

# Modelos matemáticos para el estudio de la solvencia de la empresa de seguros

Por

**Dr. JOSE ANTONIO GIL FANA**

Profesor del Departamento Actuarial y Financiero de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense. Madrid

## **LA ESTABILIDAD DEL NEGOCIO DE SEGUROS**

Este punto se propone el estudio de la estabilidad de lo que vamos a denominar «negocio de seguros», el de primas-siniestros. Se considerará, por una parte, la siniestralidad del período, y, por otra, las primas recargadas (prima pura o de riesgo más recargo de seguridad) del mismo.

Es la fluctuación aleatoria de los siniestros la que pone en peligro su estabilidad. El análisis de aquella nos ha de ayudar en la tarea de tomar las medidas adecuadas que prevengan las consecuencias de una siniestralidad excesiva.

### **La siniestralidad en Seguros Generales**

Se impone, por tanto, el conocimiento de la distribución de la cuantía de la siniestralidad. Para ello hemos de destacar el llamado modelo de riesgo o de siniestros acumulados. En el mismo se consideran dos variables aleatorias: la del número de siniestros y la de la cuantía de cada uno de ellos, cuyas distribuciones de probabilidad se denominan básicas, obteniéndose a partir de ellas la de la siniestralidad total.

La operatividad del modelo se consigue mediante las diferentes aproximaciones desarrolladas para esta última, centrando el estudio en el Método de Montecarlo, que permite acercarse a la distribución del daño total mediante simulación.

*Distribuciones básicas. Distribución del daño total*

Sea  $n = n(0, t)$  el número aleatorio de siniestros en un periodo de exposición  $(0, t)$  y  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , las cuantías aleatorias de cada uno de los siniestros.  $P_n(t)$  y  $V(X) = P(x_i \leq X)$  son la distribución de probabilidad del número de siniestros y la función de distribución de la cuantía de cada uno de ellos respectivamente.

La siniestralidad total en  $(0, t)$  vendrá dada por:

$$X(t) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

siendo, por tanto, la suma de las cuantías aleatorias de un número aleatorio de siniestros.

Supuesto que se han producido  $n$  siniestros, que las variables  $x_1, \dots, x_n$  son mutuamente independientes e idénticamente distribuidas y que dicha distribución no depende de  $n$ , la distribución del daño total en  $(0, t)$  vendrá dada por:

$$F(X, t) = P[X(t) \leq X] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot V^{(*n)}(X)$$

donde  $V^{(*n)}(X)$  nos da la probabilidad de que, habiendo ocurrido  $n$  siniestros, alcancen la cuantía  $X$ . Esto es, la convolución  $n$ -sima de  $V(X)$ .

Además la media y varianza de la siniestralidad total son:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(n) \cdot E(x) \\ V(X) &= E(n) \cdot V(x) + V(n) \cdot [E(x)]^2 \end{aligned}$$

Para el número de siniestros se distinguen dos distribuciones: Poisson y Binomial Negativa. La primera se fundamenta en las hipótesis de homogeneidad en el tiempo del número medio de siniestros y de ausencia de contagio. La segunda da entrada al efecto de contagio.

Cuando la distribución del número de siniestros es de Poisson, la del daño total recibe el nombre de «Distribución de Poisson Generalizada», que utilizando tiempo operacional viene expresada por:

$$F(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} \cdot t^n}{n!} \cdot V^{(*n)}(X)$$

siendo su media y varianza:

$$E(X) = t \cdot c_1 \quad ; \quad V(X) = t \cdot c_2$$

donde  $E(n) = V(n) = t$ ;  $E(x) = c_1$  y  $E(x^2) = c_2$  son los primeros momentos de las distribuciones básicas.

