

Capitalización individual y capitalización colectiva

Por
AGUSTIN SANS Y DE LLANOS

UNA INTRODUCCION AL TEMA

Se van a comparar estos dos sistemas a través de un sencillo ejemplo en el que se consideran tan sólo tres cabezas, de edades treinta, cuarenta y cincuenta años, que se jubilan a los sesenta y cinco. Se admite que la renta de jubilación es de una peseta, y ello vitaliciamente.

Los cálculos se realizan en base a la tabla P. F. 60/64 al 4,5 % sin recargos de gestión.

a) **Capitalización individual**

La prima individual constante para cada cabeza vale:

$$x = 30 \quad \frac{{}_{35}E_{30} \cdot a_{65}}{\ddot{a}_{30:\overline{35}|}} = \frac{0,180932 \times 10,3141}{17,7387} = 0,10520$$

$$x = 40 \quad \frac{{}_{25}E_{40} \cdot a_{65}}{\ddot{a}_{40:\overline{25}|}} = \frac{0,284718 \times 10,3141}{14,2500} = 0,20607$$

$$x = 50 \quad \frac{{}_{15}E_{50} \cdot a_{65}}{\ddot{a}_{50:\overline{15}|}} = \frac{0,454034 \times 10,3141}{10,8003} = 0,43359$$

Si los tres asegurados acordaran pagar a medias el total de primas, a cada uno le correspondería un pago de:

$$\frac{(0,1052 + 0,20607 + 0,43359)}{3} = 0,24828$$

La reserva matemática para $t = 1$ tiene como valor:

$x = 30$:

$${}_1V_{30} = {}^{34}/a_{31} - 0,10520 \times \ddot{a}_{31:\overline{34}} = 1,952139 - 1,842052 = 0,110087$$

$x = 40$:

$${}_1V_{40} = {}^{24}/a_{41} - 0,20607 \times \ddot{a}_{41:\overline{24}} = 3,074354 - 3,012805 = 0,061549$$

$x = 50$:

$${}_1V_{50} = {}^{14}/a_{51} - 0,43359 \times \ddot{a}_{51:\overline{14}} = 4,913719 - 4,458692 = 0,455027$$

La suma de las tres reservas es 0,62663.

b) Capitalización colectiva

La prima inicial Θ_1 se calcula mediante la fórmula:

$$\Theta_1 = \frac{{}^{35}/a_{30} + {}^{25}/a_{40} + {}^{15}/a_{50}}{\ddot{a}_{30:\overline{35}} + \ddot{a}_{40:\overline{25}} + \ddot{a}_{50:\overline{15}}} = \frac{9,48571}{42,7890} = 0,22168$$

Seguidamente se expone el cálculo de la reserva matemática y de la segunda prima Θ_2 en las hipótesis de que vivan los tres o vivan sólo dos.

1. Viven los tres

$$V_1 = ({}^{34}/a_{31} + {}^{24}/a_{41} + {}^{14}/a_{51}) - \Theta_1 (\ddot{a}_{31:\overline{34}} + \ddot{a}_{41:\overline{24}} + \ddot{a}_{51:\overline{14}}) = 9,94021 - 9,40222 = 0,53799$$

La segunda cotización valdrá:

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \frac{({}^{34}/a_{31} + {}^{24}/a_{41} + {}^{14}/a_{51}) - 0,53799}{\ddot{a}_{31:\overline{34}} + \ddot{a}_{41:\overline{24}} + \ddot{a}_{51:\overline{14}}} = \\ &= \frac{9,94021 - 0,53799}{42,4135} = 0,23436 - 0,01268 = 0,22168 = \Theta_1 \end{aligned}$$

2. Viven (30) y (40)

$$\begin{aligned} V_1 &= ({}^{34}/a_{31} + {}^{24}/a_{41}) - \Theta_1 \cdot (\ddot{a}_{31:\overline{34}} + \ddot{a}_{41:\overline{24}}) = \\ &= 5,02649 - 7,12264 = -2,09615 \end{aligned}$$

En este caso, la reserva es negativa, por lo que al calcularse Θ_2 , en lugar de restarse el compromiso futuro del asegurador se suma.

