Cálculo de Seguros de vida con crecimiento geométrico

Por

AGUSTIN SANS Y DE LLANOS

El presente trabajo pretende profundizar en el tema enunciado en su título y que su autor ya abordó en otro denominado «Seguros de vida con crecimiento exponencial», que fue publicado en el número 18, correspondiente al año 1977, de los ANALES del INSTITUTO DE ACTUARIOS ESPAÑOLES.

La experiencia adquirida desde entonces permite publicar esta nueva contribución al tratamiento actuarial de los Seguros cuyo capital y prima crecen acumulativamente, y a los cuales he denominado SEGUROS EXPANSION.

Por supuesto, es concebible un seguro en que crezca acumulativamente el capital, siendo la prima constante; o, al revés, que crezca la prima de forma acumulativa, quedando fijo el capital. Las correspondientes fórmulas son un caso particular de las que se exponen posteriormente.

Dado que, como es sabido, el crecimiento exponencial corresponde a Seguros tratados en el campo continuo, y el crecimiento en progresión geométrica a Seguros tratados en el campo discreto, se ofrecen las formulaciones en ambos casos: pero, para no perder de vista la finalidad práctica, se insiste especialmente en presentar fórmulas en el campo discreto.

Dos partes comprende el trabajo. En la primera se recogen las dichas fórmulas, y, en la segunda, se hace un análisis detenido de las consecuencias actuariales derivadas del derecho que asiste al Asegurado, consistente en estabilizar la cuantía alcanzada por la prima en el último vencimiento, y que por su complejidad sólo se presenta para el caso de un MIXTO EXPANSION y a prima anual pura.

I. SEGUROS EXPANSION

Fuerza de interés $\delta = L(1+i)$; siendo $i =$ interés técnico anual.

Fuerza de expansión $\eta = L(1+\theta)$; siendo $\theta =$ expansión anual acumulativa.

$$\varnothing = \delta - \eta = L(1+i) - L(1+\theta) = L\,\frac{1+i}{1+\theta} = L(1+r)$$

Es decir:

$$1 + r = \frac{1+i}{1+\theta}\,;\; r = \frac{\theta - i}{1+i}$$

RENTA TEMPORAL EXPANSION

$$\bar{a}^{*}_{x:\overline{n}|} = \int_{o}^{n} e^{\eta\cdot t}\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot {}_{t}p_{x}\cdot dt = \int_{o}^{n} e^{-\varnothing\cdot t}\cdot {}_{t}p_{x}\cdot dt = \bar{a}^{(\varnothing)}_{x:\overline{n}|}$$

Para $\theta = 0$, es $\eta = 0$ y $\varnothing = \delta$ resultando $\bar{a}^{(\varnothing)}_{x:\overline{n}|}$

Para $n = \infty$ se obtiene:

$\bar{a}^{*}_{x} = \bar{a}^{(\varnothing)}_{x}$ RENTA VITALICIA EXPANSION

la cual, para $\theta = \eta = 0$, conduce a:

$\bar{a}_{x}$ RENTA VITALICIA CONSTANTE

SEGURO TEMPORAL EXPANSION

$$\bar{A}^{*\,1}_{x:\overline{n}|} = \int_{o}^{n} e^{\eta\cdot t}\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(\frac{-d\,l_{x+t}}{l_{x}}\right) = \int_{o}^{n} e^{-\varnothing\cdot t}\cdot\left(\frac{-d\,l_{x+t}}{l_{x}}\right) =$$

$$= \bar{A}^{1\,(\varnothing)}_{x:\overline{n}|} = 1 - \varnothing\cdot\bar{a}^{(\varnothing)}_{x:\overline{n}|} - e^{-\varnothing\cdot n}\cdot{}_{n}p_{x}$$

Para $\theta = 0$ es $\eta = 0$, resultando $\varnothing = \delta$; $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ TEMPORAL CONSTANTE

Para $n = \infty$ se obtiene:

$\bar{A}_{x} = 1 - \varnothing\cdot\bar{a}^{(\varnothing)}_{x:\overline{n}|}$ VIDA ENTERA EXPANSION la cual, a su vez, para $\theta = 0$ conduce a:

$$\bar{A}_x \qquad \text{VIDA ENTERA CONSTANTE}$$

SEGURO MIXTO EXPANSION

$$\bar{A}^{*}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{*}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + e^{\eta \cdot n} \cdot e^{-\delta \cdot n} \cdot {}_{n}p_x = \bar{A}^{*}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + e^{-\varnothing \cdot n} \cdot {}_{n}p_x =$$

$$= 1 - \varnothing \cdot \bar{a}^{(\varnothing)}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{(\varnothing)}_{x:\overline{n}|}$$

Para $\theta = 0$, o sea, $\eta = 0$ y $\varnothing = \delta$ resulta:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta \cdot \bar{a}^{(\varnothing)}_{x:\overline{n}|} \qquad \text{MIXTO CONSTANTE}$$

SEGURO MIXTO EXPANSION DOBLE CAPITAL

En esta modalidad, el Asegurador, en caso de muerte del Asegurado en t paga el valor alcanzado por el capital inicial, o sea:

$$e^{\eta \cdot t}$$

cantidad que vuelve a pagar, a los beneficiarios, al cumplirse el vencimiento.

La prima única puede formularse como yuxtaposición de:

a/ Un Temporal Expansión.

b/ Un Diferido de capital $e^{\eta \cdot n}$.

c/ Un seguro en virtud del cual, si (x) ha fallecido en t, se paga $e^{\eta \cdot t}$ al llegar a n, y cuya prima única en el origen, descontada al tipo δ, es la integral del tercer sumando.

Es decir:

$$U_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{*}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + e^{\eta \cdot n} \cdot e^{-\delta \cdot n} \cdot {}_{n}p_x + \int_{o}^{n} e^{\eta \cdot t} \cdot \left(\frac{-d1_{x+t}}{1_x} \right) \cdot e^{-\delta \cdot n} =$$

$$= \bar{A}^{*}{}_{x:\overline{n}|} + e^{-\delta \cdot n} \int_{o}^{n} e^{\eta \cdot t} \cdot \left(\frac{-d1_{x+t}}{1_x} \right)$$

Ahora bien, esta última integral expresa, equivalentemente, dos Seguros:

a/ Temporal a la tasa de expansión η e interés $\delta = 0$, o sea, $\bar{A}^{*\,(\delta=0)}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$

b/ Temporal clásico a interés $\delta = -\eta$, o sea $\bar{A}^{*\,(-\eta)}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$

Eligiendo la forma a/ se obtiene:

$$U_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^*_{x:\overline{n}|} + e^{-\delta \cdot n} \cdot \bar{A}^{*(\delta=0)}_{\overset{\ 1}{x:\overline{n}|}}$$

Para $\theta = 0$ es $\eta = 0$ y $\varnothing = \delta$ resultando:

$$U_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|} + e^{-\delta \cdot n} \int_o^n \left(- \frac{d1_{x+t}}{1_x} \right) = \bar{A}_{x:\overline{n}|} - e^{-\delta \cdot n} (1 - {}_n p_x) =$$

$= \bar{A}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} + e^{-\delta \cdot n}$ que es un MIXTO DOBLE CAPITAL constante.

FUNCIONES DE CONMUTACION «EXPANSION» EN EL CAMPO CONTINUO

Son las siguientes, expresadas en base a la fuerza de interés δ y de la tasa continua de expansión η:

$$\bar{D}^*_x = e^{\eta \cdot x} \cdot e^{-\delta \cdot x} \cdot 1_x$$

$$\bar{N}^*_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{D}^*_{x+t}$$

$$\bar{S}^*_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{N}^*_{x+t}$$

$$\bar{C}^*_x = \int_o^1 e^{\eta \cdot t} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt \simeq e^{\eta \cdot x} \cdot e^{-\delta (x+1/2)} \cdot d_x$$

$$\bar{M}^*_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{C}^*_{x+t}$$

$$\bar{R}^*_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{M}^*_{x+t}$$

RELACIONES ENTRE RENTAS Y SEGUROS EN LOS CAMPOS CONTINUO Y DISCRETO

a/ *Seguros No Expansión*

Son conocidas las siguientes:

