Números índices. Un planteamiento axiomático

Por

EUGENIO PRIETO PEREZ

Secretario de la Sección Científica del I. A. E.

INTRODUCCION.

Consideramos un cierto fenómeno F, que es observado en el tiempo, en el espacio o, en general, en diferentes estadios de su desarrollo. Interesa con frecuencia comparar los resultados obtenidos en las distintas observaciones realizadas. Pues bien, con la elaboración de números índices, se busca la descripción de las variaciones del fenómeno F sobre la base de ligar cada situación a una tomada como base.

La teoría de los números índices se ha desarrollado fundamentalmente para el estudio de las variaciones de los precios, con la finalidad de poder medir *el nivel general de precios* e, inversamente, *el poder adquisitivo del dinero.* Sin embargo, la aplicabilidad de los números índices no se limita únicamente al estudio de los precios, así, se aplican para describir la variación de los salarios, la producción agrícola e industrial, las cotizaciones bursátiles, etc.

Según Edgeword, *un número índice indica, mediante sus variaciones, los cambios de una magnitud que no es susceptible de medición exacta en sí misma, ni de una evaluación directa en la práctica.*

CLASIFICACION DE LOS NUMEROS INDICES.

El fenómeno F puede venir descrito por una o varias magnitudes, cuya evolución trata de captar el número índice. De acuerdo con esto, clasificaremos los números índices en *simples* y *compuestos,* según F esté descrito por una o varias magnitudes.

Los *índices simples* relacionan por cociente el estado particular de la magnitud M, que describe el fenómeno en la situación base (M_0) y el correspondiente a la situación $t(M_t)$, denotándolo por I_0^t, *por definición* es:

$$I_0^t = \frac{M^t}{M_0}$$

Si para la descripción de F son necesarias las magnitudes $M_1, M_2, \ldots, M_k$ y la situación base se caracteriza por el vector:

$$M_{10}, M_{20}, \ldots, M_{k0}$$

y la situación en t por:

$$M_{1t}\, M_{2t}, \ldots, M_{kt}$$

Un *número índice compuesto*, que describa el cambio de una a otra situación, es una función de los índices simples de las magnitudes M_i ($i=1, 2, \ldots, k$) y de los *pesos de ponderación* de cada índice simple. Los pesos de la ponderación son funciones de variables distintas de los índices simples, hablaremos de ellas como de *funciones de ponderación. La naturaleza de la función de ponderación depende de la cuestión a que se supone ha de responder el número índice.* Emplearemos para la función de ponderación la siguiente notación: W_{kt} (k es el índice asociado a la magnitud M_k y t el momento o situación a que se refiere el índice). En consecuencia, el número índice compuesto sería:

$$I_0^t = \varphi\,(r\, I_0^t,\, W_{r,t}); \qquad r = 1, 2, \ldots k \tag{1}$$

en donde, rI_0^t expresa el *índice simple* asociado a las variaciones de M_r, al pasar de la *situación base* a la situación t.

Podría pensarse, por ejemplo, en que I_0^t fuera el producto interno de los vectores:

$$({}_1I_0^t, {}_2I_0^t, \ldots, {}_kI_0^t)$$

y

$$(W_{1,t}, W_{2,t}, \ldots W_{k,t})$$

PROPIEDADES QUE DEBEN SATISFACER LOS NUMEROS INDICES. AXIOMATICA DE R. W. PFOUTS.

Para tratar de resolver con cierto enfoque formal el problema de la ponderación, los tratadistas de esta cuestión han considerado algunas condiciones básicas que deben satisfacer los números índices compuestos. Ello no quiere decir que si una determinada no las satisface debe eliminarse sin más. A continuación exponemos las condiciones que R. W. Pfouts exige a los números índices compuestos (*).

(*) Véase R. W. PFOUTSH "An axiomatic approach to index numbers". Revue de l'Institut international de statistique, volumen 34, 1966.

CONDICION I.

$$\min_k {}_kI_0^t < I_0^t < \max_k {}_kI_0^t$$

esto es, el índice compuesto debe tomar valores comprendidos entre el *mínimo* y el *máximo* del conjunto de los k índices simples que intervienen en su formación.

CONDICION II.

