Aplicaciones financieras de la teoría determinista del control óptimo

Por el Doctor

MAXIMO BORRELL
Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
de la Universidad de Barcelona

1. INTRODUCCION

Los aspectos financieros se hallan en estrecha relación con cada una de las áreas de la firma y también con la empresa considerada como un todo. Para que el ciclo económico o de explotación funcione correctamente es menester que, además de estar resueltos los problemas de producción y comercialización, haya un equilibrio dinámico entre las necesidades de la firma y los recursos financieros de que ésta dispone o pueda disponer. El objeto de la gestión financiera es, precisamente, asegurar el citado equilibrio dinámico y, por ello, uno de los objetivos fundamentales de la misma es procurar que los ritmos de pagos y cobros se hallen sincronizados. Cuando dicha sincronización se rompe aparecen problemas: excedentes o déficit de tesorería. La gestión financiera, a través de la solución al problema de la financiación, ha de proporcionar a la firma los activos dinerarios que necesite, cuando los precise. Consecuentemente, desde un punto de vista general, la gestión financiera consiste en la aplicación de técnicas y normas tendentes al logro de los objetivos financieros marcados a niveles superiores (tasa de crecimiento, grado de endeudamiento, nivel de rentabilidad, ampliación de capital, etc.), pero conservando el equilibrio financiero.

Un segundo aspecto lo constituye la distribución del beneficio (en las sociedades anónimas, pago de dividendos), cuestión ésta que se encuentra íntimamente conectada con la independencia financiera de la empresa y con la futura expansión de ésta (1). Pero ¿qué factores influyen en la determinación del porcentaje de distribución de los beneficios? ¿Cómo se ponderan tales factores? ¿Cuáles son los mecanismos de pago de dividendos? La respuesta a estas preguntas fundamenta la política de dividendos de toda sociedad anónima. Si la sociedad cotiza en Bolsa deberá, además, valorar de modo especialmente riguroso los efectos que sobre su accionariado ejerza la política de dividendos para, si así fuera menester, modificarla dentro de ciertos parámetros.

En resumen, la política de dividendos debe integrarse en la política financiera general de la firma y ha de establecerse en función de las repercusiones que ejerza sobre el equilibrio financiero, sobre los planes referentes al futuro de la empresa y sobre la valoración que de ésta hagan los accionistas (sobre todo si las acciones son bursátiles).

Se comprende fácilmente que la dirección y el accionariado de la firma puedan tener posiciones que se hallen en colisión. A nuestro juicio, la empresa ha de seguir una política de compromiso entre sus propios intereses y los del accionariado (2) y, aunque nos parece evidente que las oscilaciones de los intereses de los accionistas (en los que influyen elementos objetivos y subjetivos) actúan sobre el valor de las acciones bursátiles, a través del mecanismo oferta-demanda en el mercado, no todos los autores aceptan tal postura.

En realidad, los puntos de vista se podrían agrupar en torno a dos tesis: la de aceptar la independencia del valor de las acciones con respecto a la política de dividendos (ese valor dependería únicamente de la capacidad de generar beneficios por parte de la empresa) y la contraria, más tradicional, que nos parece más realista porque incluye, de algún modo, elementos subjetivos que influyen poderosamente en la determinación del citado valor.

La primera tesis, definida por Miller y Modigliani (3), se basa en esencia en las hipótesis de perfección del mercado y de comportamiento racional del inversor. La segunda tesis critica por falta de realismo las anteriores hipóte-

---

(1) Un tercer y último aspecto, que se desprende de los dos anteriores, radica en el análisis y minimización de los riesgos financieros que, por su mismo funcionamiento, sufre la empresa. La elaboración de un plan financiero tiene precisamente este objeto.

(2) Sobre los tipos de política de dividendos puede verse una exposición sintética en A. S. Suárez: *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa* (Pirámide, Madrid, 1980, 3.ª edición), págs. 566-575.

La temática sobre la estructura de capital de la firma se resume de modo muy satisfactorio en E. W. Walker: *Planeamiento y control financiero* (El Ateneo, Buenos Aires, 1973), páginas 86-94.

(3) F. Modigliani-M. H. Miller: "The Cost of Capital Corporation Finance, and the Theory of Investment", *The American Economic Review*, vol. 48, 1958, págs. 261-297.

M. H. Miller-F. Modigliani: "Dividend Policy, Growth, and the Valuation of Shares", *The Journal of Business*, vol. 34, 1961, págs. 411-413.

sis, como hace Gordon (4), quien elabora un modelo que confirma la dependencia. La polémica no está todavía cerrada, porque existen puntos de vista discutibles en la argumentación de Gordon. Sin embargo, parece decantarse una corriente de opinión favorable a la tesis de dependencia entre la política de dividendos y el valor de las acciones; en este sentido se han elaborado modelos perfeccionados a partir del citado de Gordon, como el de Lerner y Carleton (5), en el que se incorpora un ratio de endeudamiento (recursos ajenos/activo total), y el de Lintner (6). Todos estos modelos (incluso también el de Miller y Modigiliani) utilizan la hipótesis de tasa de crecimiento constante, manejada originariamente por Gordon. La superación de esta hipótesis restrictiva se contempla ya desde la óptica de la teoría del control (7). Así, por ejemplo, en el modelo de Krouse (8) se desarrollan condiciones para optimizar la política de financiación bajo restricciones impuestas sobre la tasa máxima conseguible de adquisición de fondos externos. Utilizando el principio del máximo, Krouse determina los valores óptimos de la tasa de crecimiento de la firma, del ratio de endeudamiento, de los beneficios y de los costes de capital.

A pesar de sus indudables méritos, el modelo de financiación óptima de Krouse —que, al igual que el de Davis (9), permite la financiación de sus inversiones mediante beneficios retenidos, endeudamiento y capital propio en distintas proporciones, las cuales son susceptibles de variación en el tiempo— usa una hipótesis criticable: la de que el valor contable de la estructura de capital es más importante que el valor de mercado. Por ello resulta preferible la

---

(4) M. J. GORDON: *The Investment Financing and Valuation of the Corporation* (R. D. Irwin, Inc.; Homewood, Illinois, 1962).

