

# La determinación de la composición de la cartera y la política comercial de una compañía de seguros. Un enfoque de cartera

Por  
YEHUDA KAHANE\*

Este artículo establece un modelo que determina simultáneamente la composición óptima de las carteras de seguro e inversión de una compañía de seguros utilizando la Técnica del Índice Único de Sharp. Para la administración, esta técnica se puede explicar de la siguiente forma: los diferentes tipos de productos que ofrece una empresa multirrama tienen diferentes tasas de rentabilidad y diferentes riesgos asociados con esas tasas. Tomando en consideración tanto los riesgos como las tasas de rentabilidad, ¿cuál es la mejor composición de productos que una empresa puede ofrecer al mercado? Este enfoque es especialmente adecuado para el seguro debido a la limitación de la información. Este tipo de análisis puede efectuar una contribución provechosa a la formación de una política de comercialización y composición de cartera de una empresa.

## INTRODUCCION

Publicaciones recientes han atraído la atención a los problemas de comercialización de las compañías de seguros y, especialmente, al problema de sus canales de comercialización (ver, por ejemplo, 3, 6). No obstante, se ha dado muy poca atención a la determinación de la composición deseada de productos de una compañía de seguros, es decir, a los tipos y números de pólizas que deberían ser vendidas. Este problema se torna hasta complicado debido a la existencia de interrelaciones entre la venta de pólizas en los

---

\* Profesor de la Universidad de Tel-Aviv. Profesor visitante, Centro de Investigación de Riesgo y Seguros, IESA, Caracas (Venezuela).

Este trabajo fue publicado en *Management Science*, junio 1977.

diferentes ramos y debido a la regulación que restringe la cuantía y los tipos de obligaciones que un asegurador puede tomar. El propósito de este artículo es sugerir un modelo que pueda ayudar a los aseguradores en su toma de decisiones sobre la composición de productos.

El dilema de la composición de productos se puede formular utilizando la terminología y herramientas de la teoría de selección de cartera (2, 13). *Este enfoque es relevante especialmente dentro del contexto del seguro, ya que la actividad de una compañía de seguros puede ser considerada como la administración de una cartera de pólizas de seguros, sumado al manejo de una cartera de inversiones.* Las utilidades de esas actividades de seguro e inversión son variables aleatorias, y se supone que la empresa tiene cálculos con respecto a su distribución. Se puede correlacionar (1) las tasas de utilidad de cada dos actividades, y esto se traduce en efectos interesantes de reducción de riesgo por medio de la diversificación (2) (por ejemplo, por medio de la operación de productos múltiples). Por lo tanto, no se puede tomar aisladamente la decisión de extender la actividad en un tipo de seguros determinado: por el contrario, se debería examinar el efecto combinado con otros ramos de seguro (4). Más aún, la composición de productos de seguro debería ser determinada simultáneamente con la cartera de inversión debido a la posible correlación entre los ingresos de suscripción e inversión. La literatura actual sugiere un modelo que aplica técnicas de programación cuadrática para encontrar simultáneamente la composición eficiente del seguro y la cartera de inversión de las compañías de seguros (1, 4, 5, 7, 8, 11). El propósito de este artículo es sugerir un modelo simplificado que solucione la composición de las carteras eficientes. La técnica sugerida, que está basada en la Técnica de Índice Unico de Sharp (12) utiliza un grupo de datos muy reducidos, que permite aplicar el modelo con fines prácticos.

El segundo objetivo de este estudio es enfocar algunas de las consideraciones de comercialización que deberían ser agregadas al marco de trabajo subyacente básico. El enfoque de la cartera implícitamente supone que la empresa puede aumentar o disminuir el volumen de su actividad en cada ramo de seguro sin cambiar la tasa de utilidad esperada o las características del riesgo de dicho ramo. Esto claramente ignora la posibilidad de una saturación del mercado, por un lado, y por el otro lado, la impotencia de ciertos

---

(1) Por ejemplo, las utilidades en el seguro de accidentes de los trabajadores pueden estar negativamente correlacionadas con los ciclos económicos (ocurren menos accidentes en la época de depresión y, por lo tanto, las utilidades tienden a ser más altas). La utilidad del seguro contra incendio, por otro lado, puede estar positivamente relacionada con los ciclos económicos (más incendios premeditados en tiempos de recesión). Por ende, la utilidad en estos ramos puede estar negativamente correlacionada. También pueden existir relaciones sistemáticas similares entre las actividades de seguro e inversión (por ejemplo, el producto de inversiones puede estar positivamente correlacionado a los flujos económicos y, por ello, negativamente relacionado a la utilidad del seguro de accidentes de los trabajadores).

(2) Este efecto es similar al generado por la diversificación de carteras de valores. Tal efecto está sujeto a extensas discusiones en los artículos financieros (ver, por ejemplo, un resumen en 9).

aseguradores para abandonar completamente ciertos ramos de seguro (debido a la naturaleza de los canales de comercialización). Sumado a esto, se deberían considerar otros factores y restricciones al determinar la composición de productos: por ejemplo, los clientes pueden preferir que sólo una compañía tramite todos sus seguros y, si esto fuera así, el asegurador no podría ofrecer solamente un cierto tipo de seguro y rehusarle a vender pólizas de otros complementarios. Los aseguradores también están sujetos a reglamentaciones con respecto a la cuantía de primas que pueden suscribir con un patrimonio dado, que nuevamente puede restringir su libertad de escoger la composición de seguros óptima. Dichas reglamentaciones de comercialización a menudo pueden ser expresadas como restricciones lineales y pueden ser incorporadas al modelo (3).

