Los problemas de elección de tablas de mortalidad

Comunicación presentada al vigésimo Congreso Internacional de Actuarios

TOKYO

25 de octubre-1 de noviembre de 1976

por

ANTONIO MARTINEZ VAZQUEZ

Profesor de Universidad; Miembro de: la Asociación Actuarial Internacional; la Asociación para el Estudio de los Seguros de No Vida y Teorías del Riesgo; la Real Sociedad Matemática Española; la Sociedad Española de Investigación operativa; Estadística e Informática; el Instituto de Actuarios Españoles

I. INTRODUCCION

La evolución de la Ciencia, del bienestar, del comportamiento y de la estructura social, entre otros motivos, han generado una notable mutación en las concrecciones fenomenológicas de la mortalidad a lo largo de nuestro siglo. Ello permite aseverar que la hipótesis de estacionariedad para un proceso estocástico de eliminación, referido a tal fenómeno, resulta difícilmente defendible. Ya Wolff (1959) se percató de este comportamiento evolutivo y propuso algunas correcciones en las tablas de mortalidad preexistentes, basándose en observaciones realizadas hasta aquella época. Posteriormente se ha podido observar que el proceso de actualización realizado en algunos países sobre las tablas de mortalidad refuerza positivamente las aseveraciones iniciales y las aportaciones de Wolff (op. cit.), por lo que inicialmente ante tal fenómeno pueden presentarse las siguientes alternativas.

a) Dar al proceso inferencial de la ley de mortalidad que rige el colectivo de asegurados la categoría de validez temporal, con reiteración completa del mismo, sin tener en cuenta los datos precedentes, transcurrido cierto período de tiempo.

b) Corrección de la fórmula interpretativa de la ley de mortalidad previamente obtenida, tal como propugna Wolff (op. cit.).

c) Adopción de una tabla de mortalidad construida sobre una inforción estadística procedente de otro colectivo, en la confianza de que interprete fielmente la ley de probabllidad del colectivo del que no se dispone de información estadística suficiente para un proceso inferencial estimativo.

d) Elección de fuentes de información estadística suficiente, aunque no provenga del colectivo en cuestión para la construcción de una tabla de mortalidad que sea representativa de la ley que rige la de este colectivo.

Puesto que en muchos casos no se dispone de información estadística directa para la adopción de la alternativa a), y en todo caso la alternativa b) se refiere únicamente a una corrección numérica y no a una mutación de la concreta ley de mortalidad con que inicialmente se ha interpretado el comportamiento del colectivo lo que requiere que la Función de Distribución de Probabilidad (F. D. P.) pertenezca a lo que hemos definido como clase de alternativas de Lehmann generalizadas del segundo tipo (1975), considerándola como una extensión de la dada por este autor en 1953 y la validez de tal hipótesis exige un previo contraste que, además del consumo temporal, puede dar resultados negativos. Por ello nos ocupamos aquí solamente de los procesos relativos a las alternativas c) y d) anteriormente formuladas aplicando criterios de distribución libre, cuyas propiedades les hacen admisibles, como referiremos.

II. ELECCION DE TABLAS DE MORTALIDAD

Si se dispone de un conjunto C_1 de tablas de mortalidad, en cuya construcción no se advierten errores, y de una reducida información estadística proviniente del colectivo de asegurados cuya mortalidad se necesita interpretar por medio de una ley, procede preguntarse si resulta admisible la alternativa c), esto es, si se puede elegir para representar el comportamiento biométrico del colectivo en consideración alguna de las tablas de mortalidad construidas con información estadística procedente de colectivos exteriores, aunque similares al dado, y en caso afirmativo cuál de ellas.

Para la solución de este problema se han de tener en cuenta los siguientes puntos:

1.º Que las tablas de mortalidad que constituyen el conjunto sobre el que se ha de realizar la elección, correspondan a una ley abstracta del mismo orden y categoría que la que interpreta el comportamiento del colectivo en consideración.

2.º Cuando exista una adherencia razonable entre las tablas de mortalidad a adoptar y la reducida información estadística que se posee del colectivo cuyo comportamiento se pretende interpretar por medio de una ley dimanante de tal tabla.