M. J. GORDON: "The Savings, Investment and Valuation of Corporation", *Review of Economics and Statistics*, vol. 44, 1962, págs. 37-51.

Estos dos trabajos desarrollan ideas contenidas en un estudio anterior del propio GORDON: "Dividend, Earnings and Stock Prices", *Review of Economic and Statistics*, vol. 41, 1959, páginas 99-105.

Otro gran abogado de esta tesis es SOLOMON en *The Theory of Financial Management* (Columbia University Press, New York, 1963), págs. 93-98. De todos modos, hay sensibles diferencias entre las posturas de SOLOMON y GORDON.

(5) E. M. LERNER-W. T. CARLETON: "The Integration of Capital Budgeting and Stock Valuation", *The American Economic Review*, vol. 54, 1964, págs. 683-702.

E. M. LERNER-W. T. CARLETON: *A Theory of Financial Analisys* (Harcourt, Brace and World, New York, 1966).

(6) J. LINTNER: "The Cost of Capital and Optimal Financing of Corporate Growth", *The Journal of Finance*, vol. 23, págs. 292-310.

(7) El estudio de la problemática financiera desde un punto de vista dinámico se desarrolla en E. J. ELTON-M. J. GRUBER: *Finance as a Dynamic Process* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975).

(8) C. G. KROUSE: "Optimal Financing and Capital Structure Programs for the Firm", *The Journal of Finance*, vol. 27, 1972, págs. 1057-1071.

C. G. KROUSE: "On the Theory of Optimal Investment, Dividends, and Growth in the Firm", *American Economic Review*, vol. 63, 1973, págs. 269-279.

(9) E. G. DAVIS: "Investment and Rate of Return for the Regulated Firm", *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 1, 1970, págs. 245-270.

formulación de Krouse-Lee (10), en la que se admite que existe una cota superior para la tasa de crecimiento de los activos, que posee carácter exógeno. En su modelo inicial, Krouse demostró (11) que el problema dual es aquel que minimiza un coste sombra de capital *(shadow cost-of-capital)*, adecuadamente ponderado.

Evidentemente, la determinación de la política óptima de dividendos implica la presencia de dos problemas de decisión: 1) cuánto invertir y cuánto destinar al pago de dividendos, cuestión estudiada tradicionalmente en ambiente de certidumbre bajo el marco teórico diseñado por Fisher (12), y 2) cómo distribuir la inversión entre distintos tipos de activos financieros, como dinero líquido, acciones, obligaciones, etc.

Este último problema, al que la literatura suele referirse con la denominación *teoría de la cartera*, ha sido profusamente investigado, en general en ambiente de riesgo, siguiendo las pautas de Markowitz (13) y de Sharpe (14).

La combinación de los dos problemas, optimizar el plan de asignación inversión-pago de dividendos y seleccionar la mejor cartera posible, ha recibido también atención; una excelente muestra de ello son los trabajos de Sandmo (15) y de Merton (16).

Dada nuestra limitación a modelos deterministas (17), del segundo tipo de problema sólo analizaremos un modelo a corto plazo, el del saldo óptimo de tesorería, *cash balance problem* —que se ha venido tratando tradicionalmente como un problema de inventarios (18)—, basado en un estudio de Sethi y Thompson (19).

---

(10) C. G. Krouse-W. Y. Lee: "Optimal Equity Financing of the Corporation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 8, 1973, págs. 539-563.

(11) C. G. Krouse: *Op. cit.* (1972), págs. 1066-1067.

(12) I. Fisher *The Theory of Interest* (MacMillan Press, London, 1930).

(13) H. M. Markowitz: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment* (John Wiley & Sons, New York, 1959).

(14) W. F. Sharpe: "A simplified Model for Portfolio Analysis", *Management Science*, volumen 9, 1963, págs. 277-293.

(15) A. Sandmo: "Capital Risk, Consumption and Portfolio Choice", *Econometrica*, volumen 37, 1969, págs. 586-599.

(16) R. C. Merton: "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continous-Time Model", *Journal of Economic Theory*, vol. 3, 1971, págs. 373-412.

(17) Por su propia naturaleza, la problemática financiera se mueve casi siempre en ambiente no determinista, de ahí que sus instrumentos esenciales deban ser la teoría estocástica y la teoría borrosa del control óptimo. Para la primera véanse, por ejemplo:

W. T. Ziemba-R. G. Vickson (eds.): *Stochastic Optimization Models in Finance* (Academic Press, New York, 1976).

D. P. Bertsekas: "Necesary and Sufficient Conditions for Existence of an Optimal Portfolio", *Journal of Economic Theory*, vol. 8, 1974, págs. 235-247.

A. Bensoussan: "Applications of Stochastic Control in Finance: The Problem of Asset Prices", *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 1, 1983, n. 1.

(18) *Vid.*, por ejemplo, W. J. Baumol: "The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 76, 1962, págs. 545-556.

Para una crítica del enfoque, *vid.* V. Srinivasan: "A Transhipment Model for Cash Management Decisions", *Management Science*, vol. 20, 1974, págs. 1350-1363.

(19) S. P. Sethi-G. L. Thompson: "Applications of Mathematical Control Theory to Finance", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 5, 1970, págs. 381-394.