En \* 2 se presenta el modelo simplificado de cartera; los requerimientos de datos del modelo están expuestos en \*3. Los usos potenciales del modelo están demostrados con la información anterior en \*4, y en \*5 concluye el artículo con algunas observaciones y conclusiones generales.

## 2. EL MODELO

En esta sección se presenta un modelo para la determinación simultánea de la composición eficiente de las actividades de seguro e inversión de una compañía de seguros (industrial). Los modelos anteriores (ver, por ejemplo, 1, 5, 7, 8, 11) utilizan el enfoque de cartera de Markowitz (10), que requiere un grupo grande de datos. El modelo alternativo, sugerido en este artículo, utiliza el enfoque del Índice Unico de Sharpe (12), que reduce sustancialmente las exigencias de datos. El modelo formulado es como sigue:

Suponiendo que hay "m" ramos de seguros y "n" — "m" tipos de posibles inversiones, y que la rentabilidad de estas actividades son variables aleatorias  $\bar{r}_i$  con distribuciones conocidas que tienen valores esperados finitos y varianzas (no nulas) finitas (4). La rentabilidad del patrimonio,  $\bar{y}$ , es una combinación lineal de estas variables aleatorias:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{r}_i \quad [1]$$

(3) Además, la cartera de inversión está sujeta a restricciones reglamentarias sobre los tipos de activos y cuantías que se pueden invertir. En este artículo no se discuten dichas restricciones, pero se pueden incorporar al modelo fácilmente.

(4) Las rentabilidades operadas pueden ser negativas. Esto puede ser especialmente cierto para las rentabilidades de las actividades de seguro, ya que el asegurador puede estar dispuesto a suscribir con pérdida, porque espera ser compensado por el producto de las inversiones generadas con su actividad de seguro. La posibilidad de un activo sin riesgo (efectivo) ha sido excluida. Esta suposición simplificadora no afecta severamente la utilidad de los resultados, puesto que los valores en cartera en efectivo de los aseguradores son relativamente pequeños en la práctica.

donde:

$\bar{r}_i$  = Tasa de utilidad sobre la  $i^{ma}$  actividad de seguro, después del reaseguro (porcentaje de la prima), para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

= Tasa de rentabilidad para la inversión  $i$  (porcentaje del activo) para  $i = "m"+1, m+2, \dots, n$ .

$a_i$  = Relación de primas del ramo de seguro  $i$  a patrimonio ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

= Relación de inversión en activo  $i$  a patrimonio ( $i = m+1, m+2, \dots, n$ ).

$\bar{y}$  = Representa una variable aleatoria y será omitida de aquí en adelante.

Con el fin de reducir las exigencias de datos, se supone que las diferentes actividades están relacionadas solamente por medio de relaciones comunes con un índice general del mercado. Esta es una suposición simplificadora, y su validez se discute más adelante en este artículo. Se supone que la rentabilidad de la actividad  $i$  está relacionada linealmente a un cierto número índice  $\bar{I}$  (5):

$$\bar{r}_i = A_i + B_i \bar{I} + \bar{C}_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad [2]$$

$A_i$  y  $B_i$  son parámetros (que pueden ser determinados por análisis de regresión).  $\bar{C}_i$  es una variable aleatoria (la tilde será omitida de aquí en adelante) que se supone cumplirá:

$$\begin{aligned} E(C_i) &= 0 & (i = 1, \dots, n) \\ \text{Var}(C_i) &= Q_i & (i = 1, \dots, n) \\ \text{COV}(C_i C_j) &= 0 & (i \neq j, i, j = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad [3]$$

y se supone que la variable aleatoria  $I$  tiene la distribución

$$I = A_{n+1} + C_{n+1}$$

donde  $E(C_{n+1}) = 0$ ,  $\text{Var}(C_{n+1}) = Q_{n+1}$ ,  $\text{COV}(C_{n+1}, C_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , donde el símbolo  $n+1$  es utilizado por conveniencia matemática. Utilizando estas suposiciones, la rentabilidad del patrimonio [1] se convierte en:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^n a_i \bar{r}_i = \sum_{i=1}^n a_i (A_i + B_i I + C_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i (A_i + C_i) + \left( \sum_{i=1}^n a_i B_i \right) (A_{n+1} + C_{n+1}) \end{aligned} \quad [5]$$

Esta expresión se puede simplificar simbolizando:

$$\sum_{i=1}^n a_i B_i = a_{n+1} \quad [6]$$

(5) Se supone que cualquier dólar adicional de prima o inversión en la actividad  $i$  cumple la relación [2]. Esto es claramente irreal, ya que implícitamente asume un seguro y mercados de inversión no saturados. Sin embargo, esta suposición es aceptable cuando se trata con una compañía pequeña y con cambios limitados en la composición de las carteras de seguro e inversión.