Si la distribución del número de siniestros es Binomial Negativa, tenemos:

$$F(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-h}{n} \left( \frac{-t}{t+h} \right)^n \cdot \left( \frac{h}{t+h} \right)^h \cdot V^{(*)n}(X)$$

en este caso:

$$E(X) = t \cdot c_1 \quad ; \quad V(X) = t \cdot c_2 + \frac{(t \cdot c_1)^2}{h}$$

siendo:  $E(n) = t$  y  $V(n) = t \cdot \left( 1 + \frac{t}{h} \right)$

El efecto de contagio se traduce en una mayor varianza que la de la Distribución de Poisson Generalizada y viene expresado por el parámetro  $h$ : un valor pequeño de  $h$  indica un contagio grande y, por tanto, una elevada varianza; por el contrario, a mayor valor de  $h$ , menor efecto de contagio, siendo su caso extremo el de Poisson.

La importancia de la distribución del daño total dentro de la Teoría del Riesgo Colectivo, a la que más adelante nos referimos, y la dificultad de su cálculo directo, hace necesario disponer de aproximaciones a la misma. En la obra de Beard, Pentikäinen y Pesonen, citada en la bibliografía, pueden encontrarse las más importantes. Como el conjunto del presente trabajo justificará, vamos a centrarnos en el método de Montecarlo y en la simulación de la siniestralidad total.

### *Método de Montecarlo*

Utiliza los llamados números aleatorios. Consideremos una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo  $(0,1)$  cuya función de distribución es:

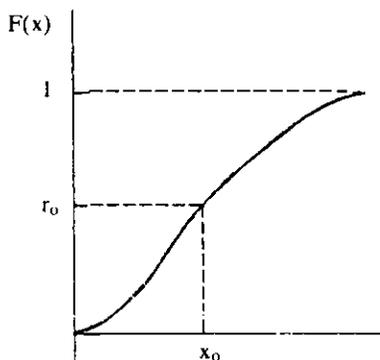
$$G(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ r & \text{si } 0 < r \leq 1 \\ 1 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Existen distintas técnicas para generar mediante ordenador variables aleatorias de este tipo. Los números generados se denominan aleatorios

(pseudoaleatorios en realidad, al ser obtenidos mediante una fórmula determinística; sin embargo, sus propiedades estadísticas coinciden con las de los números aleatorios ideales).

Las variables aleatorias de distribución-uniforme tienen un papel relevante en la generación de variables aleatorias de otras distribuciones.

Consideremos  $s$  números aleatorios  $r_1, \dots, r_s$ , y sea  $F(x)$  la función de distribución de una variable aleatoria. Cada número aleatorio puede ser proyectado por medio de esta distribución, como se muestra en la siguiente figura:



El resultado  $x_i$  es la raíz de la ecuación  $r_i = F(x_i)$ . De esta forma podemos obtener una muestra aleatoria de la distribución  $F(x)$ ,  $(x_1, \dots, x_s)$ .

Basándonos en lo expuesto y supuestas conocidas las distribuciones básicas, vamos a plantearnos la obtención de la distribución del daño total.

### *Generación de la distribución del daño total*

Sean  $n$  el número aleatorio de siniestros y  $x$  la cuantía aleatoria de un siniestro. Notaremos sus funciones de distribución por  $P(N)$  y  $V(x)$  respectivamente.

Generemos un número aleatorio  $r_{10}$  y sea  $N_1 = p^{-1}(r_{10})$ , donde  $p^{-1}$  es la inversa de  $P \cdot N_1$  es, por tanto, uno de los posibles valores del número de siniestros. Generemos ahora  $N_1$  números aleatorios  $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1N_1}$ , siendo  $x_{1i} = V^{-1}(r_{1i})$ . Tendremos que,  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1N_1}$  son las cuantías de cada uno de los  $N_1$  siniestros.

La cuantía de la siniestralidad total del período será:

$$X = \sum_{i=1}^{N_1} X_{1i}$$

que podemos considerar como el primero de los elementos de una muestra aleatoria, cuya función de distribución es  $F(X)$ , la de la siniestralidad total.