Para resolver el problema suscitado bajo el punto 1.º es suficiente realizar, en base a los datos disponibles y obtenibles a partir de cada una de las tablas pertenecientes a C_1, una caracterización de la ley por medio de la matriz de Hankel, según la clásica teoría de A. Quiquet (1893), y comparar los resultados obtenidos a partir de los datos generados por cada elemento de C_1 con los logrados en base a la información suministrada por el colectivo en cuestión, determinando así la coincidencia de órdenes difeomórficos de las leyes de probablidad a elegir con la que realmente rige el colectivo, definiendo de este modo el conjunto $C_2 \subset C_1$.

Establecido este subconjunto, procede encontrar el que está caracterizado por la propiedad de isofuncionalidad, que será denotado por C_3, que cumple la relación contractiva $C_3 \subset C_2$. Para ello se considera que la precisión de la ley para cada elemento de C_2 está dada por el estadístico $T_1^* = T_1(t_1, \ldots, t_k;\ x, \ldots, x+n)$ y la ley que rige el colectivo por el estadístico $T_2^* = T_2(t_1, \ldots, t_k;\ x, x+1, \ldots, x+n)$, ambos obtenidos de la ecuación resultante de igualar a cero el determinante de la matriz de Hankel y la condición específica de cada ley.

Denotando por $X=(x, \ldots, x+n)$ las edades correspondientes a las informaciones muestrales disponibles, se puede definir un estadístico de rango ordenado, por medio de la relación:

$$S^* = \sum_{X} I_{\mathbf{R}^+}(|T_1^* - T_2^*|)$$

donde $I_C(y)$ es la función indicatriz del conjunto C, esto es,

$$I_C(y) \begin{cases} = 1 \ \forall \ y \in C \\ = 0 \ \forall \ y \notin C \end{cases}$$

y como la coincidencia de leyes exige que:

$$P(T_1^* - T_2^* \in \mathbf{R}^+) = P(T_1^* - T_2^* \in \mathbf{R}^-) = 0{,}5$$

con $\mathbf{R}^{\pm}$ representativo de la clase de números reales positivos (negativos), se puede efectuar un contraste en mediana, determinando la región crítica por medio de

$$\boxed{P(S > K_1) = I_{0,5}(K_1, n - K_1 + 1) = \varepsilon} \qquad [1]$$

obteniendo K_1 de la relación existente entre el segundo y tercer miembro de [1] haciendo uso de las tablas de la F. D. P., Beta incompleta y logrado lo cual, se puede decidir de la forma siguiente:

Si el estadístico S^* está acotado superiormente por K_1, se admite la hipótesis de coincidencia de leyes funcionales de las tablas a elegir, con la que rige el colectivo de asegurados de información reducida. Se han determinado de esta manera todos los elementos integrantes de C_3, ya que las tablas para las cuales se verifica $S^* \geqslant K_1$ pertenecen a un subconjunto del complementacio de C_3, es decir a $C_3^* \cap C_3$, con lo que el primer problema queda prácticamente resuelto.

Para la solución del segundo punto, procede realizar sobre los elementos de C_3 contrastes de adherencia (también llamados de bondad de ajuste), pero por no disponer de datos agregados ni de información muestral de tamaño considerable, no se propone el estadístico generado por una forma cuadrática que tiene su origen en K. Pearson (1900), ya que en este caso, de acuerdo con H. Chernoff y E. L. Lehmann (1954), no se puede asegurar la verificación del teorema de W. Cochran (1952) para tal estadístico.

Dado que lo único que interesa en este caso es la medida de la distancia vertical unilateral entre la F. D. P. empírica generada a partir de la reducida información procedente del colectivo y las teóricas —obtenidas a partir de los elementos C_3— se propone para el contraste de adherencia, el conocido estadístico de Smirnov-Kolmogorov que es aplicable para tamaños muestrales pequeños y para cualquiera F. D. P. básica no degenerada.

Como el criterio de suficiencia requiere el uso de unas tablas de mortalidad (supervivencia) que suministren unas probabilidades ligeramente superiores a las correspondientes al colectivo a asegurar para caso de muerte (vida), se ha de aplicar el estadístico unirrámico $D_N{}^+$, de Smirnov-Kolmogorov, dado por

$$\boxed{D^+{}_N = \sup_X \left[F_N(x) - F^j{}_X(x)\right]} \qquad [2]$$

donde $F_N(x)$ es la F. D. P. empírica obtenida a partir de los elementos naturales y $F_X{}^j(x) \forall j \in I_k = (1, 2, \ldots, k)$; $k = \text{card } C_3$ la F. D. P. obtenida para cada uno de los elementos de C_3.