Si todos los índices simples son multiplicados por un mismo número $\lambda > 0$, el índice compuesto debe experimentar la misma variación, o sea

$$\lambda \cdot I_0^t = \varphi(\lambda \cdot {}_rI_0^t, w_{r,t}); \qquad r = 1, 2, \ldots, n$$

Esta condición es equivalente a exigir *la homogeneidad de grado uno* de φ, respecto de los *índices simples.*

Nótese que esta condición implica que si φ es un cierto tipo de valores medios, ésta debe ser media de potencias, o sea

$$I_0^t = \left(\sum_{r=1}^{n} ({}_rI_0^t)^p \cdot W_{r,t} \right)^{\frac{1}{p}}$$

CONDICION III.

Si a cada M_{rt} $(r = 1, 2, \ldots, n)$ le añadimos una constante C, el índice simple pasaría a ser

$${}_rI_0^t = \frac{M_{rt} + C}{M_{r_0}} = \frac{M_{rt}}{M_{r_0}} + \frac{C}{M_{r_0}}$$

Pues bien, al *índice compuesto* le exigimos que sea *igual al número índice compuesto cuando los números índices simples no han sido incrementados, más un número índice obtenido sustituyendo a los* M_{rt} *por* C.

Esta propiedad significa que si todos los índices simples aumentan en una cantidad, el nuevo índice compuesto es igual al antiguo más el número índice de la cantidad constante.

Dentro de la clase de las medias de potencia, o sea

$$I_0^t = \left[\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{M_{rt}}{M_0 t} \right)^p W_{rt} \right]^{\frac{1}{p}}$$

la condición III solamente satisface para $p = 1$, esto es la media aritmética que, por otra parte, satisface también a las condiciones I y II.

Obsérvese que no decimos que las medias aritméticas sean las únicas fórmulas de número índice. Resulta fácil ver que no existe una única fórmula de número índice, con tal que se acepte la condición I. Un conocido teorema señala que

$$\varphi\,({}_rI_0^{\,t}, W_{r,t}) = \phi\,({}_rI_0^{\,t}, W_{rt}) \qquad \forall_i^t({}_rI_0^{\,t}, W_{rt})$$

es necesario y suficiente que

$$\varphi = a \cdot \phi + b$$

en donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Los números índices podemos clasificarlos en filas y columnas, así:

$$\begin{array}{c c}
 & \text{Período actual} \\
\text{Período base} & \left[\begin{array}{c c c c c c}
 & 0 & 1 & 2 & \dots & n \\
0 & I_0^0 & I_0^1 & I_0^2 & \dots & I_0^n \\
1 & I_1^0 & I_1^1 & I_1^2 & \dots & I_1^n \\
2 & I_2^0 & I_2^1 & I_2^2 & \dots & I_2^n \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
n & I_n^0 & I_n^1 & I_n^2 & \dots & I_n^n
\end{array}\right]
\end{array}$$

Formamos así la matriz

$$B = [I_i^j] \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \dots n \\ j = 0, 1, 2, \dots n \end{pmatrix}$$

en donde, los números índices, con el mismo período base, pertenecen a una misma fila, y los que tienen el mismo período actual, a una misma columna.

CONDICION IV.

Exige que la matriz B de los números índices ha de ser idénticamente *no singular*.

Esta condición, como veremos a continuación, implica que no debería ser posible calcular un índice posterior, conocidos los anteriores, mediante la utilización de una misma relación lineal de aplicación para todos los períodos base. Entonces, cualquier fórmula que suponga una relación lineal tal, debería rechazarse, pues presupone relaciones entre los valores del número índice que no se darían entre los datos empíricos.