Repetido el proceso un gran número de veces y ordenados los  $X_i$  resultantes, de acuerdo a su magnitud, podemos estimar  $F(X)$  por  $k_x/s$ , donde  $k_x$  es el número de los  $X_i$  menores o iguales que  $X$  y  $s$  el de repeticiones del proceso.

## La insolvencia técnica del negocio de seguros

### *Teoría del Riesgo Colectivo*

Ya señalamos el carácter aleatorio de las operaciones de seguro. Es de interés el estudio del efecto de las fluctuaciones de dicha naturaleza que se producen en el negocio de seguro.

El primer modelo que lo ha analizado como un todo es el de la Teoría del Riesgo Colectivo. Si suponemos que la entidad aseguradora posee una cartera fija de pólizas de seguro durante un período de tiempo y unas reservas iniciales, podemos obtener el denominado proceso de ruina de la comparación de los procesos de ingresos acumulados con el de riesgo o siniestralidad acumulada. Si en un momento determinado ésta última supera a la suma de las reservas iniciales y los ingresos acumulados, se producirá la insolvencia técnica, comúnmente denominada ruina.

El modelo nos permite estimar la probabilidad de que se produzca tal suceso. Por otra parte, integra los tres elementos básicos sobre los que podemos actuar para conseguir la estabilidad del negocio: reaseguro, recargo de seguridad y reservas de estabilidad:

Sean por tanto:

- $S_0$ , las reservas iniciales.
- $P = t \cdot c_1$ , la prima pura, que coincide con la esperanza matemática de la siniestralidad del período.
- $(1 + \lambda) \cdot P$ , la prima recargada, donde  $\lambda$  es el recargo de seguridad.

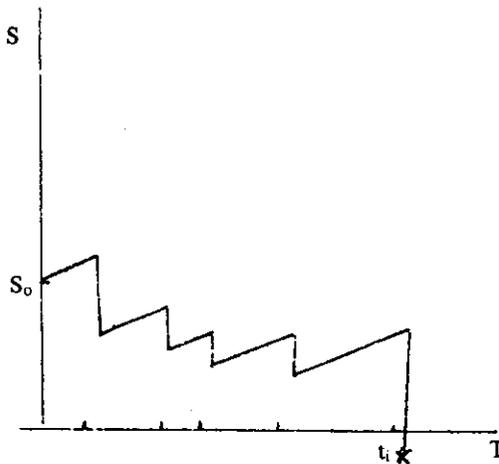
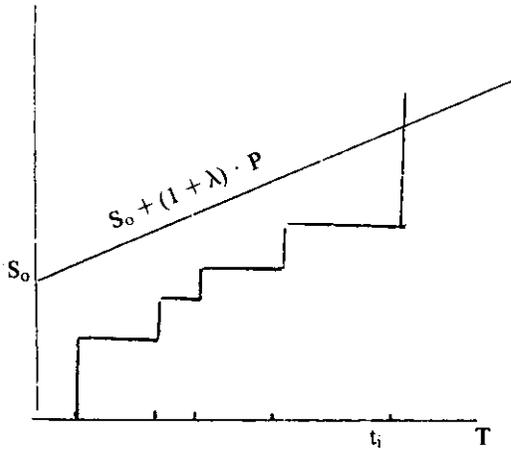
— Al final del período  $(0, t)$  y siendo  $X(t)$  la variable aleatoria asociada a la siniestralidad en el mismo, tendremos:

$$Z(t) = S + (1 + \lambda) \cdot P - X(t)$$

que nos indica la evolución (aleatoria) de las reservas.

En la figura se representa una de las realizaciones del proceso. Hemos considerado únicamente sumas positivas de riesgo.

Si en algún  $t_i$ ,  $Z(t_i) \leq 0$ , diremos que se ha producido la insolvencia técnica.



Si el precio de servicio viene determinado por el principio de equivalencia, esto es, la prima es la esperanza matemática de la siniestralidad, el beneficio esperado del negocio sería cero. Esto, unido a la posibilidad de que se produzcan pérdidas constantes en las operaciones, que impidan a la empresa hacer frente a sus obligaciones, hace necesario un suplemento a la prima pura: el recargo de seguridad.