Actualmente se dispone de la F. D. P. exacta para el estadístico $D_N{}^+$, ya que ésta ha sido dada por Z. W. Birnbaum y F. H. Tingey (1951) y Z. W. Birnbaum (1953), mediante la relación.

$$P(D^+_{N^-} < \gamma) = O \cdot I_{\mathbf{R}^-}(\gamma) + I_{(0,1)}(\gamma) \int_{1-\gamma}^{1} \int_{\frac{N-1}{N}-\gamma}^{U_N} \cdots \int_{\frac{2}{N}-\gamma}^{U_3} \int_{\frac{1}{N}-\gamma}^{U_2} f(u_1, \ldots u_N)\, du_1 \ldots du_N + I_{(1,\infty)}(\gamma)$$

con

$$f(u_1, \ldots u_N) = N! \prod_{i \in I_K \cup O} I_{\mathbf{R}^+}(\Delta x_i)$$

tal que

$$x_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad x_N = 1$$

lo que permite establecer también

$$P(D^+_N > \gamma) = \sum_{h \in I_{[N(1-\gamma)]} \cup O} \binom{N}{h} \left(1 - \gamma - \frac{h}{N}\right)^{N-h} \left(\gamma + \frac{h}{N}\right)^{h-1}$$

expresión que resulta más sencilla, pudiendo obtenerse a partir de ella los valores numéricos de los $(1-\varepsilon)$—cuantiles para $\varepsilon = 0{,}001$; $0{,}01$; $0{,}05$; y para $N = 5, 8, 10, [10], 50$, con error menor de $5 \cdot 10^{-5}$, que se pueden comparar con los obtenidos por A. Wald y J. Wolfowitz (1939) para la distribución asintótica dada por

$$P(D_N^+ > \gamma) = \exp\{-2\gamma^2\}$$

que fue fundamentada heurísticamente por J. L. Boob (1949) y extendida por M. D. Donsker (1952), para concluir que existen diferencias poco significativas cuando el tamaño muestral es mayor que 50. Estas tablas están disponibles gracias a L. H. Miller (1956) y a V. J. Bradley (1968). Además, el estadístico propuesto en muchos casos es más potente que el χ^2 de Pearson, como ha probado M. J. Slakter (1965), y como han demostrado P. Schmid (1958) y J. E. Walsh (1963); cuando la F. D. P. subyacente represente una medida de probabilidad que es absolutamente continua con respecto a (c. r. a.) x con x perteneciente al conjunto de los números naturales N^*, que sea no degenerada, tal estadístico es aplicable.

Establecida esta fundamentación se puede usar sin duda ni temor el estadístico dado por la relación [2] y considerando un $\varepsilon \in [0, 001, 0,1]$, es posible hallar el $(1-\varepsilon)$-cuantil $D_N^+(1-\varepsilon)$ y definir el conjunto de tablas de mortalidad definitivamente admisibles, dado por C_{ma}, que cumple la condición de ser un subconjunto de C_3 y estar definido por medio de la siguiente relación:

$$C_{ma} = \{F^j{}_X(x)\,;\; D^+{}_{N,j} < D^+{}_N(1-\varepsilon)\}$$

y la tabla de mortalidad elegida estará dada por una ley cuya F. D. P. $R_X{}^i)x)$ sea tal que

$$C^+{}_{N,i} = \min_j \{D^+{}_{N,j}\,;\; D^+{}_{N,j} < D^+{}_N(1-\varepsilon)\}$$

Pero este procedimiento no excluye la hipótesis de veracidad de la relación $C_{ma} = \emptyset$, esto es, que ninguna de las tablas de mortalidad disponibles sea considerada como admisible para representar directamente la ley de mortalidad del colectivo de asegurados.