[6] define una actividad  $n+1$  imaginaria, que se puede llamar la "inversión en el índice". Esta notación ayuda a describir la rentabilidad total del patrimonio como una suma ponderada de la rentabilidad no sistemática sobre todas las actividades y elementos sistemáticos que resultan de la relación con el índice:

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} a_i (A_i + C_i) \quad [7]$$

Suponiendo que el asegurador desea minimizar la varianza de la tasa de rentabilidad del patrimonio, para cualquier nivel de valor esperado (6), el objetivo se convierte en encontrar un grupo de  $a_i$  que minimice  $L$ :

$$\text{Min } L = \text{Var}(y) - E(y) \quad [8]$$

donde (ver [7]):

$$E(y) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i A_i \quad [9]$$

$$\text{Var}(y) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 Q_i \quad [10]$$

Las incógnitas  $a_i$  están sujetas a las siguientes restricciones:

$$a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad [11]$$

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i B_i \quad [12]$$

que refleja las restricciones no negativas comunes y la notación [6], respectivamente. Además se ha introducido una restricción de balance que mantiene la igualdad del patrimonio al activo total menos las obligaciones:

$$\sum_{i=m+1}^n a_i - \sum_{i=1}^m a_i g_i = 1 \quad [13]$$

El término  $\sum_{i=m+1}^n a_i$  representa el activo por un dólar de patrimonio, y el término  $\sum_{i=1}^m a_i g_i$  representa las obligaciones generales que son generadas por el negocio del seguro contra cada dólar de patrimonio (el coeficiente  $g_i$  expresa la cuantía de las reservas que son generadas por un dólar de primas en el ramo de seguro  $i$ ) (7); [13] está expresado en términos de activo y pasivo por dólar de patrimonio y, por tanto, es igual a 1.

(6) Las limitaciones del enfoque varianza-media son bien conocidas (y resumidas, por ejemplo, en 9). Sin embargo, este criterio puede ser utilizado sin peligro, puesto que  $r_i$  se distribuye aproximadamente normal, y de igual manera lo es  $y$ , y en este caso el criterio de la varianza-media es manejable.

(7) Las obligaciones de una compañía de seguros se generan por medio de la venta de pólizas de seguro y resultan de la naturaleza retardada del pago de los siniestros.

La composición eficiente de las actividades de seguro e inversión se deriva de la solución simultánea de [8] sujeto a [9]—[13]. Las carteras obtenidas son eficientes porque ninguna otra combinación de balance tendrá un grado más bajo de riesgo con el mismo nivel de rentabilidad esperada.

### 3. EXIGENCIA DE DATOS DEL MODELO

Los modelos anteriores de carteras (4, 5, 7, 8, 11) de compañías de seguros requieren el conocimiento de un número sustancial de parámetros, que es mucho mayor que lo que se necesita para el modelo sugerido. El uso de los viejos modelos requiere estimaciones de la rentabilidad esperada y de la varianza para cada ramo de seguro y para cada activo, y estimaciones para la matriz de covarianzas entre las rentabilidades de todas las actividades. El modelo presente reduce sustancialmente las exigencias de datos, tomando en cuenta solamente las relaciones de cada actividad con un índice general en vez de estudiar las relaciones entre todas las actividades. De esta forma sólo se necesitan tres parámetros para cada actividad ( $A_i$ ,  $B_i$  y  $Q_i$ ) y otros dos parámetros ( $A_{n+1}$  y  $Q_{n+1}$ ) para el índice. El análisis de un problema con 20 actividades requiere, por ende, sólo 62 parámetros en comparación a los 250 estimaciones que se necesitan para el modelo anterior. El análisis de un problema con 100 actividades requiere sólo 302 estimaciones, comparado a los 5.150 parámetros en el modelo [12]. La ganancia de dicho ahorro no es solamente del tiempo necesario para hacer los cálculos, sino principalmente el eliminar la necesidad de datos que difícilmente se consiguen, y dicha reducción de datos es sumamente importante cuando se utilizan parámetros *ex ante*. Así, la reducción del número de parámetros hace que el presente modelo sea mucho más aplicable en la práctica.

Se destaca otra ventaja importante que el nuevo enfoque tiene frente al modelo de carteras de Markowitz cuando se calculan los parámetros mediante el análisis de datos históricos: el número de períodos tiene que ser mayor que el número de actividades estudiadas; de lo contrario, la matriz varianza-covarianza será singular y no habrá solución al problema de la programación cuadrática (8).

Esto se convierte en un problema muy significativo cuando se analiza la información de las compañías de seguros, ya que generalmente éstas recopilan sus datos sobre una base anual (solamente en raras ocasiones hay datos trimestrales disponibles). Por lo tanto, con el fin de estudiar un problema complejo con muchas actividades, se requieren datos para un período extremadamente largo. Aun si dichos datos están disponibles, siempre existe el peligro de que *largar series históricas no reflejen ya las relaciones y tendencias actuales*. El uso del enfoque del índice único elimina dichos problemas,

(8) Supóngase  $N$  variables, cada uno con  $T$  observaciones, que son ordenadas en la matriz  $X(T \times N)$ . La matriz varianza-covarianza es  $(X - JX/N)(X - JX/N)'$ . Si  $T < N$ , el rango de la matriz de covarianza es  $T$ , puesto que  $r(AB) < [\min(r(A), r(B))]$ .

y es suficiente un periodo relativamente corto para estimar los parámetros relevantes.

El uso potencial del modelo para determinar la política comercial y las decisiones de comercialización del asegurador está demostrado por el uso de la información global de la industria. Los parámetros se calcularon con los registros históricos correspondientes al desarrollo de las compañías anónimas de seguros americanas e índices del mercado de capital para el periodo de 1956-1973 (9). Para fines de demostración, se analizaron 18 ramos de seguros y dos tipos de activos (acciones y bonos). Se puede extender el análisis para incluir más actividades, dependiendo de la disponibilidad de información. Por supuesto que el uso de información histórica global está sujeto a todas las reservas con respecto al uso de datos *ex post* como estimadores de esperanzas *ex ante*.

