SCN$, $\nu(S)$ es el máximo de los valores anteriores teniendo en cuenta la superaditividad y la no negatividad de la función característica.

Según estas hipótesis, en el presente problema tenemos: $\nu(A)=0$. Esto es debido al hecho de que la empresa A sólo produce un producto X_1 y ella por sí sola no se puede reestructurar (abandonar un producto).

Del mismo modo se deduce para la empresa B que $\nu(B)=0$.

Haciendo los mismos estudios para todas las posibles coaliciones a formar y operando, se obtiene:

$$\nu(A) \geqslant 0$$

$$\nu(B) \geqslant 0$$

$$\nu(C) \geqslant \text{máx} \begin{cases} 0 \\ 16\,M - 3{,}2 \end{cases}$$

$$\nu(A, B) \geqslant \text{máx} \begin{cases} 50\,M + 25\,R \\ 62\,M + 31\,R - 12{,}4 \end{cases}$$

$$\nu(A, C) \geqslant \text{máx} \begin{cases} 50\,M + 25\,R \\ 62\,M + 31\,R - 5{,}2 \end{cases}$$

$$\nu(B, C) \geqslant \text{máx} \begin{cases} 62{,}4\,M + 22{,}9\,R \\ 68\,M + 25\,R - 3{,}2 \end{cases}$$

$$\nu(A, B, C) \geqslant \text{máx} \begin{cases} 107{,}4\,M + 46{,}3\,R \\ 130\,M + 56\,R - 15{,}6 \end{cases}$$

Como $\nu(N)=\nu(A, B, C)$ puede tomar uno de los dos valores antes expuestos. Según los valores de M y R, tenemos:

$$\nu(A, B, C) = 107{,}4\,M + 46{,}3\,R \ \underline{\text{sí}}$$

$$M \leqslant 0{,}69 - 0{,}429\,R \quad \wedge \quad R \leqslant 1{,}608$$

$$\nu(A, B, C) = 130\,M + 56\,R - 15{,}6 \ \underline{\text{sí}}$$

$$M \leqslant 0{,}69 - 0{,}429\,R$$

Del mismo modo se puede saber el valor para cada coalición según los valores de M y R; así se obtiene:

$$\begin{cases} \nu(A, B) = 50\,M + 25\,R & \underline{\text{sí}} & M \leqslant 1{,}033 - 0{,}5\,R \quad \wedge \quad R \leqslant 2{,}066 \\ \nu(A, B) = 62\,M + 31\,R - 12{,}4 & \underline{\text{sí}} & M \geqslant 1{,}033 - 0{,}5\,R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu(A, C) = 50\,M + 25\,R & \underline{\text{sí}} & M \leqslant 0{,}433 - 0{,}5\,R \quad \wedge \quad R \leqslant 0{,}866 \\ \nu(A, C) = 62\,M + 31\,R - 52 & \underline{\text{sí}} & M \geqslant 0{,}433 - 0{,}5\,R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu(B, C) = 62{,}4\,M + 22{,}9\,R & \underline{\text{sí}} & M \leqslant 0{,}571 - 0{,}375\,R \quad \wedge \quad R \leqslant 1{,}522 \\ \nu(B, C) = 68\,M \llcorner\, 3{,}2\,R & \underline{\text{sí}} & M \leqslant 0{,}571 - 0{,}375\,R \end{cases}$$

Consideradas todas las posibilidades, hemos estudiado para qué casos, según el valor de M y R, el núcleo era: 1) vacío; 2) se reducía a una sola imputación, y 3) nunca era vacío.

Como resultado se ha llegado a la conclusión de que en ningún caso el núcleo ha resultado vacío o único. Siempre existen ∞ soluciones.

Uno de estos supuestos aparece cuando:

$$\begin{aligned} \nu(A, B, C) &= 107{,}4\ M + 46\ R \\ \nu(A, B) &= 50\ M + 25\ R \\ \nu(A, C) &= 62\ M + 31\ R - 5{,}2 \\ \nu(B, C) &= 68\ M + 25\ R - 3{,}2. \end{aligned}$$

En el caso anterior resulta que toda imputación del núcleo está caracterizada por: $u=(u_1, u_2, u_3)$, con:

$$\begin{aligned} &u_1 \geqslant 0 \\ &u_1 \leqslant 39{,}4\ M + 21{,}3\ R + 3{,}2 \\ &u_2 \geqslant 0 \\ &u_2 \leqslant 45{,}4\ M + 15{,}3\ R + 5{,}2 \\ &u_3 \geqslant 0 \quad \underline{\text{sí}} \quad M \leqslant 0{,}2 \end{aligned}$$

donde:

$M \leqslant 0{,}69 - 0{,}429\ R.$
$M \geqslant 0{,}571 - 0{,}375\ R.$
$R \leqslant 1{,}608.$

Siguiendo estos pasos se nos presentan 10 casos según M y R.

Al no reducirse el núcleo nunca a un punto, se ha intentado tomar una solución lo más racional o, al menos, bajo un criterio lógico.

Este criterio ha sido el que dicha imputación nos maximizase:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_2^3$$

Se ha utilizado el método del grandiente proyectado en cada uno de los diez casos posibles y de todas ellas, luego, se ha escogido la mejor.

Como era de esperar, dado que en esta función se intenta maximizar la suma de estos tres pagos, sin tener en cuenta para nada lo que de por sí sola cada una de dichas empresas recibiría, ha resultado el mismo pago para cada una:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 118{,}8$$

Siendo $M=2$ y $R=2$.

Hay que destacar que en este caso el valor de Shapley es una imputación que pertenece al núcleo y se aproxima a la deducida anteriormente.

El nucleolo viene dado por

$$u_1 = 112{,}665,\ u_2 = 118{,}665 \text{ y } u_3 = 125{,}065$$

En la actualidad se está trabajando en este campo, siguiendo las directrices del modelo realizado por Nash, para ver cuándo y bajo qué condiciones se puede reducir el núcleo a un solo punto. En este caso, si las restricciones no son muy fuertes, se llegaría al acuerdo sin ninguna dificultad.

BIBLIOGRAFIA BASICA

DRESHER, M. A. W.; TUCKER y WOLFE, P.: *Contributions to the theory of games*, vol. 3: "Annals of Mathematics Study", 39. Princeton University Press, 1957.

International Journal of Game Theory, vol. 3, Issue, 1. Physica-Verlag, Vienna.

IVAR EKELAND: *La théorie des jeux et ses applications a l'économie mathématique*. Presses Universitaires de France, 1974.

IVAR EKELAND: *Eléments d'économie mathématique*, 1979.

MARSANY, J. C.: *A bargaining Model for the Cooperative n-person Game en Tucker y Luve*, 1959.

MORTON, D. DAVIS: *Teoría de juegos*. Alianza, Universidad, 1971.

RAPOPORT, A., y PERNER, Y.: "Testing Nash's solution of the cooperative game", en *Game Theory as a Theory of Conflict Resolution*, 1974.