Los objetivos básicos del recargo de seguridad son, por tanto, prevenir la ruina y proporcionar un beneficio. Parte del mismo servirá para absorber las fluctuaciones anuales que excedan los siniestros esperados, mientras que el resto se llevará a las reservas de estabilidad, asegurando la solvencia de la entidad a largo plazo.

Si en un período dado la primera parte no es completamente absorbida por las fluctuaciones negativas de la siniestralidad, el remanente puede ser considerado como beneficio técnico. Si, por el contrario, éstas superan a aquella, no existirá beneficio técnico en el período, teniendo que ser utilizadas las reservas de solvencia para compensar el exceso de siniestralidad.

El cálculo de la cuantía del recargo se ha de basar en dos elementos íntimamente relacionados: el «riesgo» y la estabilidad del negocio. El riesgo para la entidad aseguradora proviene de la posibilidad de que una siniestralidad desfavorable comprometa la solvencia de la misma. Parece claro que la cuantía del recargo, y por tanto del beneficio esperado, dependa de su intensidad. De ahí la importancia de encontrar una medida apropiada del mismo.

Con un criterio de estabilidad, dadas las reservas y la modalidad y pleno de reaseguro, la cuantía del recargo puede obtenerse, para una probabilidad de ruina prefijada, en base a la Teoría del Riesgo Colectivo.

El reaseguro supone la posibilidad de trasladar riesgos no asumibles. Producirá una modificación en la distribución de la siniestralidad total en función de la modalidad y pleno elegidos. Este traslado se realiza a costa de una disminución en la rentabilidad esperada.

Considerando un período de  $N$  años,  $S$  la cuantía de las reservas iniciales y  $F(X)$  la distribución de la siniestralidad total de cada uno de los años, la probabilidad de que las reservas sean inferiores a cero al final del primer año es:

$$\Psi(S) = 1 - F[S + (1 + \lambda) \cdot P]$$

si  $H_1(X, S) = F[S + (1 + \lambda) \cdot P - X]$  es la probabilidad de que las reservas al final del primer año sean superiores a  $X$ , podemos escribir:  $\Psi(S) = 1 - H_1(0, S)$ .

De igual forma si  $H_N(X, S)$  es la probabilidad de que las reservas sean superiores a  $X$  al final del año  $N$ , habiendo sido mayores que cero en los anteriores, tenemos que:

$$\Psi_N(S) = 1 - H_N(0, S)$$

es la probabilidad de ruina para el período de  $N$  años considerados.

$H_N(X, S)$  puede calcularse (ver, por ejemplo, la obra citada anteriormente) mediante la siguiente fórmula de recurrencia:

$$H_k(X, S) = - \int_0^X H_1(X, t) dt H_{k-1}(X, S)$$

Para un período indefinido de tiempo, la probabilidad de ruina viene dada por la conocida relación:

$$\Psi \leq e^{-R \cdot S}$$

donde  $R$  se obtiene de:

$$M(R) = E(e^{-R \cdot Y(t)}) = 1$$

Siendo:

$$Y(t) = (1 + \lambda) \cdot P - X(t)$$

Según sea la distribución del número de siniestros de Poisson o Binomial Negativa, un valor aproximado para  $R$  viene dado respectivamente por:

$$R \approx \frac{2 \lambda c_1}{c_2} \quad \text{ó} \quad R \approx \frac{2 \lambda c_1}{c_2 + \frac{1}{h} \cdot c_1^2}$$

Vemos, pues, cómo quedan integrados en el modelo los elementos de estabilidad del sistema: reservas  $S$ , recargo de seguridad  $\lambda$  y el reaseguro que influye en la distribución de la siniestralidad.

Así, podemos obtener un mismo índice de estabilidad (probabilidad de ruina) para el negocio de seguro con distintos valores de los elementos de estabilidad.