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} \ ; \ \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{2} \cdot (\text{a}_{x:\overline{n}|} + a_{x:\overline{n}|})$$

$$\bar{A}_x = (1+i)^{1/2} \cdot A_x \ ; \ \bar{A}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = (1+i)^{1/2} \cdot A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}$$

b/ *Seguros Expansión*

Se introducen las siguientes:

$$\bar{a}^{*}_{x} = \bar{a}^{(\varnothing)}_{x} = a^{(r)}_{x} + \frac{1}{2} \; ; \quad \bar{a}^{*}_{x:\overline{n|}} = \bar{a}^{(\varnothing)}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{2} \cdot (a^{(r)}_{x:\overline{n|}} + a^{(r)'}_{x:\overline{n|}})$$

$$\bar{A}^{*}_{x} = 1 - \varnothing \cdot \bar{a}^{(\varnothing)}_{x} = (1+r)^{1/2} \cdot A^{(r)}_{x} \; ; \; \bar{A}^{*}_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = \bar{A}^{(\varnothing)}_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = (1+r)^{1/2} \cdot A^{(r)}_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}$$

FORMULAS EN EL CAMPO FINITO

Conmutaciones «Expansión» a la tasa θ

1/ *Sobre 1 cabeza*

$$D^{*}_{x} = (1+\theta)^{x} \cdot D_{x} \; ; \; N^{*}_{x} = \sum_{t=0}^{t=w-x} D^{*}_{x+t} \; ; \; S^{*}_{x} = \sum_{t=0}^{t=w-x} N^{*}_{x+t}$$

$$C^{*}_{x} = (1+\theta)^{x} \cdot C_{x} \; ; \; M^{*}_{x} = \sum_{t=0}^{t=w-x} C^{*}_{x+t} \; ; \; R^{*}_{x} = \sum_{t=0}^{t=w-x} M^{*}_{x+t}$$

2/ *Sobre 2 cabezas*

$$D^{*}_{x:x} = D^{*}_{x} \cdot 1_{x} \; ; \; N^{*}_{x:x} = \sum_{t=0}^{t=w-x} D^{*}_{x+t:x+t} \; ; \; S^{*}_{x:x} = \sum_{t=0}^{t=w-x} N^{*}_{x+t:x+t}$$

$$C^{*}_{x:x} = (1+r)^{1/2} \cdot \left[(1+r)^{-1} \cdot D^{*}_{x:x} - D^{*}_{x+1:x+1} \right] \text{ siendo } r = \frac{1+i}{1+\theta} - 1$$

$$M^{*}_{x:x} = \sum_{t=0}^{t=w-x} C^{*}_{x+t:x+t} \; ; \quad R^{*}_{x:x} = \sum_{t=0}^{t=w-x} M^{*}_{x+t:x+t}$$

RENTAS Y SEGUROS

Renta Temporal prepagable

$$a^{*}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+\theta)^{t} \cdot {}_{t}E_{x} = \frac{N^{*}_{x} - N^{*}_{x+n}}{D^{*}_{x}}$$

Renta Vitalicia

$$a^{*}_{x} = \sum_{t=0}^{w-x} (1+\theta)^{t} \cdot {}_{t}E_{x} = \frac{N^{*}_{x}}{D^{*}_{x}}$$

Seguro Temporal

$$A^{*}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+\theta)^{t} \cdot (1+i)^{-(x+\frac{1}{2})} {}_{t/}q_{x} = \frac{M^{*}_{x} - M^{*}_{x+n}}{D^{*}_{x}}$$

Seguro Vida Entera

$$A^{*}_{x} = \sum_{t=0}^{w-x} (1+\theta)^{t} \cdot (1+i)^{-(x+\frac{1}{2})} {}_{t/}q_{x} = \frac{M^{*}_{x}}{D^{*}_{x}}$$