En efecto, sabido es que el sistema homogéneo $BX = O$ si es $|B| \neq 0$, sólo tiene la solución trivial $X = (0, \dots, 0)$. Ahora bien, en la hipótesis de que sea $/B/=0$, el rango r de B es menor que el orden $(n+1)$. Supongamos, pues, que es

$$\begin{vmatrix} I_0^0 & I_0^1, & \ldots, & I_0^r \\ I_1^0 & I_1^1, & \ldots, & I_1^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ I_r^0 & I_r^1, & \ldots, & I_r^r \end{vmatrix} \neq 0$$

y hagamos

$$B_1 = \begin{bmatrix} I_0^0 & I_0^1 & \ldots & I_0^r \\ I_1^0 & I_1^1 & \ldots & I_1^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ I_r^0 & I_r^1 & \ldots & I_r^r \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} I_0^{r+1} & \ldots & I_0^n \\ I_1^{r+1} & \ldots & I_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ I_r^{r+1} & \ldots & I_r^n \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} I_{r+1}^0 & I_{r+1}^1 & \ldots & I_{r+1}^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ I_n^0 & I_n^1 & \ldots & I_n^r \end{bmatrix} \qquad B_4 = \begin{bmatrix} I_{r+1}^{r+1} & \ldots & I_{r+1}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ I_n^{r+1} & \ldots & I_n^n \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 X_1 + B_2 X_2 \\ B_3 X_1 + B_4 X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix}$$

Luego

$$B_1 X_1 + B_2 X_2 = O \qquad \Leftrightarrow \qquad B_1 X_1 = -B_2 X_2$$

El vector X_2 puede ser arbitrario y X_1 podría calcularse en función de X_2. Por tanto, si tomamos

$$X_2 = (-1, 0, \ldots, 0)$$

resulta:

$$-B_2 X_2 = \begin{bmatrix} I_0^{r+1} \\ I_1^{r+1} \\ \vdots \\ I_r^{r+1} \end{bmatrix}$$

Y, en consecuencia,

$$\begin{bmatrix} I_0^0 & I_0^1 & \dots & I_0^r \\ I_1^0 & I_1^1 & \dots & I_1^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_r^0 & I_r^1 & \dots & I_r^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0^{r+1} \\ I_1^{r+1} \\ \vdots \\ I_r^{r+1} \end{bmatrix}$$

esto es, pueden ser obtenidos los índices I_s^{r+1} $(s=0, 1, 2, \dots, n)$, conociendo $I_s^0, I_s^1, \dots, I_s^r$.

FORMULAS DE NUMEROS INDICES MAS UTILIZADOS.

Primeramente analizaremos las denominadas fórmulas de Laspeyres y Paasche, que daremos aplicadas a la formación de *índices bursátiles* y *de coste de vida*, para, posteriormente, referirnos a la denominada fórmula de I. Fisher.

INDICES BURSATILES.

Nos limitaremos al índice de los valores de renta variable. El índice se elabora sobre la base de un pequeño número de títulos cotizados en la Bolsa considerada. La selección se hace de acuerdo con dos características, a saber:

* Número de días que cada valor fue cotizado en un cierto período.

** El número de transacciones efectuadas para cada valor en el mismo año.

Emplearemos las notaciones siguientes:

C_{kt}=Cotización en el momento t de los títulos de la clase $k=1, 2, \dots, n$.

C_{k0}=Cotización en el momento, tomado como base, de los títulos de la clase k.

A efectos de la aplicación de la fórmula para la obtención del índice, se hace preciso introducir en la estimación de C_{kt} las oportunas correcciones para tener en cuenta las variaciones que experimenta la cotización por causas distintas de la oferta y demanda de valores, variaciones por ampliación de capital, cortes del cupón, etc.

$Q_{k0}=C_{k0} \cdot n_{k0}$ es la *capitalización bursátil de los títulos de la clase* k, *o sea, el producto de la cotización en el momento base por el número de estos títulos en circulación en el momento base.*

$Q_{kt}=C_{kt} \cdot n_{kt}$ es la capitalización bursátil de los títulos de la clase k en el momento t.

a) *Fórmula de Laspeyres.*—Se define así:

$$I_L=\sum_{k=1}^{n} \frac{C_{kt}}{C_{k0}} \cdot \frac{Q_{k0}}{\sum_{k=1}^{n} Q_{k0}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_{kt} \cdot n_{k0}}{\sum_{k=1}^{n} C_{k0} \cdot n_{k0}}$$

La función de ponderación de cada título viene dada por la capitalización bursátil del título didivida por la cotización bursátil de los n títulos considerados para la elaboración del índice, en el momento *base*.