2. MODELOS DE FINANCIACION OPTIMA

Además del modelo de Krouse-Lee, ya mencionado con anterioridad, veremos otro que difiere de éste en el sentido de que opera sobre una firma sujeta a regulación, es decir, una firma para la que se determina una cierta tasa de retorno —generalmente mayor que el coste de capital (20)—, que sirve de base para la determinación de los beneficios alcanzables (21). Se ignora la posible presencia de retardos *(lags)*, esto es, se admite que la tasa de retorno regulatoria, R, se alcanza en cada instante (22), o sea, que

$$R=\frac{B(t)}{M(t)+V(t)} \Rightarrow B(t)=R\cdot(M+V) \qquad [1]$$

donde $B(t)$ representan los beneficios totales de la firma en t, netos de depreciación económica, después de impuestos y antes del pago de intereses; $M(t)$ es el valor de mercado en t de los títulos en circulación, y $V(t)$ es el valor contable en t de los títulos. La relación [1] indica que los beneficios reales después de impuestos y antes del pago de intereses conseguidos por las nuevas inversiones son independientes del modo de financiación de estas inversiones —ésta es la característica principal de la firma sujeta a regulación (23).

---

(20) El coste de capital se define como la tasa de retorno que toda inversión debe de proporcionar para que se conserve el valor de mercado de las acciones de la firma, es decir, el coste de capital es la cota inferior de rentabilidad y, por ello, se denomina también tasa de retorno requerida (*vid.*, por ejemplo, A. S. SUÁREZ: *Op. cit.* (1980), págs. 497-498, y J. RIVERO: *Contabilidad de sociedades*, ICE, Madrid, 1976, pág. 381). La cuestión está sujeta a grandes controversias, algunas de las cuales atacan la indebida utilización de la tasa de retorno (o tasa interna de rendimiento, TIR). La descalificación de la TIR como instrumento de medida de rentabilidad de las inversiones se desarrolla en A. M. RODRÍGUEZ: *Matemática de la inversión (Matemática financiera II)*, Barcelona, 1983, págs. 41-51.

(21) *Vid.* S. MYERS: "A Simple Model of Firm Behavior Under Regulation and Uncertainty", *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, 1973, págs. 304-316.

(22) *Vid.* J. ELTON-M. J. GRUBER-Z. LIEBER: "Valuation, Optimum Investment and Financing for the Firm Subject to Regulation", *The Journal of Finance*, vol. 30, 1975, págs. 401-425.

(23) La teoría de la firma sujeta a regulación (o firma regulada) ha sido extensamente tratada aunque, en general, para la gestión correspondiente a un único período; *vid.*, por ejemplo, W. J. BAUMOL-A. KLEVORIK "Input Choices and Rate of Return Regulation: An Overview of the Discussion", *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 1, 1970, páginas 544-568. Para un estudio económico del tema, *vid.*, por ejemplo, E. G. DAVIS: *Op. cit.* (1970), págs. 245-270, y B. E. DAVIS-D. J. ELZINGER: "The Solution of an Optimal Control Problem in Financial Modeling", *Operations Research*, vol. 19, 1972, págs. 1419-1433.

Menos atención ha merecido el diseño de un modelo óptimo globalizador de las políticas óptimas de financiación e inversión, que simultáneamente maximicen el valor de la firma regulada. Dos notables excepciones las constituyen los ya citados trabajos de DAVIS (1970) y de ELTON-GRUBER-LIEBER (1975); este último analiza, además, las dependencias intemporales del comportamiento óptimo de la firma.

2.1 Modelo de Krouse-Lee (24)

A) *Hipótesis*

1. Modelo continuo.

2. Período de planeamiento finito (25), $[0, T]$.

3. Las únicas fuentes de financiación de la firma son los beneficios retenidos y la captación de nuevos accionistas.

4. La proporción entre las dos fuentes de financiación no está sujeta a restricción alguna.

5. La tasa de descuento del mercado es constante.

6. La tasa de retorno de la firma sobre el capital invertido es constante y se supone mayor que la tasa de descuento del mercado.

7. Existe una cota superior (de carácter exógeno) sobre la tasa de crecimiento de los activos que la empresa puede conseguir.

8. El coste de la venta de acciones es constante y se expresa como fracción del valor del título.

9. La firma desea maximizar el valor actual neto de la corriente de dividendos futuros.

10. Se satisfacen todas cuantas hipótesis adicionales requiera la aplicación del principio del máximo.

B) *Variables del modelo y su notación*

$x(t)$ = Tasa de beneficios en t, expresada en u. m.
$u_1(t)$ = Financiación en t por nuevos accionistas; $u_1(t) \geq 0$.
$u_2(t)$ = Fracción retenida de los beneficios en t; $0 \leq u_2(t) \leq 1$.
k = Complemento a 1 de la fracción que expresa el coste de la venta de acciones; $0 \leq k \leq 1$.
r = Tasa de descuento del mercado.
R = Tasa de retorno sobre el capital invertido; $R > r$.
K = Cota superior de la tasa de crecimiento de los activos.

(24) C. G. Krouse-W. Y. Lee: *Op. cit.*, págs. 539-563. El modelo original presentaba algunos errores y limitaciones, que fueron puestos de manifiesto por Sethi en "Optimal Equity Financing Model of Krouse and Lee: Corrections and Extensions", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 13, 1978, págs. 487-505.

(25) La extensión a período de planeamiento infinito puede verse en el artículo de Sethi citado en la llamada anterior y en S. P. Sethi-G. L. Thompson: *Optimal Control Theory. Applications to Management Science* (Montinus Nijhoff Publishing, La Haya, 1981), páginas 134-139. (Los autores del modelo actuaron también sobre período infinito, pero incurrieron en inexactitudes. Por ello, la importancia del trabajo de Krouse y Lee radica más en la construcción del modelo que en la técnica resolutoria que emplean.)