*Estimación de la probabilidad de ruina mediante simulación*

La obtención analítica de la probabilidad de ruina, tanto para un período finito como infinito, descansa en las hipótesis de invarianza de la distribución de la siniestralidad total y del recargo de seguridad durante los distintos períodos de tiempo considerados. La variación de dichos supuestos trae consigo una mayor dificultad de obtener un resultado analítico.

En este punto nos vamos a plantear la estimación de la probabilidad de ruina mediante la simulación del modelo. Ahora no será difícil relajar las hipótesis indicadas. El proceso es el siguiente:

Consideremos N años y sean  $F_1(X), \dots, F_N(X)$  las funciones de distribución de la siniestralidad total para cada uno de dichos años y  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  la cuantía de los recargos.

Sea  $X_1$  un valor, generado como anteriormente se indicó, de la siniestralidad total en el primer año. Dadas unas reservas iniciales  $S_0$ , tendremos:

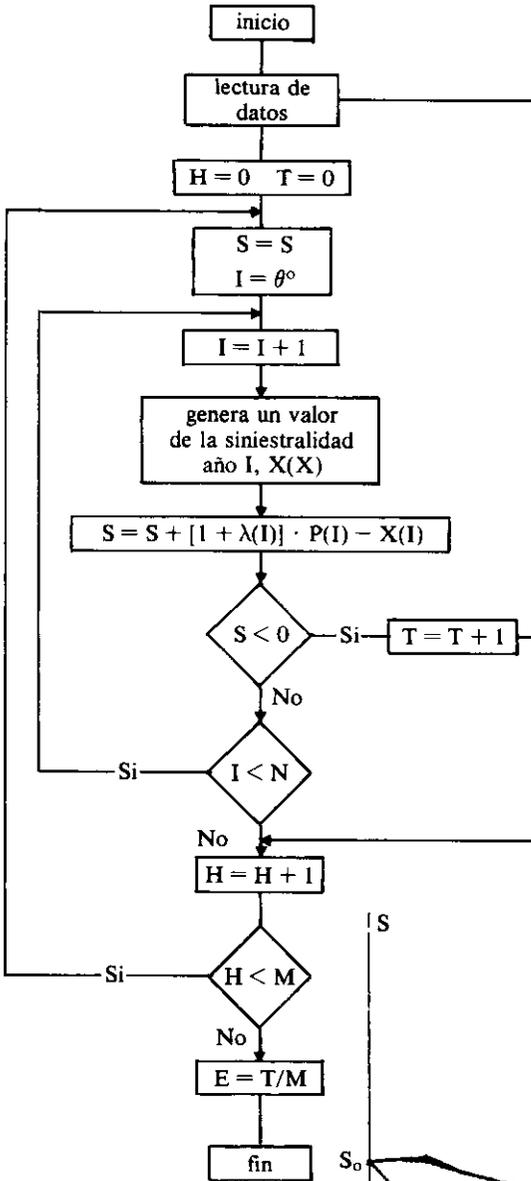
$$S_1 = S_0 + (1 + \lambda_1) \cdot P_1 - X_1$$

donde  $S_1$  son las reservas iniciales al final del primer año. Si éstas son inferiores a 0 se habrá producido la insolvencia, finalizando el proceso. En otro caso, y considerando  $F_2(X)$ , obtendremos  $X_2$  y  $S_2 = S_1 + (1 + \lambda_2) \cdot P_2 - X_2$ . Al igual que antes, el valor de  $S_2$  nos indicará si hemos de finalizar o continuar con  $X_3$ . Si llegamos al final del año N sin que ninguno de los  $S_i (i = 1, 2, \dots, N)$  sea negativo, estaremos en una realización sin ruina.

Repetido el proceso un elevado número de veces, el cociente, entre el número de realizaciones del mismo, que conducen a la ruina, y el total de las mismas, nos da una estimación de la probabilidad de ruina.

En la figura siguiente representamos dos trayectorias del proceso, una de ellas con ruina y otra sin ruina. También el diagrama de flujo del proceso indicado.