En efecto, se tiene:

$$\Theta_2 = \frac{({}^{34}/a_{31} + {}^{24}/a_{41}) - (-2,09615)}{\ddot{a}_{31:\overline{34}|} + \ddot{a}_{41:\overline{24}|}} = 0,15644 + 0,06524 = 0,22168$$

3. *Viven (30) y (50)*

$$\begin{aligned} V_1 &= ({}^{34}/a_{31} + {}^{14}/a_{51}) - \Theta_1 \cdot (\ddot{a}_{34:\overline{31}|} + \ddot{a}_{51:\overline{14}|}) = \\ &= 6,865859 - 6,161196 = 0,70466 \end{aligned}$$

Con ello, la segunda cotización vale:

$$\Theta_2 = \frac{({}^{34}/a_{31} + {}^{14}/a_{51}) - 0,70466}{\ddot{a}_{34:\overline{31}|} + \ddot{a}_{51:\overline{14}|}} = 0,24703 + 0,02535 = 0,22168$$

4. *Viven (40) y (50)*

$$\begin{aligned} V_1 &= ({}^{24}/a_{41} + {}^{14}/a_{51}) - \Theta_1 \cdot (\ddot{a}_{41:\overline{24}|} + \ddot{a}_{51:\overline{14}|}) = \\ &= 7,988074 - 5,520608 = 2,467466 \end{aligned}$$

Y la segunda prima será:

$$\Theta_2 = \frac{({}^{24}/a_{41} + {}^{14}/a_{51}) - 2,467466}{(\ddot{a}_{41:\overline{24}|} + \ddot{a}_{51:\overline{14}|})} = 0,32076 + 0,09908 = 0,22168$$

Las cifras anteriores sugieren los siguientes comentarios:

1. La prima promedia en capitalización invididual es superior a la prima media actuarial en capitalización colectiva.

2. En capitalización colectiva los jóvenes pagan por los viejos. A las cabezas (30) y (40) les convendría, como individuos, pagar la prima en capitalización clásica. De aquí que la técnica colectiva exija la adhesión obligatoria.

En cambio, la cabeza (50) se beneficia.

3. Una ventaja básica de la capitalización colectiva es la de que el fallecimiento o jubilación de asegurados no altera el tipo de prima. Esta hay que modificarla cuando se registran nuevas adhesiones (que si son jóvenes determinarán un descenso en el tipo de cotización), bajas o modificaciones en la cuantía de las rentas a servir.

4. En el caso de capitalización individual, la reserva matemática de primer año se ha visto que vale 0,62663 y la suma de las primas era de 0,74486.

Con ello, la reserva representa el 84,13 % de las primas.

Aplicando la capitalización colectiva, la reserva es de 0,53799 y la prima global $0,22168 \times 3 = 0,66504$.

Por ello, la reserva representa el 80,90 % de las primas.

5. Al calcular la segunda cotización Θ_2 , en los cuatro casos considerados, se ha descompuesto el resultado en dos sumandos.

El primero de ellos representa la prima que se pagaría por los asegurados si, con la edad inicial, más un año —o sea, un año después—, desearan contratar colectivamente por vez primera. El segundo sumando (que ha resultado negativo, excepto cuando viven [30] y [40], es decir, cuando ha fallecido la cabeza [50]) representa la disminución de prima que supone hacer intervenir la reserva.