Seguro Mixto

Caben dos formulaciones, según que el Capital para caso de vida sea igual al último Capital para caso de fallecimiento, o bien, éste expansionado por un año. Es decir:

a) $$A^{*}_{x:\overline{n}|} = A^{*}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} + (1+\theta)^{n-1} \cdot {}_{n}E_{x} = \frac{M^{*}_{x} - M^{*}_{x+n} + (1+\theta)^{-1} \cdot D^{*}_{x+n}}{D^{*}_{x}}$$

b) $$A^{*}_{x:\overline{n}|} = A^{*}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} + (1+\theta)^{n} \cdot {}_{n}E_{x} = \frac{M^{*}_{x} - M^{*}_{x+n} + D^{*}_{x+n}}{D^{*}_{x}}$$

PRIMAS PURAS ANUALES

La primas puras *iniciales* son, en los campos continuo y discreto:

TEMPORAL

$$\bar{P}^{*}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}^{*}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}}{\bar{a}^{*}_{x:\overline{n}|}} \quad ; \quad \bar{P}^{*}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}^{*}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}}{a^{*}_{x:\overline{n}|}}$$

VIDA ENTERA

— *Primas Temporales*

$$/_{n}\bar{P}^{*}_{x} = \frac{\bar{A}^{*}_{x}}{\bar{a}^{*}_{x:\overline{n}|}} \quad ; \quad /_{n}P^{*}_{x} = \frac{A^{*}_{x}}{a^{*}_{x:\overline{n}|}}$$

— *Primas Vitalicias*

$$\bar{P}^{*}_{x} = \frac{\bar{A}^{*}_{x}}{\bar{a}^{*}_{x}} \qquad P^{*}_{x} = \frac{A^{*}_{x}}{a^{*}_{x}}$$

MIXTO

$$\bar{P}^*_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}^*_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}^*_{x:\overline{n}|}} \quad ; \quad P^*_{x:\overline{n}|} = \frac{A^*_{x:\overline{n}|}}{a^*_{x:\overline{n}|}}$$

Prima K-ésima

En el vencimiento *K, la prima pura K-ésima, en general,* tiene como valor el determinado por:

$$e^{\eta \cdot k} \cdot \bar{P}_x^* \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$$

y dado que es:

$$\eta = L(1+\theta), \text{ o sea, } e^{\eta} = 1 + \theta$$

en el campo discreto se tiene:

$$(1+\theta)^k \cdot P_x^* \qquad \text{para } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)$$

o bien:

$$(1+\theta)^{k-1} \cdot P_x^* \qquad \text{para } k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

RESERVA MATEMATICA TERMINAL

Tomando como modelo el Seguro MIXTO, se tiene:

$$\begin{aligned} {}_kV_{x:\overline{n}|} &= e^{k\cdot\eta} \cdot \bar{A}^*_{x+k:\overline{n-k}|} - e^{k\cdot\eta} \cdot \bar{P}^*_{x:\overline{n}|} \cdot \bar{a}^*_{x+k:\overline{n-k}|} = \\ &= e^{k\cdot\eta} \cdot [\bar{A}^*_{x+k:\overline{n-k}|} - \bar{P}^*_{x:\overline{n}|} \cdot \bar{a}^*_{x+k:\overline{n-k}|}] \end{aligned}$$

$$\text{para } k = 1,\ 2,\ \ldots\ n$$

Obviamente es:

$${}_nV_{x:\overline{n}|} = e^{n\cdot\eta}$$

En el campo finito, la fórmula de la Reserva es:

$${}_kV_{x:\overline{n}|} = (1+\theta)^k \cdot [\, A^*_{x+k:\overline{n-k}|} - P^*_{x:\overline{n}|} \cdot a^*_{x+k:\overline{n-k}|}\,]$$

II - SEGURO «MIXTO EXPANSION»

ESTABILIZACION DE LA PRIMA ANUAL

Durante el transcurso del contrato, puede solicitar el Tomador la estabilización de su prima anual en la cuantía de la vencida en el ejercicio precedente. De ello resulta una reducción del tipo de expansión afectado al Capital asegurado. El tipo de expansión reducido ∅ se investiga a continuación, en base a prima pura.