De esta manera podemos estimar la probabilidad de ruina para distintas circunstancias del negocio sin más que variar los parámetros del modelo: distribución de la siniestralidad total y cuantía del recargo de seguridad de cada uno de los períodos que no han de permanecer necesariamente invariantes y reservas iniciales.



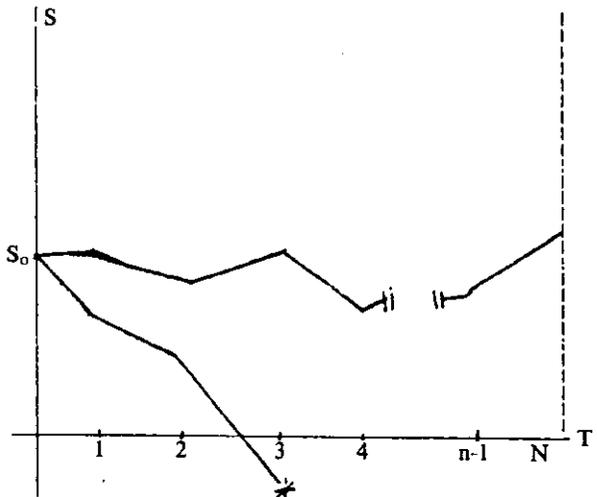
N: Número de periodos.  
 Característica de la distribución de la siniestralidad para cada uno de los N periodos.

Volumen de primas puras P(I) y cuantía λ(I) del recargo de seguridad.

M: Número de repeticiones del proceso.

I, H y T se utilizan para establecer contadores del número de periodo, de repeticiones del proceso y de aquellas que conducen a la ruina respectivamente.

E: Probabilidad de ruina estimada.



## EL PROBLEMA DE LOS DIVIDENDOS

En la Teoría del Riesgo Colectivo se supone la posibilidad de una acumulación ilimitada de reservas, que contrasta con la realidad económica de distribuir parte del beneficio en forma de dividendos. De Finetti, en el XV C.I.A., planteó el denominado problema de los dividendos al indicar que el supuesto de que las reservas no superen un determinado nivel trae consigo un importante cambio en el modelo de la Teoría del Riesgo Colectivo, ya que la probabilidad de ruina para un periodo que se incrementa indefinidamente tiende a la unidad.

Varios han sido los estudios realizados en esta línea. De entre ellos, destacaremos los de K. Borch, que ha propuesto una solución al problema en base a un planteamiento de decisión secuencial: sea  $S$  la cuantía de las reservas al final de un periodo y consideremos la posibilidad de repartir una parte  $s$  de ellas en forma de dividendos. La cantidad  $Z = S - s$  será mantenida como reserva durante el siguiente período, siendo su finalidad posibilitar a la entidad para hacer frente a las contingencias de próximos períodos y salvaguardar los futuros pagos de dividendos. Por tanto, el problema se concreta en determinar la cantidad a repartir conocidas las reservas iniciales. Al tomar esta decisión se ha de equilibrar el deseo de pagar grandes dividendos en el momento actual con el de hacer posible el pago de dividendos en los siguientes periodos, lo cual es imposible en caso de ruina.

El objetivo es encontrar una secuencia de dividendos  $s_0, s_1, \dots, s_t$ , que maximice:

$$E\left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot s_t\right)$$

Es claro que el valor actual de los dividendos futuros depende de las reservas iniciales  $S$ . Llamemos  $V(S)$  al valor actual esperado de una secuencia óptima de dividendos:

$$V(S) = \text{máx. } E\left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot s_t\right)$$

Si la entidad sigue una política óptima de dividendos,  $V(S)$  ha de satisfacer la siguiente ecuación funcional:

$$V(S) = \text{máx.}_{0 \leq s \leq S} \left\{ s + v \cdot \int_0^{\infty} V(S - s + P - X) \cdot f(X) dX \right\},$$

donde  $P$  indica en este caso la prima recargada,  $f(X) = F'(X)$ , siendo  $F(X)$

la función de distribución del daño total. El factor de actualización « $v$ » asegura la convergencia de la funcional y recoge las preferencias del accionista sobre la temporalidad de los pagos de dividendos.