Se seleccionó la tasa global anual de utilidades de suscripción para que sirva como índice general. Las relaciones entre el rendimiento de cada ramo y el índice fueron estimadas por una regresión lineal simple [2] y los coeficientes de regresión están ilustrados en la tabla 1. Los coeficientes de determinación ( $R^2$ ) son significativos al nivel de confianza del 5 por 100 para 14 de las 20 actividades. En los otros casos,  $R^2$  está por debajo de 0,2 y es no significativo. El valor bajo de  $R^2$  no es sorprendente, y esto también ha ocurrido en los estudios del modelo de Sharpe dentro del contexto de mercados de capital. No obstante, se debería tener en mente que los casos con  $R^2$  bajo no invalidan el análisis, ya que la regresión se utiliza simplemente con el fin de aislar una fuente de variación (la reacción del ramo al índice general). Este elemento es captado por el término  $a_{n+1}^2 Q_{n+1}$  en [10], que es igual a  $\sum_{i=1}^n (a_i B_i)^2 Q_{n+1}$ . El resto de las varianzas no explicadas  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) también se toman en consideración en [10] (a través de la suma  $\sum_{i=1}^n a_i^2 Q_i$ ).

El parámetro  $A_i$  es una estimación de la ordenada en el origen de la línea de regresión. Este parámetro representa la rentabilidad obtenida en la actividad  $i$  cuando se neutraliza el efecto del índice. Algunos ramos de seguro tienen coeficiente  $A_i$  negativos, lo que significa que se espera que los aseguradores sufran pérdidas de suscripción en esos ramos (10) cuando el índice general es cero, es decir, que no hay utilidades globales de suscripción. (Por ejemplo, la tabla 1 muestra que en la responsabilidad automovilística la pérdida esperada es el 4,2 por 100 de la prima.) Los aseguradores pueden estar

(9) Los datos de seguro fueron obtenidos de *Property-Casualty Aggregates and Averages* (1974), de Best, A. M. Best Co., Nueva York. Las tasas de rentabilidad de las acciones fueron calculadas del índice compuesto de Moody, y las rentabilidades realizadas para bonos fueron calculadas del *Federal Reserve Bulletin*.

(10) Nuevamente se debería observar que los parámetros de [2] están estimados de datos históricos. Se supone que la relación que se encuentra es estable y que puede ser utilizada con fines de pronóstico. Algunas pruebas parciales de los subperiodos no confirman esta suposición de estabilidad a lo largo del tiempo. Se requiere un trabajo adicional para explicar la conducta de los parámetros a través del tiempo.

y es suficiente un período relativamente corto para estimar los parámetros relevantes.

El uso potencial del modelo para determinar la política comercial y las decisiones de comercialización del asegurador está demostrado por el uso de la información global de la industria. Los parámetros se calcularon con los registros históricos correspondientes al desarrollo de las compañías anónimas de seguros americanas e índices del mercado de capital para el período de 1956-1973 (9). Para fines de demostración, se analizaron 18 ramos de seguros y dos tipos de activos (acciones y bonos). Se puede extender el análisis para incluir más actividades, dependiendo de la disponibilidad de información. Por supuesto que el uso de información histórica global está sujeto a todas las reservas con respecto al uso de datos *ex post* como estimadores de esperanzas *ex ante*.

Se seleccionó la tasa global anual de utilidades de suscripción para que sirva como índice general. Las relaciones entre el rendimiento de cada ramo y el índice fueron estimadas por una regresión lineal simple [2] y los coeficientes de regresión están ilustrados en la tabla 1. Los coeficientes de determinación ( $R^2$ ) son significativos al nivel de confianza del 5 por 100 para 14 de las 20 actividades. En los otros casos,  $R^2$  está por debajo de 0,2 y es no significativo. El valor bajo de  $R^2$  no es sorprendente, y esto también ha ocurrido en los estudios del modelo de Sharpe dentro del contexto de mercados de capital. No obstante, se debería tener en mente que los casos con  $R^2$  bajo no invalidan el análisis, ya que la regresión se utiliza simplemente con el fin de aislar una fuente de variación (la reacción del ramo al índice general). Este elemento es captado por el término  $a_{n+1}^2 Q_{n+1}$  en [10], que es igual a  $\sum_{i=1}^n (a_i B_i)^2 Q_{n+1}$ . El resto de las varianzas no explicadas  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) también se toman en consideración en [10] (a través de la suma  $\sum_{i=1}^n a_i^2 Q_i$ ).

El parámetro  $A_i$  es una estimación de la ordenada en el origen de la línea de regresión. Este parámetro representa la rentabilidad obtenida en la actividad  $i$  cuando se neutraliza el efecto del índice. Algunos ramos de seguro tienen coeficiente  $A_i$  negativos, lo que significa que se espera que los aseguradores sufran pérdidas de suscripción en esos ramos (10) cuando el índice general es cero, es decir, que no hay utilidades globales de suscripción. (Por ejemplo, la tabla 1 muestra que en la responsabilidad automovilística la pérdida esperada es el 4,2 por 100 de la prima.) Los aseguradores pueden estar

(9) Los datos de seguro fueron obtenidos de *Property-Casualty Aggregates and Averages (1974)*, de Best, A. M. Best Co., Nueva York. Las tasas de rentabilidad de las acciones fueron calculadas del índice compuesto de Moody, y las rentabilidades realizadas para bonos fueron calculadas del *Federal Reserve Bulletin*.