C) *Relaciones entre las variables del modelo*

De todo lo indicado en A) y B) puede escribirse fácilmente la ecuación de estado:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(t)=R\cdot[k\cdot u_1(t)+u_2(t)]\cdot x(t) \\ x(0)=x_0 \end{array}\right\} \qquad [2]$$

La consideración simultánea de las sexta y séptima hipótesis implica que la tasa de crecimiento relativo de los beneficios se halla acotado por K, es decir:

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\leq K \qquad [3]$$

De [2] y [3] se deduce que

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}=R\cdot[k\cdot u_1(t)+u_2(t)]\leq K \qquad [4]$$

Para la obtención del funcional objetivo deberemos detraer del valor actual total de los dividendos de la firma el valor actual de las inversiones externas, esto es:

$$F=\int_0^T e^{-rt}\cdot[1-u_2(t)]\cdot x(t)\cdot dt-\int_0^T e^{-rt}\cdot u_1(t)\cdot x(t)\cdot dt$$

por tanto,

$$F=\int_0^T e^{-rt}\cdot[1-u_1(t)-u_2(t)]\cdot x(t)\cdot dt \qquad [5]$$

En lo que respecta a las restricciones de las variables de control, además de [4], se tiene $u_1(t)\geq 0$ y $0\leq u_2(t)\leq 1$.

D) *Formulación del modelo*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Máx } F=\int_0^T e^{-rt}\cdot(1-u_1-u_2)\cdot x\cdot dt \\ \text{sujeto a: } \dot{x}=R\cdot(ku_1+u_2)\cdot x \\ \qquad x(0)=x_0 \\ \qquad ku_1+u_2\leq\dfrac{K}{R} \\ \qquad u_1(t)\geq 0 \\ \qquad u_2(t)\in[0;\ 1] \end{array}\right\} \qquad [6]$$

E) *Solución analítica*

La aplicación del principio ordinario del máximo y el empleo de la técnica de valores actuales nos lleva a escribir las expresiones de los valores actuales de la hamiltoniana, de la variable de coestado y de la condición de transversalidad:

$$H = -(1-u_1-u_2)\cdot x + \lambda \cdot R \cdot (ku_1+u_2)\cdot x$$

$$\dot{\gamma} = r\cdot\gamma + (1-u_1-u_2) - \gamma\cdot R\cdot(ku_1+u_2)$$

$$\gamma(T)=0$$

La interpretación económica de $\gamma=\gamma(t)$ nos dice que esta variable de coestado es el valor marginal en t de un cambio unitario de los beneficios; así, $r\cdot\gamma$ representa el valor marginal en t de una *inversión unitaria*. Además, la expresión $(ku_1+u_2)\cdot x$ es la inversión incremental en t y, por tanto, el producto $\gamma\cdot R\cdot(ku_1+u_2)\cdot x$ es el valor de la inversión incremental para los accionistas, en términos de los dividendos anticipados.

Para formular la optimización de las políticas escribamos el valor actual de la hamiltoniana del siguiente modo:

$$H = [1 + (1+\gamma kR)\cdot u_1 + (1+\gamma R)\cdot u_2]\cdot x$$

Si hacemos

$$1+\gamma kR = A_1 \quad \text{y} \quad 1+\gamma R = A_2$$

tendremos la expresión

$$H = (1 + A_1u_1 + A_2u_2)\cdot x \qquad [7]$$

La minimización de H respecto a u_1, u_2 que exige el principio del máximo nos conduce al siguiente problema de optimización:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Mín } (A_1u_1+A_2u_2) \\ \text{sujeto a: } ku_1+u_2 \leq K/R \\ u_1 \geq 0 \\ u_2 \in [0;\ 1] \end{array}\right\} \qquad [8]$$

que es un problema de programación lineal, cuya resolución detallada puede verse en Sethi-Thompson (26), llevándonos al establecimiento de una política óptima que es una combinación de dos políticas bang-bang y sus correspondientes controles singulares, como podía esperarse por la circunstancia de tener la hamiltoniana carácter lineal respecto a cada una de las variables de control.

(26) S. P. SETHI-G. L. THOMPSON: *Op. cit.* (1981), págs. 119-134.

2.2 Modelo de Davis (27)

A) *Hipótesis*

1. Modelo continuo.

2. Período de planeamiento finito, $[0, T]$.

3. Se trata de una firma sujeta a regulación.

4. No hay retardos regulatorios.

5. La tasa de retorno de capital se halla acotada superiormente.

6. Al comienzo de la gestión, la tasa de retorno está situada en su cota superior.

7. La tasa de crecimiento de la firma está acotada superiormente. La acotación de la tasa de crecimiento posee carácter exógeno (28).

8. El ratio de endeudamiento es constante.

9. El objetivo de la firma es maximizar el valor actual de las acciones.

10. El coste de emisión de nuevas acciones es constante.

11. La tasa de descuento es constante.

12. Se acepta la postura de Miller-Modigliani, suponiéndose que la renta de la cartera es una fracción constante (29) de la renta disponible por el accionariado —principio de valoración (30) de Miller-Modigliani.

13. Se satisfacen todas cuantas hipótesis requiera la aplicación del principio máximo.

---

(27) E. G. Davis: *Op. cit.* (1970), págs. 245-270.

(28) Esta hipótesis es menos realista que la que asocia un coste que aumenta adaptativamente con la tasa de crecimiento de la firma (de un modo semejante a la idea de Treadway con su mecanismo de ajuste de costes; *vid.* A. B. Treadway: "Adjustment Cost and Variable Inputs in the Theory of the Competitive Firm", *Journal of Economic Theory*, vol. 2, 1970, páginas 329-347). Por ello Davis trató posteriormente la cuestión en "A Dynamic Model of the Regulated Firm with a Price Adjustment Mechanism", *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, 1973, págs. 270-283.

(29) Para una descripción del papel que desempeña esta constante en la tesis de Miller-Modigliani, *vid.*, por ejemplo, A. S. Suárez: *Op. cit.* (1980), págs. 535-541, además, naturalmente, de M. H. Miller-F. Modigliani: *Op. cit.* (1961), págs. 411-433.

(30) Este principio establece, como una de sus consecuencias, que k puede considerarse como una medida de la respuesta del mercado hacia el equilibrio.