Es, por tanto, un problema típico de programación dinámica con futuro aleatorio, en el cual se pueden considerar los siguientes elementos: un horizonte temporal; un vector de estado que en este caso tiene una única variable, la probabilidad de ruina; un vector de decisión con la variable  $Z = S - s$ , siendo el valor de cada período el de los dividendos repartidos en el mismo y la aleatoriedad nos la proporciona la siniestralidad.

La estrategia óptima vendrá dada por una secuencia  $Z_1, Z_2, \dots, Z_t, \dots$ , de valores de la variable de decisión: reserva después de repartir dividendos (reserva óptima).

## UN MODELO GLOBAL PARA EL ESTUDIO DE LA SOLVENCIA

Al ampliar el concepto de solvencia a la empresa de seguros en su totalidad, surge el margen de solvencia, constituido por el patrimonio libre de la empresa y cuya función no es sólo ya absorber las pérdidas debidas a las desviaciones desfavorables de la siniestralidad, sino también la posible infravaloración de las reservas técnicas, depreciación de activos y, en general, la cobertura de los riesgos de explotación.

Una vez estudiado el «negocio de seguro», se ha de dar entrada al resto de las actividades que se realizan en el seno de la empresa y que pueden comprometer su solvencia.

De la literatura actuarial vamos a destacar el modelo desarrollado por T. Pentikäinen que, en palabras del mismo, intenta «establecer una imagen del proceso de decisión en la empresa aseguradora, considerando los aspectos teóricos del riesgo como una parte entre otras que no poseen carácter actuarial». La utilidad de las aplicaciones, estudiadas anteriormente, de la Teoría del Riesgo Colectivo, dependerá de cómo «el tratamiento teórico del riesgo sea unido a la complejidad de los restantes aspectos relacionados con la toma de decisiones».

Las decisiones tomadas, respecto a los elementos de estabilidad del «negocio de seguro», han de perseguir, ahora, la consecución de los fines generales de la empresa, de los que la estabilidad de la cartera de seguros es uno de ellos.

Veamos cuáles son las características principales del citado modelo, así como su aplicación al estudio de la solvencia del ente asegurador.

La ecuación básica del modelo es:

$$Y(t) + I(t) + H(t) = D(t) + C(t) + \Delta U(t),$$

en la que se consideran, por una parte el beneficio de cada periodo y las fuentes del mismo, y por otra su reparto.

—  $Y(t) = [1 + \lambda(t)] \cdot P(t) - X(t)$ , es el beneficio del negocio de seguro. La siniestralidad introduce el elemento estocástico en el modelo.

—  $I(t)$  y  $H(t)$ , son respectivamente el beneficio por inversiones (intereses de los distintos tipos de inversiones menos las transferencias obligatorias a reservas técnicas) y el beneficio de administración (diferencia entre el recargo incluido en la prima comercial por dicho concepto y los gastos realizados). Aunque sobre todo  $I(t)$  posee un fuerte carácter aleatorio, por simplicidad puede suponerse la estimación determinística de los mismos.

—  $\Delta U(t) = U(t) - U(t - 1)$ , indica los recursos dedicados al incremento de las reservas (que notamos por  $U$ , ya que se refiere a un concepto más amplio que las reservas  $S$ ). Para  $U$  se establecen tres niveles  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$ , que sirven para caracterizar la solvencia en un determinado momento. Por encima de  $U_1$ , la solvencia de la compañía es buena;  $U_2$  indica el nivel de alarma;  $U_3$  es el limite por debajo del cual, de acuerdo con la legislación vigente, la empresa no puede seguir operando (ruina).

—  $D(t)$ , representa los pagos de dividendos y participaciones en beneficios de los asegurados. El autor supone su cuantía en un porcentaje del volumen de primas  $D(t) = d \cdot P(t)$ .