(10) Nuevamente se debería observar que los parámetros de [2] están estimados de datos históricos. Se supone que la relación que se encuentra es estable y que puede ser utilizada con fines de pronóstico. Algunas pruebas parciales de los subperíodos no confirman esta suposición de estabilidad a lo largo del tiempo. Se requiere un trabajo adicional para explicar la conducta de los parámetros a través del tiempo.

dispuestos a suscribir dichos ramos a pesar de las pérdidas porque aún pueden obtener algún rendimiento de las inversiones sobre los fondos generados por estos ramos, y debido a los posibles efectos de reducción del riesgo que estos ramos pueden tener cuando se combinan con otras actividades.

TABLA I

**Relaciones entre la productividad del seguro y las actividades de inversión y las utilidades totales de suscripción (U. S. Stock Insurers)**

$$r_i = A_i + B_i I + C_i$$

ACTIVIDAD	$A_i$	$B_i$	$R^2$	Valor $T$ para $B_i$	Varianza ( $Q_i$ ) no explicada
Incendio .....	2,6	1,9	0,53	4,23	13,8
Productos asociados.	4,0	3,6	0,52	4,20	50,4
Propietarios de re- sidendias .....	-8,2	3,4	0,30	2,63	111,4
Comercial .....	-4,4	4,1	0,39	3,21	111,5
Transp. oceánico ...	0,9	2,1	0,41	3,37	26,5
Transp. interior ....	2,2	2,2	0,65	5,41	11,7
Grupo de salud ....	-0,5	-0,6	0,24	-2,22	4,4
Salud .....	6,1	-0,5	0,12	-1,50	8,8
Compensación T. ...	2,8	-0,7	0,25	-2,32	5,6
Responsabilidad ...	-1,7	-1,8	0,24	-2,27	44,8
Responsabilidad au- tomóvil .....	-4,2	1,0	0,74	6,74	1,5
Casco .....	3,5	1,7	0,72	6,49	4,6
Fidelidad .....	3,0	0,4	0,02	0,53	41,7
Caución .....	8,1	0,1	0,00	0,18	36,8
Vidrio .....	-2,7	1,4	0,39	3,22	12,1
Robo .....	2,7	2,7	0,32	2,77	62,5
Calderas .....	2,1	0,7	0,04	0,86	41,8
Crédito .....	5,1	-6,6	0,26	-2,40	513,6
Acciones .....	9,1	0,9	0,03	0,69	111,1
Bonos .....	1,7	1,1	0,18	1,87	25,4
Utilidades por sus- cripción total (el índice) .....	-0,5				4,0

Los parámetros  $B_i$  representan las relaciones entre la rentabilidad del ramo y el índice general, y reflejan la contribución sistemática de la actividad particular a la cartera de riesgo. Por lo tanto, estos parámetros representan un papel importante en la determinación de la composición de la

cartera. Por ejemplo, un asegurador que desea generar una cartera de producto "defensiva" debería operar principalmente en los ramos con  $B_i$  negativo. De ese modo disfrutaría de utilidades cuando otros aseguradores sufren pérdidas, pero podría perder cuando otros aseguradores obtienen ganancias. Sin embargo, esto puede afectar también al rendimiento esperado por medio de los valores específicos de  $A_i$  en los ramos seleccionados.

Es interesante observar que se encontró para ciertas actividades un  $B_i$  negativo con un  $A_i$  altamente positivo (por ejemplo, en los seguros de salud y crédito). Esto significa que el asegurador puede reducir el riesgo y aumentar su rentabilidad esperada especializándose en dichos ramos. Otros ramos (por ejemplo, los productos de propietarios de residencias y los multirriesgos del comercio) tienen un  $B_i$  altamente positivo y un  $A_i$  negativo, lo que significa que *a priori* tenderán a ser excluidos de la cartera óptima. Dichas relaciones pueden significar que los mercados de seguros no están en un equilibrio competitivo, o, en forma alternativa, esto puede reflejar el uso de datos *ex post* en vez de datos esperados.

La mayoría de los coeficientes  $B_i$  son estadísticamente significativos (14 de 20). A estas alturas es imposible ofrecer una explicación para los signos y valores específicos de  $B_i$ , porque no existe una teoría sobre este tema. Parte de las relaciones observadas pueden resultar de las limitaciones de información y, específicamente, de la posibilidad de que la distribución de las tasas de utilidad en ciertos productos no es estacionaria a lo largo del tiempo. Dicho problema se puede evitar cuando se preparan datos para una compañía individual, como lo es en el caso de los datos no analizados que pueden ser "adaptados" para corregir cambios que ocurrieron durante el periodo (por ejemplo, cambios en las tarifas de seguros). El problema no existe cuando se utilizan parámetros *ex ante*.

La estimación de la varianza no explicada  $Q_i$  representa los movimientos aleatorios de la tasa de utilidad en la actividad  $i$ . De este modo,  $Q_i$  genera la cartera de riesgo "no sistemática", que puede ser minimizada en una cartera bien diversificada. Algunos productos (incluyendo el índice en sí) tienen una variabilidad extremadamente baja, donde otras actividades tienen valores de  $Q_i$  extremadamente altos. Aquellos productos con un riesgo no sistemático alto pueden afectar el riesgo total de la cartera en forma significativa, salvo que sean incluidos en pequeñas proporciones y dentro de una cartera bien diversificada.