Con el fin de resolver este último problema, se puede optar por una de las siguientes alternativas:

a) Corrección de posición en las F. D. P. asociadas a las tablas de mortalidad disponibles, incluyendo dentro de éstas las aplicadas hasta este momento.

b) Corrección factorial, que se ha de realizar sobre los momentos pertenecientes a la clase definida en la alternativa a), manteniendo el criterio de coincidencia de leyes, señalado en el punto primero de este problema.

c) En el caso de obtener resultados negativos en los procesos a) y b) o no admitidos por cualquier causa y si se dispusiera de informaciones estadísticas suficientes para la construcción de una tablas de mortalidad, pero procedentes también de unos colectivos exteriores al que se pretende investigar la ley, podría construirse una tabla de mortalidad representativa de tal ley, eligiendo previamente la fuente de información más adherente.

Para estas tres alternativas se puede proceder de la forma siguiente:

III. METODO DE LA MUTACION POSICIONAL

La clase de todas las F. D. P. asociadas a las tablas de mortalidad disponibles correspondientes a colectivos exteriores que integran el conjunto C_8, anteriormente definido, al que hay que unir la F. D. P. que hasta este momento se ha considerado como representativa de la ley de probabilidad de muerte para los elementos del colectivo, denotada por $F_X^0(x)$, y realizar sobre cada una de éstas, una operación equivalente a un aumento o disminución de las edades, definiendo, tras aplicar el criterio dado en [1] a $F_X^0(x)$, la clase $\mathcal{C}_1$ por medio de los siguientes estadísticos:

$$D^+_{N,0,\alpha_0} = \sup_x \left[F_N(x) - F_X^0(x - \alpha_0)\right]$$

con α_0 menor que el primer estadístico ordenado por medio de la relación $<$ a partir de X, siendo este estadístico aplicable en el caso de invarianza de la característica funcional de la ley de eliminación del colectivo.

Sin exigir esta hipótesis, puesto que los elementos de C_3 están actualizados en su característica funcional c. r. a. colectivo de asegurados, se puede aplicar sobre ellos el estadístico

$$D^+_{N,j,\alpha_j} = \sup_x \left[F_N(x) - F_X^j(x \pm \alpha_j)\right]$$

donde el signo $\pm$ está motivado por el hecho de que los colectivos exteriores estén regidos por una ley de probabilidad, cuya F. D. P. sea inferior (superior) a la del colectivo en consideración, y en el primer caso, α_j, ha de cumplir únicamente la condición de ser un número natural.

Sobre la clase $\mathcal{C}_1$, anteriormente definida, se aplica un criterio de decisión que coincide con el establecido para C_{mn}.

IV. METODO DE LA CORRECCION FACTORIAL

Con los elementos señalados en el capítulo III; tras de aplicar los resultados de sus correcciones la relación [1], y de estar seguro de la invarianza de su orden difeomórfico, c. r. a., la corrección realizada se puede definir la clase $\mathcal{C}_2$ por medio de los siguientes estadísticos.

$$\boxed{D^+_{N,0,\lambda_0} = \sup_x \left[F_N(x) - \lambda_0 F_X^0(x)\right]} \quad [3]$$

con $\lambda_0 \in (0, 1)$ y

$$\boxed{D^+_{N,j,\lambda_j} = \sup_x \left[F_N(x) - \lambda_j F_X^j(x)\right]} \quad [4]$$

con $\lambda_j \in (0, K)$; $KF_X^j(x) \leq 1 \forall x \in (0, \omega)$.

Dado que la F. D. P. asociado a los estadísticos [3] y [4] fue hallada por M. Dwas (1959) y A. P. Dempster (1959), no existen dificultades para definir la clase $\mathcal{C}_2$ para un cierto nivel de significación ε.

En el caso de que las clases $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ fuesen vacías para unos ciertos α_j y λ_j $\forall j \in I_k \cup 0$, el problema quedará reducido a elegir otros α_j y λ_j, que cumplan las condiciones de la definición, hasta transformar las tablas de mortalidad disponibles en otras realmente admisibles.