La prima pagada en el aniversario ($m - 1$), o sea, la prima m-ésima vale:

$$[1] \qquad P_{x:\overline{n}|} \cdot (1+\theta)^{m-1}$$

y el importe alcanzado por el Capital asegurado es $(1+\theta)^{m-1}$.

Entonces, a partir del aniversario m, o sea, desde la prima $(m+1)$-ésima, la cuantía del capital crecerá anualmente a la tasa ∅, quedando estabilizada la prima en el valor [1]. Es decir:

Año	Capital	Prima
$(m\,;m+1)$	$(1+\theta)^{m-1}\cdot(1+\varnothing)$	$P_{x:n}\cdot(1+\theta)^{m-1}$
$(m+1\,;m+2)$	$(1+\theta)^{m-1}\cdot(1+\varnothing)^2$	$P_{x:n}\cdot(1+\theta)^{m-1}$
$(m+2\,;m+3)$	$(1+\theta)^{m-1}\cdot(1+\varnothing)^3$	$P_{x:n}\cdot(1+\theta)^{m-1}$
....	....	....

Reserva Matemática al momento de la estabilización de la prima

Viene dada por la expresión:

$$[2] \qquad (1+\theta)^{m-1}\cdot\left[(1+i)^{1/2}\cdot(1-\frac{a^{*}_{x+m:\overline{n-m}|}}{a^{*}_{x:\overline{n}|}})\right]$$

Reserva Matemática del Seguro a prima estabilizada

Al estabilizarse se genera un Seguro «Mixto Expansión» a Prima constante y a Capital creciente a la tasa ∅. La reserva será:

$$[3] \qquad (1+\theta)^{m-1}[\,1+\varnothing)\cdot A^{(\varnothing)}_{x+m:\overline{n-m}|} - P\cdot a^{(i)}_{x+m:\overline{n-m}|}\,]$$

expresión en la cual:

$A^{(\varnothing)}_{x+m:\overline{n-m}|}$ = Prima única de Mixto a la tasa de expansión ∅ e interés técnico i.

$a^{(i)}_{x+m:\overline{n-m}|}$ = Renta al interés técnico i y términos unidad.

La tasa de expansión ∅ y el interés técnico i se relacionan así:

$$(1+\varnothing)=(1+i)\cdot(1+r)^{-1}$$

La [3] se puede transformar como sigue:

$$[4] \qquad (1+\varnothing)\cdot A^{(\varnothing)}_{x+m:\overline{n-m|}} = (1+\varnothing)\cdot(1+i)^{1/2}\,[\,(1+\varnothing)^{-1}+[\,v-(1+\varnothing)^{-1}\,]\cdot$$

$$\cdot\, \ddot{a}^{(\varnothing)}_{x+m:\overline{n-m|}}\,] =$$

$$= (1+i)^{1/2}\,[\,1+[\,v\cdot(1+\varnothing)-1\,]\cdot \ddot{a}^{(\varnothing)}_{x+m:\overline{n-m|}}\,] =$$

$$= (1+i)^{1/2}\,[\,1+[\,(1+i)^{-1}\,(1+i)\,(1+r)^{-1}-1)\,]\cdot \ddot{a}^{(\varnothing)}_{x+m:\overline{n-m|}}\,] =$$

$$= \;(1+i)^{1/2}\,[\,1+(1+r)^{-1}-1)\cdot \ddot{a}^{(\varnothing)}_{x+m:\overline{n-m|}}\,)\,] =$$

$$= (1+i)^{1/2}\,[\,1-r\cdot(1+r)^{-1}\cdot \ddot{a}^{(\varnothing)}_{x+m:\overline{n-m|}}\,] = A^{(r)}_{x+m:\overline{n-m|}}$$

pues, por otro lado, se tiene que:

$$[5] \qquad \ddot{a}^{(\varnothing)}_{x+m:\overline{n-m|}} = \sum_{t=0}^{n-m-1} (1+\varnothing)^t\cdot(1+i)^{-t}\cdot {}_tp_x =$$