B) *Variables del modelo y su notación*

$x_1(t)$ = Precio de mercado por acción en t.
$x_2(t)$ = Valor contable por acción en t.
$u_1(t)$ = Fracción de beneficios retenidos en t, en relación con el beneficio total del período; $0 \leq u_1(t) \leq 1$.
$u_2(t)$ = Tasa de financiación de las acciones *(Stock financing rate)* en t, expresada como una fracción del beneficio del período; $0 \leq u_2(t) \leq 1$.
R = Cota superior de la tasa de retorno.
K = Cota superior de la tasa de crecimiento de la firma.
a = Coste por acción de la puesta en circulación de nuevos títulos.
$b = 1 - a$.
k = Fracción entre la renta proporcionada por la cartera de la firma y la renta disponible por parte de los accionistas.

C) *Relaciones entre las variables del modelo*

La aceptación de la tesis de Modigliani-Miller nos lleva fácilmente al planteamiento de las ecuaciones dinámicas:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= k \cdot \Big[R \cdot [1 - u_1(t)] \cdot x_2(t) - r \cdot x_1\Big] \\ x_1(0) &= x_{10} \end{aligned}\right\} \quad [9]$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= R \cdot \left(u_1(t) + \left[1 - \frac{x_2(t)}{(1-a)\,x_1(t)}\right] \cdot u_2(t)\right) \cdot x_2(t) \\ x_2(0) &= x_{20} \end{aligned}\right\} \quad [10]$$

La consideración simultánea de las hipótesis números 6 y 8 nos permite escribir que

$$u_1(t) + u_2(t) \leq \frac{K}{R} \quad [11]$$

El funcional objetivo se determinará mediante la adición entre

$$e^{-r \cdot T} \cdot x_1(T) \quad \text{y} \quad \int_0^T e^{-rt} \cdot [1 - u_1(t)] \cdot R \cdot x_2(t) \cdot dt$$

es decir,

$$F = e^{-r \cdot T} \cdot x_1(T) + \int_0^T e^{-rt} \cdot [1 - u_1(t)] \cdot R \cdot x_2(t) \cdot dt \quad [12]$$

Estamos ya en condiciones de plantear el problema de control correspondiente.

D) *Formulación del modelo*

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Máx } F=e^{-r\cdot T}\cdot x_1(T)+\int_0^T e^{-rt}\cdot(1-u_1)\cdot Rx_2\cdot dt\\
&\text{sujeto a: } \dot{x}_1=k\cdot[R\cdot(1-u)\cdot x_2-r\cdot x_1]\\
&\qquad x_1(0)=x_{10}\\
&\qquad \dot{x}_2=[R\cdot u_1+(1-\frac{x_2}{bx_1})u_2]x_2\\
&\qquad x_2(0)=x_{20}\\
&\qquad u_1+u_2\leq\frac{K}{R}\\
&\qquad u_1\in[0;\ 1]\\
&\qquad u_2\in[0;\ 1]
\end{aligned}\right\} \quad [13]$$

E) *Solución analítica*

Como vemos, [13] constituye un problema de control con dos variables de estado (no restringidas) y dos variables de control, cuya solución queda totalmente tipificada en el principio ordinario del máximo. Este principio nos lleva a la formulación de las políticas óptimas que, sin otras dificultades que las de laboriosidad, se demuestras son del tipo bang-bang, con un control singular únicamente para el caso en que

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{b}=b' \qquad [14]$$

El control singular puede alcanzarse únicamente desde algunas situaciones, como demuestran Davis (31) y Davis-Elzinger (32). La discusión se centra en torno a los posibles valores de ratio R/r en relación con b', es decir, según que este ratio sea menor, igual o mayor que b'. La técnica resolutoria permite concluir que para

$$\frac{R}{r}\leq b'$$

la trayectoria óptima del ratio x_1/x_2 tiende precisamente a R/r, con un número máximo de *switches* igual a tres (el número depende de la situación inicial). Y para

$$\frac{R}{r}>b'$$

(31) E. G. Davis: *Op. cit.* (1970), págs. 245-270.
(32) B. E. Davis-D. J. Elzinger: *Op. cit.* (1972), págs. 1419-1433.

la trayectoria óptima de x_1/x_2 tiende a

$$\frac{k \cdot R + K \cdot b'}{kr + K}$$

presentándose un número de *switches* no superior a cuatro (también según la situación inicial).

Así, pues, desde la posición inicial, situada sobre una cierta superficie (en general, hipersuperficie) caben distintas soluciones óptimas (33).

3. MODELOS DEL SALDO OPTIMO DE TESORERIA

3.1 Planteamiento de la cuestión

Toda empresa tiene planteada la problemática de la gestión de fondos, ya que, independientemente de su tamaño, actividades y localización, se ve en la necesidad de mantener fondos en efectivo debido a motivos transaccionales, precautorios y especulativos, como enseña la teoría económica keynesiana (34).

La firma requiere fondos en efectivo con fines de transacción con objeto de hacer frente a las necesidades corrientes (y, por ello, normalmente previsibles) derivadas de su actividad normal. El nivel del saldo transaccional depende fundamentalmente de cuatro factores: el grado de aversión al riesgo por parte de la firma, el estado de sus cuentas pendientes de cobro, la situación de sus cuentas de *stocks* en relación con las características de la demanda para estos activos y la capacidad de la empresa para conseguir crédito.

Aunque la firma conoce previamente la mayor parte de los elementos del *inflow* y del *outflow*, una porción de ellos resulta desconocida, poseyendo carácter aleatorio. Estos, junto con otras necesidades atípicas, se cubren mediante la apertura de líneas de crédito adecuadas y saldos precautorios de caja. Obviamente, el saldo de precaución se halla estrechamente ligado a la capacidad de asunción de riesgo que posee la empresa, es decir, si una firma presenta una fuerte aversión al riesgo, su saldo precautorio de caja será superior a otra con menor aversión al riesgo. Para reducir el drenaje de la rentabilidad que supone la posesión de tales saldos, lo habitual es invertir en títulos a corto plazo.