V. ELECCION DE FUENTES DE INFORMACION

Si resultara tedioso encontrar los coeficientes de corrección α_j y λ_j $\forall j \in I_k \cup 0$, y se dispusiera de fuentes de información distintas de la del colectivo de asegurados, y teniendo en cuenta el nivel actual de la sanidad nacional, la validez temporal del proceso de selección por reconocimiento médico [según afirma Insolera (1937)], y que tal proceso no se aplica en muchos casos, concretamente en los bloques de capitales asegurados de pequeña cuantía, ha sido sugerida por elementos prácticos la construcción de tablas de mortalidad con información estadística procedente de la población general, pero denotando por $F(x)$, $F_1(x)$ y $F_2(x)$, las F. D. P. correspondientes a la población general, a los riesgos seleccionados y a los riesgos agravados, respectivamente, como demuestra F. Insolera (op. cit.), se cumple la siguiente relación:

$$F_1(x) \leqslant F(x) \leqslant F_2(x) \quad \forall x \ (0, \omega)$$

lo que depararía una supersuficiencia para las probabilidades de fallecimiento, o insuficiencia para las de supervivencia.

Para evitar esto último si se dispone de una información estadística $\{q^0_{x_i}\} \forall i \in I_{n_0}$ obtenida del colectivo de asegurados con n_0 suficientemente pequeño, digamos $n_0 \leqslant 10$, y de informaciones muestrales procedentes de k colectivos exteriores, que puedan servir de base para la construcción de una tabla de mortalidad asignada a cada uno de tales colectivos, cuyas informaciones están dadas por $\{q^j_{x_i}\} \forall i \in I_{n_j}, \forall j \in I_k$, se pueden definir las correspondientes F. D. P. empíricas $F^0_{n_0}(x)$ y $F^j_{n_j}(x) \forall j \in I_k$, determinando la clase de fuentes de información admisibles por medio del estadístico bimuestral descubierto por Kolmogorov (1939), dado por

$$D^+_{n_0, n_j} = \sup_x \left[F_{n_0}(x) - F_{n_j}(x)\right]$$

que se ha de aplicar para contrastar la hipótesis H: $F_{n_0}(x) = F_{n_j}(x)$ frente a la alternativa K: $F_{n_0}(x) > F_{n_j}(x)$, cuyo estadístico es de la misma naturaleza que el empleado en el capítulo II de este trabajo, para una F. D. P. $F^j_X(x)$, previamente obtenida.

La F. D. P. asociada al estadístico $D^{+}_{n_0, n_j}$, puede obtenerse fácilmente como han demostrado Z. W. Birnbaum y R. A. Hall (1960) bajo la hipótesis $n_0 = n_j$, esto es de igualdad de tamaños muestrales, lo que además permite la resolución de problemas muy amplios, pues la tabla de doble entrada dada por estos autores, ha sido obtenida por medio de un programa IBM 360, con errores acotados por $5 \cdot 10^{-5}$, y tamaños muestrales menores que 40.

El problema de potencia y eficiencia del estadístico propuesto fue estudiado por L. Vincze (1967), y al ser considerado por G. P. Steck (1969), como un estadístico de rango, le son aplicables las propiedades de ser fuertemente de libre distribución, insesgued, potencia y potencia asintótica, como ha referido también C. S. Yu (1972).

Si la clase de fuentes de información admisibles fuese vacía, sería de nuevo aplicables consideraciones de corrección dadas en III y IV, pero si tales diferencias fueran atribuibles al proceso de selección de riesgos propuesto por F. Insolera (op. cit.) sería muy conveniente determinar con criterio no paramétrico el período de antiduración para el que coincide la mortalidad del colectivo de asegurados con la proviniente de los colectivos exteriores, según los estadísticos bimuestrales dados en la tabla I.

Así (ver tabla I) $D^{+}_{n_{t_j}, n_i}$ es el estadístico de antiduración t_j, y el i-ésimo colectivo exterior. En este caso la clase de colectivos exteriores admisibles como fuentes de información estará dada por $\{D_{n_{t_j}, n_i}\}$ con la condición de acotabilidad superior por medio del $(1-\varepsilon)$-cuantil $D^{+}_{n, n}(1-\varepsilon)$ y se elegirá entre los menores es *c. r. a.* n_i, el que estuviera afectado de una menor antiduración, y si tal antiduración fuera aún menor que el período de renovación determinado con el criterio dado por W. Saxer (1958) —por ejemplo— tal elección no requeriría corrección alguna, mas si esto no ocurriera, la corrección sería necesaria.