El índice I_L es el promedio aritmético de los índices simples correspondientes a la cotización de cada título (${}_kI_0^t$ $k=1, 2, \ldots, n$). Hemos visto que la media aritmética cumple las *cuatro condiciones* anteriormente señaladas a exigir a las fórmulas de los números índices.

b) *Fórmula de Paasche.*—Viene dada por

$$I_P=\sum_{k=1}^{n} \frac{C_{kt}}{C_{k0}} \cdot \frac{C_{k0} \cdot n_{kt}}{\sum_{k=1}^{n} C_{k0} \cdot n_{kt}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_{kt} \cdot n_{kt}}{\sum_{k=1}^{n} C_{k0} \cdot n_{kt}}$$

Aquí, la función de ponderación es:

$$W_{kt} = \frac{C_{k0} \cdot n_{kt}}{\sum_{k=1}^{n} C_{k0} \cdot n_{kt}}$$

El índice de Paasche también satisface las condiciones de I a IV o *aximas de consistencia,* anteriormente expuestos.

ÍNDICES DEL COSTE DE VIDA.

Con su elaboración se busca una medida para las variaciones en el coste de un determinado conjunto de bienes perfectamente especificado, ya sea en el tiempo o en el espacio.

A efectos de la mejor comprensión del significado, limitaciones y diferencias con otros índices conviene dar algunas definiciones:

DEFINICION I.

Estrato de referencia del índice del coste de vida es un *grupo demográfico perfectamente definido.*

DEFINICION II.

Cesta de la compra correspondiente a un cierto estrato es el conjunto de bienes y servicios consumidos por el estrato de referencia, y que significan un porcentaje del gasto total de los individuos que lo forman, que supera uno dado como mínimo.

La composición de la cesta de la compra se mantiene invariable, mientras que los bienes y servicios que la integran sigan produciendo la misma satisfacción a las personas del estrato de referencia (*).

DEFINICION III.

El índice de coste de vida tiene por objeto medir la evolución en el tiempo, del coste del conjunto de bienes y servicios que integran la *cesta de la compra* correspondiente a un cierto *estrato de referencia.*

Desde el punto de vista metodológico conviene observar lo importante que resulta fijar claramente las normas que determinan:

1) El estrato de referencia.

2) La composición de la cesta de la compra, especificando perfectamente la calidad y naturaleza de los bienes y servicios que la integran.

3) El criterio para determinar los precios de los bienes y servicios que forman la cesta en cada situación posible.

(*) Se comprende, pues, la necesidad de revisar la composición de la cesta de la compra periódicamente.

NOTACIONES.

Emplearemos las siguientes:

P_{i0}=Precio del bien o servicio i $(i=1, 2, \ldots, n)$ en la situación tomada como base.

P_{it}=Precio del bien o servicio i $(i=1, 2, \ldots, n)$ en la situación t.

Q_{i0}=Cantidad del bien o servicio de la clase i, en la situación base.

Q_{it}=Cantidad del bien o servicio i en la situación t.

a) *Fórmula de Laspeyres.*—Este caso será:

$$I_L = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_{it}}{P_0} \cdot \frac{P_{i0} \cdot Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0} \cdot Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0} \cdot Q_{i0}}$$

en donde

$$W = \frac{P_{i0} \cdot Q_{i0}}{\sum_{1}^{n} P_{i0} \cdot Q_{i0}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

es el peso de ponderación del índice simple $iI_0^t = P_{it}/P_{i0}$. El significado de W_i es el siguiente: *El cociente entre el valor de los artículos de la clase i-ésima, contenidos en la cesta de la compra a precios del año base y el valor del total de los artículos contenidos en la cesta, a estos mismos precios.*

b) *Fórmula de Paasche.*—Tiene la misma estructura analítica que la de Laspeyres, cambiando solamente los pesos de ponderación. En ella es:

$$W_i = \frac{P_{i0} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0} \cdot Q_{it}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Por tanto,

$$I_P = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_{it}}{P_{i0}} \cdot \frac{P_{i0} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0} \cdot Q_{it}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{i0} \cdot Q_{it}}$$

INDICE DE FISHER.