---

(33) A tales superficies Isaacs las denomina *dispersal surfaces: vid.* R. Isaacs: *Differential Games* (John Wiley & Sons, New York, 1965, págs. 116-127).

(34) J. M. Keynes: *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero* (Fondo de Cultura Económica, México, D. F.), págs. 150-157 y 175-187.

Los saldos especulativos pretenden aprovechar oportunidades ventajosas de colocación de dinero (por ejemplo, inversiones en *stocks* previendo una subida de precios). A pesar de que puedan darse situaciones que justifiquen lo contrario, en principio no es recomendable para la firma especular con fondos en efectivo.

El más importante de estos tres tipos de saldos es el transaccional, como indican Weston y Brigham (35), ya que, en general, los motivos precautorio y especulativo se cubren negociando títulos o incurriendo en endeudamiento.

Un medio adecuado para determinar los niveles de las cuentas de tesorería consiste en la elaboración del presupuesto de caja (36). La gestión presupuestaria de tesorería: *a)* señalará las puntas de tesorería (los déficit, que afectan a la capacidad crediticia, y los excesos, que disminuyen los rendimientos de las inversiones y afecta negativamente al coste de capital); *b)* indicará el instante más conveniente para iniciar procesos de financiación, y *c)* permitirá evitar la existencia de fondos ociosos. Razones, todas ellas, suficientes para sofisticar y perfeccionar los modelos de obtención de políticas óptimas de tesorería.

Como se ha dicho, una gran mayoría de los modelos de gestión de tesorería se han inspirado en los de inventarios (37), como el ya mencionado de Baumol (38) y el de Tobin (39), ambos deterministas, o los de Miller-Orr (40), Beranek (41), Eppen-Fama (42) y Daellenbach (43), de carácter estocástico. A nosotros nos interesa desarrollar el problema en términos de la teoría determinista del control óptimo, cuestión que fue investigada por Sethi y Thompson.

---

(35) J. F. WESTON-E. F. BRIGHAM: *Finanzas en administración* (Interamericana, México, D. F., 1977), pág. 136.

(36) Este procedimiento es preferible al de basarse únicamente en experiencias de períodos anteriores o al uso de balances *pro-forma.*

(37) Un enfoque distinto (aparte del que ofrece la teoría del control óptimo) puede encontrarse en S. H. ARCHER: "A Model for the Determination of Firm Cash Balances", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* vol. 1, 1966, págs. 1-10. (Se trata de un modelo estocástico.)

(38) W. J. BAUMOL: *Op. cit.* (1962), págs. 545-556.

(39) J. TOBIN: "The Interest-Elasticity of Transactions' Demand for Cash", *The Review of Economics and Statistics,* vol. 38, 1956, págs. 241-247.

(40) M. H. MILLER-D. ORR: "A Model for the Demand for Money by Firms", *Quarterly Journal of Economics,* vol. 80, 1966, págs. 414-435.

(41) W. BERANEK: *Analysis for Financial Decision* (R. D. Irwin, Homewood, Illinois, 1963), págs. 345-387.

(42) G. D. EPPEN-E. F. FAMA: "Solutions for Cash Balance and Simple Dynamic Portfolio Problem", *Journal of Business,* vol. 41, 1968, págs. 94-112.

G. D. EPPEN-E. F. FAMA: "Cash Balance and Simple Portfolio Problems with Proportional Costs", *International Economic Review,* vol. 10, 1969, págs. 119-133.

G. D. EPPEN-E. F. FAMA: "Three Asset Cash Balance and Dynamic Portfolio Problems", *Management Science,* vol. 17, 1971, págs. 311-319.

(43) H. G. DAELLENBACH: "A Stochastic Cash Balance Model with two Sources of Short-Term Funds", *International Economic Review,* vol. 12, 1971, págs. 250-256.

3.2 MODELO DE SETHI-THOMPSON (44) SIN RESTRICCIONES EN LAS VARIABLES DE ESTADO

A) *Hipótesis*

1. Modelo unificado (45), es decir, con formulación unificada.

2. Período de planeamiento finito [0, *T*].

3. Se consideran únicamente dos tipos de activos financieros: tesorería y títulos-valor (46).

4. El valor de la compra/venta de títulos está acotado y la cota es la misma, en valor absoluto, para las compras que para las ventas.

5. En el caso discreto se consideran períodos de igual duración.

6. Toda compra/venta tiene lugar al final de un período (en el caso discreto).

7. Se permiten saldos deudores de tesorería, así como ventas en descubierto de títulos (suponiéndose que los tipos de interés que generan varían en el tiempo y no influye en ellos la naturaleza deudora o acreedora del saldo).

8. El coeficiente de coste asociado a cada transacción de títulos (coste por u. m. de transacción, integrado por la comisión y otros posibles costes asociados) es constante.

9. La firma desea maximizar el valor final de sus actividades, siendo capaz en cada instante o período (según se trate de ambiente continuo o discreto, respectivamente) de hacer frente a la demanda de tesorería.

10. No existen dividendos pendientes de pago (47).

11. La firma conoce su función de demanda de tesorería.

12. Se satisfacen todas cuantas hipótesis adicionales requiera la aplicación del principio del máximo.

---

(44) S. P. SETHI-G. L. THOMPSON: *Op. cit.* (1970), págs. 381-394.

(45) SETHI y THOMPSON analizan el caso continuo. Este caso se trata también en A. BIAYNA: "Modelo de control óptimo del saldo de tesorería", *Cuadernos de Economía* (pendiente de publicación).

(46) Y. IJIRI-G. L. THOMPSON, en "Applications of Mathematical Control Theory to Accounting and Budgeting (The Continuous Wheat Trading Model)", *The Accounting Review*, volumen 45, 1970, págs. 246-258, y en "Mathematical Control Theory Solution of an Interactive Accounting Flows Model", *Naval Research Logistic Quarterly*, vol. 19, 1972, págs. 411-422, resuelven un problema semejante al que estamos describiendo en el cual los activos son tesorería y trigo en lugar de tesorería y títulos.