El modelo presentado anteriormente requiere unas cuantas suposiciones estadísticas sobre las relaciones entre los elementos aleatorios de las rentabilidades de otras actividades: [3] y [4] requieren que estos elementos aleatorios ( $C_i$ ) no estén correlacionados. A pesar de este requerimiento, algunos de los coeficientes de correlación son sustancialmente diferentes de cero. Sin embargo, una prueba estadística de toda la matriz no podría rechazar la hipótesis que todos los términos de error  $C_i$  no estén correlacionados. Esto significa que el modelo de índice único dará una aproximación razonablemente buena para los resultados de la solución Markowitz.

En la siguiente sección se ilustra el uso de los datos anteriores para calcular una composición eficiente de productos para la industria del seguro. Antes de pasar a los resultados se debería observar que los datos *ex post* fueron utilizados solamente con fines de demostración. Este mismo modelo es apropiado cuando se utilizan parámetros *ex ante* que reflejan los pronósticos de la administración.

#### 4. LA COMPOSICION EFICIENTE DE PRODUCTOS

Los parámetros anteriormente mencionados se utilizan en el modelo para demostrar la derivación de la frontera de eficiencia, es decir, la composición de las actividades de seguro e inversión que minimizan el riesgo para cualquier nivel de rentabilidad esperada del patrimonio. Sin embargo, el uso del modelo como se presenta en \*2 puede sugerir que los aseguradores se deberían especializar sólo en los pocos productos que sean más atractivos. Dicha solución se puede obtener aunque los mencionados productos puedan representar fracciones muy pequeñas del actual negocio del seguro (11).

Con el propósito de evitar una solución tan irreal, se introducen algunas restricciones de comercialización que se habían ignorado hasta este punto. Una suposición básica y común de los primeros modelos y del modelo presentado en \*2 es que no hay saturación del mercado, es decir, que los aseguradores pueden vender cualquier cantidad de seguros y obtener la misma rentabilidad esperada y desviación típica. No obstante, esta suposición es irreal, porque en la realidad se logra un aumento en la suscripción acercándose a los asegurados marginados, lo que significa una rentabilidad más baja (y posiblemente hasta un riesgo más alto) (12).

El efecto de saturación de mercado se puede explicar en un modelo en el cual se permite que el grupo de parámetros básicos ( $A_i, B_i, Q_i$ ) para cada vector de las  $a_i$  desconocidas sea diferente. Desafortunadamente esta matemática no se encuentra disponible, así que el problema tiene que ser tratado de otra manera. Supongamos para este propósito que cada actividad está compuesta en realidad de subactividades, cada una con sus propios parámetros (es decir, se aproxima la demanda de actividad por supuestos lineales). Se puede describir una cierta actividad, por ejemplo, por un grupo ordenado de subactividades  $k$  (es decir, aquellas actividades con  $i=l, l+1, \dots, l+k$ ). Por conveniencia matemática, se supone que las subactividades difieren solamente en su rentabilidad esperada ( $A_i$ ), pero tienen las mismas relaciones

(11) Esto se ha verificado comparando la frontera eficiente obtenida con la técnica anterior con la derivada cuando se utilizó el enfoque Markowitz. Las rentabilidades esperadas y la desviación típica de la rentabilidad del patrimonio fueron bastante similares. Sin embargo, algunas veces, la composición de la cartera fue ligeramente diferente.

(12) Por otro lado, el creciente número de pólizas vendidas puede disminuir el riesgo en dicho producto, debido a la ley de grandes números. Este efecto secundario se ignora en este punto, puesto que se supone que el tamaño de la cartera de seguros ya es suficientemente grande y que se utiliza el reaseguro, así que el efecto es prácticamente neutralizado.

con el índice y las mismas características de riesgo. Se supone que las primeras pólizas serán más rentables y que la rentabilidad esperada de las pólizas adicionales es decreciente. Esta suposición puede ser resumida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 A_1 &> A_{1+1} > \dots > A_{1+k} \\
 B_{1+j} &= B_1 & (j=1, \dots, k) \\
 Q_{1+j} &= Q_1 & (j=1, \dots, k)
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Se han aumentado estas restricciones adicionales al modelo con el fin de preservar la secuencia de las subactividades en la solución. Por ejemplo, la actividad  $l+2$  no debería ser tomada antes de que la actividad  $l+1$  alcance su límite superior. Por ende, se debería aumentar las siguientes restricciones, además de las restricciones de negatividad sobre los pesos  $a_j$ :

$$a_{l+1} \leq U_{l+j} \quad (j=1, \dots, K)
 \tag{15}$$

donde  $U_{l+j}$  es el límite superior del peso que la subactividad  $j$  puede obtener. El programa seleccionará primero las subactividades con el coeficiente  $A$  más alto, y cuando llega al límite superior se considerará, para ser incluida en la cartera, la subactividad con el segundo  $A$  más alto.

La ventaja principal de la técnica anterior es que reconoce el efecto de reducción del riesgo mediante el aumento de pólizas suscritas en cada producto individual. Aún quedan problemas técnicos destinados a convertir este método en operacional, y el principal está en la medida y estimación de la función que describe  $a_i$ .