Se define como la media geométrica de los índices de Laspeyres y Paasche, esto es:

$$I_F = \sqrt{I_L \cdot I_P}$$

Nótese que este índice, al definirse como una media geométrica, no cumple la condición III de las exigidas por Pfouts a las fórmulas de los números índices.

Históricamente, sin embargo, se consideró una *fórmula ideal,* en el sentido a que cumplía cuantas propiedades son estimadas convenientes para que fueran satisfechas por este tipo de fórmulas. Parece, pues, oportuno para terminar, dar un repaso a las pruebas tradicionales a que eran sometidas las fórmulas de números índices.

PRUEBAS TRADICIONALES PARA EXAMINAR LAS FORMULAS DE NUMEROS INDICES.

Las pruebas tradicionales han estado implícitamente basadas en la creencia de que las fórmulas del número índice deberían comportarse como si fueran escalares.

a) *Prueba de independencia de la base.*—Se exige a la fórmula que cumpla la propiedad

$$\frac{I_i^t}{I_i^k} = I_k^t; \qquad i, t, k, = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Veamos que esta prueba es incompatible con la condición IV. En efecto, si en la matriz B multiplicamos la i-ésima por $1/I_i^k$, encontramos la matriz A siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} I_0^0 & I_0^1 & \ldots & I_0^k \\ I_1^0 & I_1^1 & \ldots & I_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{I_i^0}{I_i^k} & \dfrac{I_i^1}{I_i^k} & \ldots & \dfrac{I_i^n}{I_i^k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ I_n^0 & I_n^1 & \ldots & I_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0^0 & I_0^1 & \ldots & I_0^n \\ I_1^0 & I_1^2 & \ldots & I_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ I_k^0 & I_k^1 & \ldots & I_k^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ I_n^0 & I_n^1 & \ldots & I_n^n \end{bmatrix} = \text{fila } i\text{-ésima.}$$

Luego, las filas i-ésima y k-ésima son iguales, por tanto, es $/A/=0$. Ocurre, sin embargo, que la operación realizada en B para obtener A, es elemental y en consecuencia, no puede cambiar el rango de B. La conclusión es inmediata: La prueba de la independencia de la base, implica la violación de la condición IV. Entonces, dentro del cuadro de condiciones anteriormente señalado la *prueba de independencia de la base es ilegítima.*

La prueba de independencia de la base la cumplen los números índices simples. Exigirla a los números índices compuestos significa darle a las fórmulas de números índices un tratamiento de escalares.

b) *Prueba circular.*—Se exige a la fórmula del número índice que satisfaga la propiedad

$$I_i^{i+1} \cdot I_{i+1}^{i+2} \cdot I_{i+2}^{i} = 1 \qquad [1]$$

Esta prueba esté estrechamente relacionada con la anterior, pues, al verificarse, se cumple:

$$I_i^{i+1} \cdot I_{i+1}^{i+2} \cdot I_{i+2}^{i+3} \cdot I_{i+3}^{i} = 1 \qquad [2]$$

De [1] y [2], resulta:

$$I_{i+2}^{i} = I_{i+2}^{i+3} \cdot I_{i+3}^{i} \quad \Rightarrow \quad I_{i+3}^{i} = \frac{I_{i+2}^{i}}{I_{i+2}^{i+3}}$$

Por consiguiente, esta prueba está en conflicto con la condición IV, y por tal razón debe ser descartada.

La prueba circular es completamente lógica para una sucesión de índices simples, aunque no sea lógica para los índices compuestos.

c) *Prueba de reversibilidad en el tiempo.*—Exige que

$$I_i^t \cdot I_t^i = 1 \qquad [3]$$

Esta prueba es también un ejemplo de intento de hacer que las fórmulas de números índices se comporten como si fueran escalares. No parece tener una plausibilidad intuitiva, una tal exigencia. De hecho parece ser indebidamente restrictiva.

Veamos que el índice de Laspeyres no satisface [3]. Ello es debido a que no satisface la condición IV. Tenemos:

$$I_i^j \cdot I_j^i = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_{kt} \cdot H_{ki}}{\sum_{k=1}^{n} P_{ki} \cdot H_{ki}} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} P_{ki} \cdot H_{kt}}{\sum_{k=1}^{n} P_{kt} \cdot H_{kt}} \neq 1$$