(47) Para una extensión del modelo, eliminando esta hipótesis, *vid. A. BENSOUSSAN-E. G.* HURST-B. NÄSLUND: *Management Applications of Modern Control Theory* (North-Holland, New York, 1974), págs. 117-119 (la extensión se realiza únicamente para el caso continuo).

B) *Variables del modelo y su notación*

t = Número de orden del período (caso discreto) o instante temporal (caso continuo).
$x_1(t)$ = Saldo de tesorería en t.
$x_2(t)$ = Saldo de títulos (en u. m.) en t.
$r_1(t)$ = Tipo de interés que generan los saldos de tesorería.
$r_2(t)$ = Tipo de interés que generan los saldos de títulos.
$D(t)$ = Tasa de demanda de tesorería en t (48).
$u(t)$ = Compra ($u<0$) o venta ($u>0$) de títulos en t, expresada en u. m.
a = Coeficiente que expresa la comisión y otros costes asociados a la transacción.
M = Valor absoluto de la cota que limita la cuantía monetaria de las compras o ventas de títulos.

C) *Relaciones entre las variables del modelo*

Para la primera variable de estado se comprende fácilmente que para hallar su tasa de cambio con respecto a t deberá detraerse a la suma $r_1(t) \cdot x_1(t) + u(t)$ la tasa de demanda de tesorería y el precio pagado por la comisión, así como otros costes derivados de la transacción; por tanto,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta_v x_1(t)}{\delta_v t} = r_1(t) \cdot x_1(t) - D(t) + u(t) - a \cdot |u(t)| \\ &x_1(0) = x_{10} \end{aligned}\right\} \qquad [16]$$

(δ_v = operador que representa el de diferencial, en caso de continuidad, y el de diferencia finita, en caso discreto).

En cuanto a la segunda variable de estado, es evidente que su tasa de cambio con respecto a t se obtendrá deduciendo el valor de la compra/venta de títulos del producto $r_2(t) \cdot x_2(t)$; en consecuencia,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta_v x_2(t)}{\delta_v t} = r_2(t) \cdot x_2(t) - u(t) \\ &x_2(0) = x_{20} \end{aligned}\right\} \qquad [17]$$

La cuarta hipótesis nos permite escribir la restricción sobre la variable de control:

$$|u(t)| \leq M$$

(48) SETHI y THOMPSON extendieron el resultado al caso en que $r_1(t)$, $r_2(t)$, $D(t)$ fueran variables aleatorias independientes entre sí.

En cuanto al funcional, su expresión matemática es:

$$F = x_1(T) + x_2(T)$$

que se desprende de inmediato de la consideración simultánea de las hipótesis números 2, 3 y 9.

D) *Formulación del modelo*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Máx } F = x(T) + x(T) \\ \text{sujeta a: [16]} \\ \qquad\quad [17] \\ \qquad\quad |u(t)| \le M \end{array}\right\} \qquad [18]$$

E) *Solución analítica*

Nos hallamos ante un problema de Mayer, que resolveremos directamente (es decir, *sin transformarlo en un problema de Lagrange*).

La función hamiltoniana unificada será:

$$H = \lambda_1 \cdot \frac{\delta_v x_1}{\delta_v t} + \lambda_2 \cdot \frac{\delta_v x_2}{\delta_v t}$$

expresión en la que sustituir las relaciones [16] y [17] nos lleva a

$$H = \lambda_1 \cdot (r_1 x_1 - D + u - a \cdot |u|) + \lambda_2 \cdot (r_2 x_2 - u) \qquad [19]$$

Las ecuaciones relativas a las variables de coestado adoptan para el problena de Mayer, como es fácilmente deducible, la *misma forma general* que para el de Lagrange, mientras que las condiciones de transversalidad se convierten en

$$\lambda_i(T) = \frac{\partial g[x_i(T)]}{\partial x_i}$$

Por tanto, en nuestro caso concreto podrá escribirse:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\delta_v \lambda_1}{\lambda_v t} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_1 r_1 & \lambda_1(T) = 1 \\ \dfrac{\delta_v \lambda_2}{\lambda_v t} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_2 r_2 & \lambda_2(T) = 1 \end{array}\right\} \qquad [20]$$

La resolución de las ecuaciones [20], utilizando la técnica apropiada a cada caso, proporciona los resultados siguientes:

$$\lambda_i(t) = \begin{cases} \prod_{j=t}^{T} [1 + r_i(j)] & \text{(caso discreto)} \\ & i = 1,2 \\ e^{\int_t^T r_i(\tau)\, d\tau} & \text{(caso continuo)} \end{cases} \qquad [21]$$

para lo que se ha tenido en cuenta que $r_1(T) = r_2(T) = 0$.

La interpretación de las relaciones [21] es sencilla: constituyen la expresión del factor financiero (49) correspondiente a un régimen financiero compuesto, a tanto variable. Por consiguiente, $\lambda_1(t)$ es el valor que en un instante futuro T alcanzará 1 u. m. colocada en una cuenta de tesorería desde t hasta T, y, de modo análogo, $\lambda_2(t)$ es el valor que en un instante futuro T alcanzará 1 u. m. de títulos colocada en una "cuenta de títulos" desde t hasta T.