Se ha obtenido, en resumen:

Caso	Viven	Sumando 1.º	Sumando 2.º	Cotización Θ_2
1	Los tres	0,23436	- 0,01268	$0,22168 = \Theta_1$
2	(30) y (40)	0,15644	+ 0,06524	$0,22168 = \Theta_1$
3	(30) y (50)	0,24703	- 0,02535	$0,22168 = \Theta_1$
4	(40) y (50)	0,32076	- 0,09908	$0,22168 = \Theta_1$

En todos los casos, el sumando 1.º (cuya significación ya se ha expuesto) es superior a la cotización inicial (excepto en el 2.º), siendo la misión del sumando 2.º disminuirla en la cantidad anual que resulta de diluir la reserva entre los asegurados mientras estén en activo, y la cual conduce a ese primer sumando al nivel de la cotización inicial.

6. En la capitalización colectiva se parte del principio de que en todo momento t debe existir una equivalencia financiero-actuarial entre, por un lado, el valor actual de las primas futuras (sin introducir hipótesis alguna de nuevas adhesiones), más la reserva matemática, y, por otro lado, el valor actual de las pensiones de jubilación. Es decir, expresado lo mismo algebraicamente:

$$\Theta_{t+1} \cdot \sum \ddot{a}_{x_t+t: \overline{w-x_t-t}} + V_t = \sum w^{-x_t-t} / a_{x_t+t}$$

donde Θ_{t+1} es el tipo de cotización o prima, el cual se determina después de haberse calculado la reserva matemática V_t al momento t .

7. Se ha visto que en el ejemplo considerado cuando fallece la cabeza (50) antes del año, la reserva de primer año es negativa. Esto es lógico,

por cuanto las cabezas (30) y (40) pagan en capitalización colectiva una prima superior a la que les correspondería en capitalización individual, y ello, en favor de la cabeza (50), a la que le ocurre lo contrario. Por ello, al fallecer ésta, durante unos años el valor actual del compromiso del asegurador es inferior al valor actual de las primas, generándose esa negativización de la reserva.

Evidentemente, el asegurador no puede cobrar a los dos asegurados (30) y (40) el importe absoluto de la reserva para poder eliminarlo así de su activo. Lo que hará, por el juego mismo del sistema, es lograr amortizar esa deuda con las primas que recibe, las cuales son superiores hasta un cierto año a las que correspondería pagar a aquellos dos, incluso en capitalización colectiva.

Un desarrollo numérico facilitará la comprensión.

En el caso de haber fallecido (50) antes del año, sobreviviendo (30) y (40) se van a tabular las reservas sucesivas y las cotizaciones, o sea:

$$V_t = ({}^{35-t}/a_{30+t} + {}^{25-t}/a_{40+t}) - \Theta_1 \cdot (\ddot{a}_{30+t:35-t} + \ddot{a}_{40+t:25-t})$$

$$\Theta_{t+1} = \frac{({}^{35-t}/a_{30+t} + {}^{25-t}/a_{40+t}) - V_t}{\ddot{a}_{30+t:35-t} + \ddot{a}_{40+t:25-t}} = A - B$$

Dando valores a t se encuentra:

t	V_t	$\Theta_{t+1} = A - B = \Theta_1$
1	- 2,09615	0,15644 - (- 0,06524) = 0,22168
2	- 1,72900	0,16685 - (- 0,05483) = 0,22168
3	- 1,34471	0,17818 - (- 0,04350) = 0,22168
4	- 0,94245	0,19054 - (- 0,03114) = 0,22168
5	- 0,52125	0,20406 - (- 0,01762) = 0,22168
6	+ 0,09759	0,22515 - 0,00347 = 0,22168
7	+ 0,38218	0,23525 - 0,01357 = 0,22168

El elemento A representa la prima que las cabezas de edad actual (30 + t) y (40 + t) deberían pagar en régimen de Capitalización colectiva al iniciar con esas edades un régimen de jubilación basado en tal técnica. Se aprecia que A es inferior a Θ_1 hasta $t = 5$, pasando a ser superior desde $t = 6$ cuando ya la reserva pasa de negativa a positiva. Es claro que si las dos cabezas se percatan de ello solicitarían la rescisión del contrato y la suscripción de uno nuevo, debiendo el asegurador soportar la pérdida de la reserva negativa existente al momento de la rescisión.