$$= \sum_{t=0}^{n-m-1} (1+i)^t\cdot(1+i)\,(1+r)^{-t}\cdot {}_tp_x = \sum_{t=0}^{n-m-1} (1+r)^{-t}\cdot {}_tp_x =$$

$$= \ddot{a}^{(r)}_{x+m:\overline{n-m|}}$$

Identidad de reservas en el momento m

Sustituyendo previamente [4] y [5] en [3] se llega a la ecuación:

$$[6] \qquad A^{(r)}_{x+m:\overline{n-m|}} - P\cdot \ddot{a}^{(i)}_{x+m:\overline{n-m|}} = (1+i)^{1/2}\cdot\left[\,1-\frac{\ddot{a}^{*}_{x+m:\overline{n-m|}}}{\ddot{a}^{*}_{x:\overline{n|}}}\,\right]$$

Pero teniendo presente que:

$$[7] \qquad A^{(r)}_{x+m:\overline{n-m|}} = (1+i)^{1/2}\cdot[\,1-r\,(1+r)^{-1}\cdot \ddot{a}^{(r)}_{x+m:\overline{n-m|}}\,]$$

la [6] se convierte en:

$$[8] \qquad (1+i)^{1/2}\,[\,1-r\,(1+r)^{-1}\cdot \ddot{a}^{(r)}_{x+m:\overline{n-m|}}\,] = P\cdot \ddot{a}^{(i)}_{x+m:\overline{n-m|}} + (1+i)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left[\,1-\frac{\ddot{a}^{*}_{x+m:\overline{n-m|}}}{\ddot{a}^{*}_{x:\overline{n|}}}\,\right]$$

Admitiendo la aproximacion:

$$[9] \qquad \frac{\ddot{a}^{(r)}_{x+m:\overline{n-m|}}}{\ddot{a}^{(r)}_{\overline{n-m|}}} \neq \frac{\ddot{a}^{(i)}_{x+m:\overline{n-m|}}}{\ddot{a}^{(i)}_{\overline{n-m|}}} \;\rightarrow\; \ddot{a}^{(r)}_{x+m:\overline{n-m|}} = \ddot{a}^{(r)}_{\overline{n-m|}}\cdot\frac{\ddot{a}^{(i)}_{x+m:\overline{n-m|}}}{\ddot{a}^{(i)}_{\overline{n-m|}}}$$

se tiene que la [8] toma la forma:

$$[10] \qquad (1+i)^{1/2} - (1+i)^{1/2} \cdot r\,(1+r)^{-1} \cdot a^{(r)}_{\overline{n-m}|} \cdot \frac{a^{(i)}_{x+m:\overline{n-m}|}}{a^{(i)}_{\overline{n-m}|}} =$$

$$= P \cdot a^{(i)}_{x+m:\overline{n-m}|} + (1+i)^{1/2} - (1+i)^{1/2} \cdot \frac{a^{*}_{x+m:\overline{n-m}|}}{a^{*}_{x:\overline{n}|}}$$

Ahora bien, el segundo término del primer miembro de la ecuación [10] se puede escribir como sigue:

$$[11] \qquad (1+i)^{1/2} \cdot r\,(1+r)^{-1} \cdot (1+r) \cdot \frac{1-(1+r)^{-(n-m)}}{r} \cdot \frac{a^{(i)}_{x+m:\overline{n-m}|}}{a^{(i)}_{\overline{n-m}|}} =$$

$$= (1+i)^{1/2} \cdot \frac{1-(1+r)^{-(n-m)}}{a^{(i)}_{\overline{n-m}|}} \cdot a^{(i)}_{x+m:\overline{n-m}|}$$

Y como:

$$(1+r)^{-(n-m)} = (1+\varnothing)^{n-m} \cdot (1+i)^{-(n-m)}$$

la [11] pasa a ser:

$$[12] \quad (1+i)^{1/2} \cdot \frac{1-(1+\varnothing)^{n-m} \cdot (1+i)^{-(n-m)}}{a^{(i)}_{\overline{n-m}|}} \cdot a^{(i)}_{x+m:\overline{n-m}|}$$