Para la obtención de la política óptima deberemos, como se sabe, optimizar H respecto a u, pero la presencia del valor absoluto de $u, |u|$, requiere efectuar una transformación en [19] escribiendo $u(t)$ como diferencia de dos variables no negativas:

$$u(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

de modo que $u(t) = u_1(t)$ cuando $u_1 > 0$, y $u(t) = u_2(t)$ cuando $u_2 < 0$, satisfaciéndose además que $u_1 \cdot u_2 = 0$. De ello se sigue que

$$|u(t)| = u_1(t) + u_2(t)$$

con lo que [19] se convierte en:

$$H = u_i[(1-a)\cdot\lambda_1 - \lambda_2] - u_2[(1+a)\lambda_1 - \lambda_2] + \lambda_1 r_1 x_1 - \lambda_1 D + \lambda_2 r_2 x_2$$

La linealidad de H respecto a u_1, u_2 nos lleva a una solución óptima del tipo bang-bang:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} +M \ldots \text{ si } (1-a)\,\lambda_1 > \lambda_2 \\ 0 \ldots \text{ si } (1-a)\,\lambda_1 < \lambda_2 \end{cases}$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} 0 \ldots \text{ si } (1+a)\,\lambda_1 > \lambda_2 \\ -M \ldots \text{ si } (1+a)\,\lambda_1 < \lambda_2 \end{cases}$$

(49) Para la definición de este concepto vid., desde construcciones matemáticas distintas, A. M. RODRÍGUEZ: *Matemática de la financiación* (Ediciones de la Universidad de Barcelona, 1974), págs. 60, 75-84, y L. GIL PELÁEZ: *Matemática de las operaciones financieras* (Madrid, 1982), págs. 40, 64-69.

con controles singulares para

$$(1-a)\,\lambda_1=\lambda_2 \quad \text{y} \quad (1+a)\,\lambda_1=\lambda_2$$

En consecuencia, la política óptima, $u^*(t)$, es:

$$u^*(t)=u_1^*(t)-u_2^*(t)$$

O sea, la política óptima $u_1^*(t)$ exige: 1) vender títulos a la tasa máxima permitida en caso de que la diferencia entre el valor futuro de 1 u. m. y el valor futuro de $(1-a)$ u. m. —la comisión y otros gastos de transacción— sea superior al valor futuro de 1 u. m. de títulos, y 2) no vender en caso contrario (la igualdad no determina política óptima). De un modo análogo, $u^*(t)$ exige: 1) comprar títulos si la suma entre el valor futuro de 1 u. m. y la comisión, junto con otros gastos de transacción, es menor que el valor futuro de 1 u. m. de títulos, y 2) no comprar en caso contrario, asimismo, sin política óptima en caso de igualdad.

Representadas gráficamente las políticas óptimas en un diagrama (λ_1, λ_2) y situándonos en el cuadrante positivo, éste se subdivide entres ángulos:

1. Angulo formado por las rectas $\lambda_2=0$ y $(1-a)\,\lambda_1=\lambda_2$. En él la política óptima consiste en la venta de títulos al mayor ritmo permitido.

2. Angulo formado por las rectas $(1\pm a)\,\lambda_1=\lambda_2$. En él la política óptima consiste en conservar la proporción entre los dos tipos de activos (conservación de la cartera).

3. Angulo formado por las rectas $(1+a)\,\lambda_1=\lambda_2$ y $\lambda_1=0$. En él la política óptima consiste en la compra de títulos a la máxima tasa permitida.

3.3 Modelo de Sethi-Thompson con restricciones en las variables

El modelo de Sethi-Thompson que acabamos de considerar puede acercarse más a la realidad imponiendo restricciones de no negatividad sobre las variables de estado x_1, x_2, es decir, impidiendo la existencia de saldos negativos de tesorería y la venta en descubierto de títulos.

La formulación del modelo es idéntica a la [18], pero con la adición de las restricciones

$$x_1(t)\geq 0 \qquad i=1,2$$

Con ello, la resolución deberá adoptar las pautas señaladas por el principio restringido del máximo; sin embargo, la obtención de la política óptima requiere por lo general el uso de la computadora, por lo que se escapa del marco del presente trabajo.

(50) *Vid.* S. P. Sethi: "A Note on Modeling Simple Dynamic Cash Balance Probleme", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 6, 1971, págs. 685-687, y S. P. Sethi-G. L. Thompson: *Op. cit.* (1981), págs. 110-115.

4. CONCLUSIONES

1. En la clásica discusión acerca de la política de dividendos, todos los modelos clásicos, desde el de Gordon y el de Miller y Modigliani, se basan en la hipótesis de tasa de crecimiento constante. La superación de esta hipótesis tan limitativa se ha producido gracias al enfoque proporcionado por la teoría del control óptimo.

2. La determinación de una política de dividendos óptima implica la existencia de dos grandes categorías de decisiones, cuales son: *a)* cuánto invertir y cuánto destinar al pago de dividendos, y *b)* cómo distribuir la inversión entre distintos tipos de activos financieros (teoría de la cartera). Por ello, la óptica que ofrece la teoría del control óptimo influye poderosamente sobre la teoría de la cartera, con lo que sin abandonar las ideas de Markowitz y Sharpe, pero "dinamizándolas", se abre un amplio campo investigador mediante la utilización de las teorías estocástica y borrosa del control óptimo.

3. Precisamente porque por su propia naturaleza los fenómenos financieros no se producen en ambiente de certidumbre, la teoría determinista del control óptimo ha sido útil, casi exclusivamente, para mostrar las ventajas de la optimización dinámica en ese campo y abrir la cuestión a la acción de los modelos no deterministas.

4. Una excepción a lo que acaba de decirse lo constituye el denominado problema del saldo óptimo de tesorería, para el que la teoría determinista del control óptimo resulta especialmente apropiada por la razón de que la empresa conoce, en general, la mayor parte de los elementos del *inflow* y del *outflow* para un determinado horizonte temporal.

5. El problema que acaba de citarse ha sido atacado y resuelto satisfactoriamente, superando los tradicionales resultados que ofrecía el enfoque de la teoría de inventarios y señalando una política óptima que depende de la diferencia entre el valor futuro de una unidad monetaria y el valor de la comisión y otros gastos de transacción. Este problema admite solución analítica cuando no se imponen restricciones a los saldos de tesorería ni a la venta de títulos, pero ya no existe, debiendo recurrir a los métodos numéricos, cuando se restringe el campo de validez de las dos variables citadas.