—  $C(t)$ , representa la cuantía del beneficio dedicada a reforzar los gastos normales de adquisición y promoción de ventas, su determinación se basa en las reservas: en caso de que superen  $U_1$ ,  $C(t)$  viene dado por una función  $f[a, b, U(t)]$ , creciente respecto a  $U$ ; si la cuantía de las reservas se encuentra entre  $U_1$  y  $U_2$  no se destinarán recursos a incrementar los gastos dedicándolos al refuerzo de la solvencia; por debajo de  $U_2$ , la solvencia de la compañía se encuentra deteriorada, siendo necesarias medidas extremas que llegan a la reducción incluso de los gastos normales de adquisición y ventas, en este caso  $C(t) = -g \cdot P(t)$ .

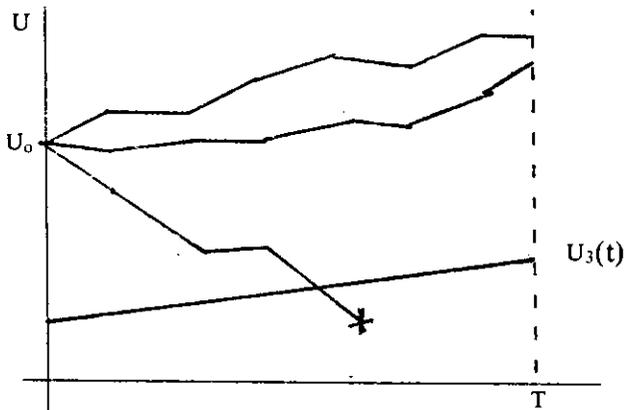
Es necesario conocer la influencia de  $C$  en el volumen de negocio, lo que precisará de estudios empíricos de mercado.

Los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $d$  y  $g$  determinan la distribución del beneficio, así como los que controlan la retención de reaseguro, recargo de seguridad, etc., son los parámetros de decisión del modelo. Un vector de valores de los mismos constituye una estrategia de dirección.

Dados unos valores iniciales de las variables de estado, volumen de primas  $P$ , reservas  $U$  y dividendos repartidos  $P$ , y para una estrategia determinada, podemos obtener, mediante la simulación del modelo, los valores de las variables de estado (o su distribución de probabilidad) para los siguientes periodos.

Elegiremos aquella estrategia que mejor nos conduzca a los objetivos prefijados.

Si nos centramos en el estudio de la solvencia, podemos, para cada estrategia, estimar la probabilidad  $P(U \leq U_3)$  de que las reservas se sitúen por debajo de la cuantía legal mínima a través del cociente del número de realizaciones para las que se produce tal hecho y el total de las mismas.



Esto nos permitirá rechazar aquellas estrategias que lleven aparejada una probabilidad de insolvencia superior al nivel considerado como aceptable.

## BIBLIOGRAFIA

- BEARD, PENTIKAINEN y PESONEN: «Risk Theory». *Methuen & Co. LTD.* London, 1969.
- BERLINER, B.: «On the choice risk loading». 20 CIA. Tokio, 1976.
- BORCH, K.: «Payment of dividend by insurance companies». 17 CIA, 1968. «Mathematical models in insurance». *ASTIN bulletin*, Vol. VIII, 1974.
- DE FINETTI: «Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio». 15 CIA.
- NAYLOR, T. H.: «Experimentos de simulación en computadoras con modelos de sistemas económicos». LIMUSA, 1977.
- NIETO DE ALBA, U.: «Concepción cibernética de la dirección actuarial en la empresa de seguros». CIESI, 1970. «Apuntes de Matemática Actuarial». Fac. CC.EE.
- PENTIKAINEN, T.: A model os stochastic —dynamic prognosis. An application of risk theory to business planning. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1975. A stochastic —dynamic model for insurance business 21 CIA. 1980. Evaluation of the capacity of risk carriers by means of stochastic —dynamic programming. *ASTIN bulletin* (12), 1981.