Un enfoque alternativo a la saturación del mercado es suponer que los parámetros  $A$ ,  $B$  y  $Q$  son válidos solamente cuando la composición óptima de productos es restringida para que sea similar a la que existía cuando se recopilaron los datos. Bajo este método, que es el que se utiliza más adelante, la composición idónea de productos se calcula reemplazando las restricciones de no negatividad [12] por un grupo de restricciones de saturación de mercado. Estas restricciones limitan la proporción de cada actividad de seguro en la composición óptima entre un límite superior y un límite inferior,  $u_i$  y  $l_i$ , respectivamente; es decir, la restricción de no negatividad [12] es reemplazada por:

$$l_i \leq a_i \leq U_i \quad (i=1, \dots, m)$$

Para los propósitos de demostración se ha supuesto que el peso de cada línea de seguros  $i$  en la composición deseada de productos tiene que estar dentro de un radio de 0,8 a 1,2, arbitrariamente seleccionado de su proporción real en las primas de 1973. Se pueden agregar represiones de comercialización adicionales al modelo para reflejar algunas relaciones estructurales dentro del producto de seguro. Por ejemplo, se puede representar por una restricción  $a_i > P_{ij} a_j$  (13) la posibilidad de que una cierta póliza de seguro  $i$

(13) Puesto que  $a_i$  y  $a_j$  están definidas en términos de prima dólares, se introduce una constante  $P_{ij}$  que refleja la proporción entre las tarifas de seguros en estos productos para que la restricción se relacione al importe nominal del seguro.

sea considerada como un prerrequisito para otra  $j$ . También se pueden utilizar otras restricciones para reflejar la reglamentación de ambas carteras, la de seguros y la de inversión. Dichas restricciones se ignoran en la siguiente demostración.

El uso del modelo para las decisiones políticas de marketing y comercial está demostrado en la tabla 2. Esta tabla presenta la composición de carteras obtenidas mediante el uso de los datos anteriores en el modelo (14). Se presentan sólo tres puntos en la frontera eficiente. Uno es la tasa esperada más baja de rentabilidad del patrimonio (composición A), la rentabilidad más alta del patrimonio (composición C) y una de las posibles soluciones intermedias (composición B). La composición de tanto la cartera de inversión como de la cartera de seguro cambia cuando el asegurador escoge una combinación diferente de riesgo-rentabilidad.

Para fines de demostración, la tabla 2 está basada en la suposición de que una prima-dólar en cada producto de seguro genera exactamente un dólar de reservas de seguro. Esta suposición claramente puede causar una predisposición contra algunos productos de seguro: los productos que generan menos reservas tienden, por ejemplo, a ser menos rentables de lo que se puede apreciar en el modelo, puesto que generan menos utilidades en la inversión. Esta suposición irreal puede ser reemplazada por otras estimaciones de los parámetros  $g$ . Sin embargo, esto involucra algunas suposiciones arbitrarias que fueron evitadas, ya que la demostración, más que los resultados numéricos reales, es considerada el objetivo principal de este artículo. Cuando el modelo se utiliza con los datos *a priori ex ante*, puede desempeñar un papel importante para determinar la política de una compañía de seguros. Por ejemplo, comparando la composición de productos deseada con la existente, se puede identificar las actividades que se deberían extender, proporcionando de este modo las guías para las decisiones de publicidad y comercialización. El potencial de este método se puede observar en la tabla 2, que resume la composición de la cartera de seguro a lo largo de todo el campo de acción posible: algunos productos de seguros están obteniendo firmemente las proporciones que son iguales a sus restricciones inferiores, es decir, estos productos tienden a ser "indeseados" (simbolizados por la letra "u"). Otros productos están obteniendo consecuentemente la porción superior, lo que significa que son "deseados" (simbolizados por "d"). La conveniencia de otros productos (por ejemplo, incendio, transporte, productos de de responsabilidad) depende de la selección que el asegurador haga sobre la combinación específica de riesgo-rentabilidad. Se debería observar que la

---

(14) La tabla 2 está calculada bajo la suposición de que el volumen total del negocio del seguro permanece constante. La suposición específica hecha en la tabla 2 es que cada dólar de patrimonio puede ser utilizado para operar sólo un dólar de negocio de seguro (primas) (es decir, se solucionó el modelo bajo la restricción adicional de que  $\sum_{i=1}^m a_i = 1$ ). Estos mismos cálculos se pueden repetir para otras proporciones de seguro/patrimonio, y se puede derivar [7] la envolvente de todas las fronteras eficientes individuales.

conveniencia está determinada de acuerdo a la combinación riesgo-rentabilidad y al grupo entero de restricciones, es decir, de acuerdo al desarrollo de cada actividad con todas las otras, y no sólo sobre la base de la rentabilidad esperada de esta actividad por separado (por ejemplo, los seguros de grupo-salud se consideran "convenientes" a pesar de su coeficiente negativo A).