El elemento B tiene como misión llevar al elemento A hasta el nivel de la primera cotización Θ_1 . Como se aprecia, B se resta de A, y es negativo hasta $t = 5$, pasando a ser positivo desde $t = 6$.

Como se dijo más arriba, B es el resultado de dividir la reserva al final de cada año t entre la suma de las rentas temporales a las edades alcanzadas, es decir, la dilución de aquéllas entre ésta.

Este ejemplo y las consideraciones a que nos ha conducido ponen de relieve, en un caso extremo poco probable en la práctica, que el Asegurador antes de aplicar la técnica de la Capitalización colectiva a un grupo dado debe realizar un detenido estudio para evitar la aparición de reservas negativas.

Ello, por otra parte, no es precisamente un peligro especial de la Capitalización colectiva, ya que al formularse el principio actuarial de equivalencia de todo seguro se ha de tener en cuenta tal peligro a fin de eliminarlo. Así ocurre con todos los seguros de capital decreciente con el tiempo, para los que se desee una prima nivelada. Como se sabe, en tales casos hay que estudiar una duración de pago de primas inferior a la del seguro.

Pero así como en las operaciones a riesgo decreciente es necesaria la medida previa de estudiar técnicamente el pago de primas, sin lo cual surgirían las reservas negativas (de forma cierta en seguros a capital decreciente, aleatoriamente en seguros y rentas sobre varias cabezas), en la aplicación misma de la Capitalización colectiva es muy poco probable, lo cual no exime de un previo estudio demográfico.

En última instancia, si apareciera, en un momento dado de la vida de un régimen de jubilación basado en la Capitalización colectiva, una negativización de las reservas, se ha visto cómo la prima permanece invariable; el Asegurador no puede reclamar la reserva a los Asegurados, y éstos, si lo desean, pueden rescindir el contrato y solicitar de otro Asegurador la suscripción de uno más ventajoso.

Como se ve, nada de ello lesiona los intereses de los Asegurados.

En el momento inicial, viviendo, pues, las tres cabezas (30), (40) y (50), el valor probable dentro de t años de la reserva matemática viene dado por:

$$V_t = [i p_{30} \cdot 35 - t a_{30+t} + i p_{40} \cdot 25 - t a_{40+t} + i p_{50} \cdot 15 - t a_{50+t}] - \\ - \Theta \cdot [i p_{30} \cdot \overline{a}_{30+t:35-t} + i p_{40} \cdot \overline{a}_{40+t:25-t} + i p_{50} \cdot \overline{a}_{50+t:15-t}]$$

Pues bien, esta reserva matemática, propia de la capitalización colectiva, es positiva para los grupos más usuales. Para que sea negativa es preciso que haya un gran número de cabezas ya jubiladas o próximas a jubilarse.

Ahora consideramos el caso en que fallecieran las cabezas (30) y (40) en el transcurso del primer año, sobreviviendo, pues, la de edad (50). La reserva matemática para $t = 1$ será:

$$V_1 = {}^{14/}a_{51} - \Theta_1 \cdot \ddot{a}_{51:\overline{14}} = 2,63413$$

La segunda cotización valdrá, pues:

$$\Theta_2 = \frac{{}^{14/}a_{51} - V_1}{\ddot{a}_{51:\overline{14}}} = 0,47784 - 0,25616 = 0,22168$$

Se demuestra, una vez más, que el fallecimiento de Asegurados no influye en el nivel de la prima, y en este caso, con beneficio para el asegurado sobreviviente.

Conviene, finalmente, no olvidar que la técnica comentada en esta Nota no es para aplicar a tres cabezas, sino a grupos de cierta importancia. Aquí se han puesto de relieve las características de aquélla a través del análisis de un ejemplo, de fácil tratamiento.

Madrid, 14 de septiembre de 1976.