Y reemplazando la [12] en la [10] se obtiene finalmente:

$$\boxed{(1+\varnothing)^{n-m} = \frac{P - (1+i)^{1/2} \cdot \dfrac{a^{*}_{x+m:\overline{n-m}|}}{\cdot\, a^{(i)}_{x+m:\overline{n-m}|}} + \dfrac{(1+i)^{1/2}}{a^{(i)}_{\overline{n-m}|}}}{\dfrac{(1+i)^{1/2} \cdot (1+i)^{-(n-m)}}{a^{(i)}_{\overline{n-m}|}}}}$$

Finalmente, la reserva matemática de un Seguro MIXTO EXPANSION cuya prima ha sido estabilizada, tiene por fórmula la siguiente:

$$(1+\varnothing)^{k-m} \cdot (1+\varnothing) \cdot A^{(\varnothing)}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^{*} \cdot a_{x+k:\overline{n-k}|}$$

La prima única $A^{(\varnothing)}_{x+k:\overline{n-k}|}$ que aparece en esta fórmula, puede calcularse aplicando la [4].

SEGUROS MIXTOS EXPANSION

ESTABILIZACION DE LA TASA REDUCIDA ∅

EJEMPLO

Sean $x = 40$; $n = 20$; P.E.M. 70 ; $i = 5\%$; $\theta = 5\%$

Prima pura inicial:

$$P^*_{40:\overline{20}|} = \frac{A^*_{40:\overline{20}|}}{\ddot{a}^*_{40:\overline{20}|}} = \frac{0{,}955680}{19{,}038149} = 50{,}20 \text{ o/oo}$$

Fórmula para la tasa reducida de expansión:

$$(1+\varnothing)^{20-t} = \frac{P^* - (1{,}05)^{1/2} \cdot \dfrac{\ddot{a}^*_{40+t:\overline{20-t}|}}{\ddot{a}^*_{40:\overline{20}|} \cdot \ddot{a}_{40+t:\overline{20-t}|}} + \dfrac{(1{,}05)^{1/2}}{\ddot{a}_{\overline{20-t}|}}}{\dfrac{(1{,}05)^{1/2} \cdot (1{,}05)^{-(20-t)}}{\ddot{a}_{\overline{20-t}|}}}$$

t	$40+t$	$20-t$	(2) $\dfrac{(1{,}05)^{1/2}}{\ddot{a}^*_{40:\overline{20}|}}$	(1) P^*	(3) $\ddot{a}^*_{40+t:\overline{20-t}|}$	(4) $\ddot{a}_{40+t:\overline{20-t}|}$	(5) $(2)\cdot\dfrac{(3)}{(4)}$
1	41	19	0,053823	0,050200	18,089233	12,201167	0,079797
5	45	15	0,053823	0,050200	14,309488	10,473056	0,073539
10	50	10	0,053823	0,050200	9,607922	7,821321	0,066118
15	55	5	0,053823	0,050200	4,882086	4,444177	0,059126
19	59	1	0,053823	0,050200	1,000000	1,000000	0,053823

t	$40+t$	$20-t$	(6) $\ddot{a}_{\overline{20-t}|}$	(7) $\dfrac{(1{,}05)^{1/2}}{(6)}$	(8) $(1)-(5)+(7)$	(9) $(7)\times(1{,}05)^{-(20-t)}$
1	41	19	12,689587	0,080751	0,051154	0,031956
5	45	15	10,898641	0,094020	0,070681	0,045225
10	50	10	8,107822	0,126384	0,110466	0,077589
15	55	5	4,545951	0,225408	0,216482	0,176613
19	59	1	1,000000	1,024695	1,021072	0,975900

	(8) / (9)	∅
19	1,600764	2,51 %
15	1,562875	3,01 %
10	1,423733	3,60 %
5	1,225742	4,15 %
1	1,046282	4,63 %

Madrid, agosto 1984