TABLA 2

**La composición de las carteras de seguro e inversión para puntos seleccionados sobre la frontera eficiente**

	A	B	C
Rentabilidad esperada del patrimonio .....	3,7	8,2	16,4
Desviación típica .....	11,2	12,7	21,9
<i>Composición de la cartera de seguro</i>			
Incendio y productos asociados .....	7,9 <sup>u</sup>	11,8	11,8 <sup>d</sup>
Propietarios de residencias .....	7,8 <sup>u</sup>	7,8	7,8 <sup>u</sup>
Multirriesgos de comercio .....	5,8 <sup>u</sup>	5,8	5,8 <sup>u</sup>
Transporte (oceánico e interno) .....	4,1 <sup>u</sup>	5,8	6,2 <sup>u</sup>
Salud (grupo y no grupo) .....	4,8 <sup>u</sup>	4,8	4,8 <sup>u</sup>
Accidentes de trabajo .....	14,2 <sup>u</sup>	14,2	14,2 <sup>u</sup>
Responsabilidad .....	9,1 <sup>d</sup>	9,1	8,7 <sup>u</sup>
Responsabilidad automóvil .....	29,0 <sup>d</sup>	19,3	19,3 <sup>u</sup>
Automóvil casco .....	13,6*	17,5	17,5 <sup>d</sup>
Otros productos .....	3,8	3,8	3,8
TOTAL .....	100,0	100,0	100,0
<i>Composición de la cartera de inversión</i>			
Acciones .....	19,8	45,0	100,0
Bonos .....	80,2	55,0	
TOTAL .....	100,0	100,0	100,0

<sup>u</sup> Producto no deseado, la proporción es igual al límite inferior.

<sup>d</sup> Producto deseado, la proporción es igual al límite superior.

\* Proporción entre los límites superior e inferior.

## 5. RESUMEN Y OBSERVACIONES FINALES

El modelo presentado en este artículo es potenciar una herramienta poderosa para ayudar a determinar la política de una compañía de seguros. Se considera que ésta mantiene una cartera de pólizas de seguros y, además,

una cartera de inversiones. Hemos sugerido un método para solucionar simultáneamente la composición de estas dos carteras, bajo la suposición de que la empresa está tratando de minimizar la varianza de la rentabilidad del patrimonio (riesgo) para un nivel dado de rentabilidad.

El método sugerido requiere un grupo de datos reducidos, que se pueden generar de los archivos históricos de las compañías de seguros o, de lo contrario, por la administración de predicciones *ex ante*. El modelo incorpora algunas restricciones que están destinadas a reflejar las diferentes relaciones de comercialización y explican la posibilidad de la saturación del mercado. Las restricciones lineales adicionales reflejan las exigencias legales que se pueden introducir fácilmente tanto sobre la composición del seguro como sobre la composición de inversión.

Las funciones del modelo están ilustradas por el uso de datos globales de las compañías de seguros anónimas de los Estados Unidos de Norteamérica. Por lo tanto, los resultados numéricos específicos tienen un valor limitado solamente para fines prácticos. Sin embargo, demuestran la oportunidad del enfoque para diferenciar entre las actividades deseadas e indeseadas. Dicha información puede proporcionar guías valiosas para la asignación de presupuestos de publicidad, para dirigir otros esfuerzos de comercialización y para establecer un sistema de incentivo para los agentes. El método también puede ser útil para analizar las decisiones de tarificación y otras decisiones comerciales que la campaña comporte (15).

#### REFERENCIAS

1. AGNEW, N. H.; AGNEW, R. A.; RAMUSSEN, J., y SMITH, K. R.: "An Application of Chance Constrained Programming to Portfolio in a Casualty Insurance Firm", *Management Science*, vol 15, núm. 10 (junio 1969), pp. B512-B519.
2. BERGER, P. A.: "A Marketing Model for Selecting Among Interdependent New Product Candidates", *American Marketing Association, Proceedings*, 1974.
3. ETGAR, M.: "An Empirical Analysis of Motivations for the Development of Centrally Coordinated Vertical Marketing System: The Case of the Property and Casualty Insurance Industry". Unpublished Ph. D. thesis, Graduate School of Business Administration, University of California, Berkeley (1974).
4. FERRARI, J. ROBERT: "A Theoretical Portfolio Selection Approach for Insuring Property and Liability Lines", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. LIV (mayo 1967), pp. 33-69.
5. HAUGEN, ROBERT A., y KRONCKE, CHARLES O.: "Optimizing the Structure of Capital Claims and Assets of a Stock Insurance Company", *The Journal of Risk and Insurance*, vol. 37, núm. 1 (marzo 1970), pp. 41-49, y "Reply", vol. 38, núm. 2 (junio 1972), pp. 305-316.
6. JOSKOW, PAUL L.: "Cartels, Competition and Regulation and the Cost of Capital in the Insurance Industry", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (diciembre 1971), pp. 1283-1305.

---

(15) El autor quisiera agradecer al profesor George Haines y a dos jueces anónimos por sus valiosos comentarios en el primer borrador de este artículo.

7. KAHANE, Y., y NYE, D.: "A Portfolio Approach to the Property Liability Insurance Industry", *Journal of Risk and Insurance*, vol. 42, núm. 4 (diciembre 1975), pp. 579-598.
8. KROUSE, CLEMENT, G.: "Portfolio Balancing Corporate Assets and Liabilities with Special Application to Insurance Management", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 5 (marzo 1970), pp. 77-105.
9. LEVY, H., y SARNAT, M.: *Investment and Portfolio Analysis*, John Wiley & Sons Inc., Nueva York, 1972.
10. MARKOWITZ, H. M.: "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, vol. 3, núm. 1 (marzo 1952), pp. 77-91.
11. QUIRIN, G. D., et al.: *Competition, Economic Efficiency and Profitability in the Canadian Property and Casualty Insurance Industry*, prepared for the Insurance Bureau of Canada, Toronto, enero 1974.
12. SHARPE, W. F.: "A Simplified Model for Portfolio Analysis", *Management Science*, vol. 9, núm. 2 (enero 1963), pp. 277-293.
13. WIND, Y.: "Product Portfolio Analysis: A New Approach to the Product Mix Decision", *American Marketing Association. Proceedings*, 1974.