Otro criterio alternativo para determinar tanto la clase de tablas de mortalidad, como la de fuentes de información admisibles, sería el contraste k-muestral de Kolmogorov, formulado por H. T. David)1958), Z. W. Birnbaum y R. A. Hall (op. cit.), W. J. Conover (1965) y M. Csorgó (1966), aunque en este momento para la resolución de estos problemas sea más aconsejable el contraste bimuestral unirrámico que hemos propuesto

Finalmente, es de notar que la comparación con los subcolectivos de la cartera del ente asegurador, definidos por la antiduración, resulta también aplicable a la resolución del problema de elección de tablas de mortalidad previamente construidas considerado bajo la sección II de este trabajo.

TABLA I

Colectivo de antiduración t_i \ Colectivo exterior	1	2	3	...	k
t_1	$D^+_{n_{t_1}, n_1}$	$D^+_{n_{t_1}, n_2}$	$D^+_{n_{t_1}, n_3}$	...	$D^+_{n_{t_1}, n_k}$
t_2	$D^+_{n_{t_2}, n_1}$	$D^+_{n_{t_2}, n_2}$	$D^+_{n_{t_2}, n_3}$	...	$D^+_{n_{t_2}, n_k}$
...	....	....	....	...	....
t_{k-1}	$D^+_{n_{t_{k-1}}, n_1}$	$D^+_{n_{t_{k-1}}, n_2}$	$D^+_{n_{t_{k-1}}, n_3}$	...	$D^+_{n_{t_{k-1}}, n_k}$
t_k	$D^+_{n_{t_k}, n_1}$	$D^+_{n_{t_k}, n_2}$	$D^+_{n_{t_k}, n_3}$	...	$D^+_{n_{t_k}, n_k}$

BIBLIOGRAFIA

BIRNBAUM, Z. W. (1953): *Distribution-free tests of fit for continouos distributions, functions.* A. M. S., 24; 1-8.

— And TINGEY, F. H. (1951): *One-sided confidence contourns for probability distribution functions.* A. M. S., 22; 592-6.

— And HALL, R. A. (1960): *Small sample distribution-free for multi-sample statistics.* A. M. S., 31; 710-720.

BRADLEY, J. V. (1968): *Distribution-free statistical tests.* Prentice-Hall.

COCHRAN, W. (1952): *The χ^2 test of goodness of fit.* A. M. S., 25; 315-45.

CONOVER, W. J. (1965): *Several k-sample Kolmogorov-Smirnov test.* A. M. S., 36; 1019-26.

CSORGO, M. (1966): *Some k-sample Kolmogorov-Smirnov-Renyi type theorems for empirical distribution functions.* Act. Math. Ac. Sc. Hungrian, XVII (3-4), 325-34.

CHERNOFF, H. and LEHMANN, E. L. (1954): *The use of the maximun likelihood estimate in χ^2 tests for goodness of fit.* A. M. S., 25; 579-86.

DAVID, H. T. (1958): *A three sample Kolmogorov-Smirnov test.* A. M. S., 29; 842-51.

DEMPSTER, A. (1959): *Generalized D_n^+ statistics.* A. M. S., 30; 593-7.

DONSKER, M. D. (1952): *Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems.* A. M. S., 23; 271-81.

DOOB, J. L. (1949): *Heuristic aprroach to the Kolmogorov-Smirnov theorems*. A. M. S., 20; 393-403.

DWAS, M. (1959): *The distribution of the a generalized* D_n^+ *statistic*. A. M. S., 30; 1024-8.

INSOLERA, F. (1937): *Corso di Matematica Finanziaria*. Societa Real Mutua di Assicurazioni di Torino.

LEHMANN, E. L. (1953): *The power of rank tests*. A. M. S., 24; 23-43.

MARTÍNEZ VÁZQUEZ, A. (1975): *The nonparametric statistic in its applications to the management and actuarial sciences*. Preprint.

MILLER, L. H. (1956): *Table of percentage point Kolmogorov statistics*. J. A. S. A., 51; 111-21.

PEARSON, K. (1900): *On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of correlated system of variables in such that it can reasonably be supposed to have arisen from random samples*. Philosophical Magazine, 40, 157-75.

QUIQUET, A. (1893): *Representation algebrique des tables du survies*. Bull. de línst. des Act. Franç. núm. 14. Referee by LASHERAS SANZ, A. (1948). Matemática del Seguro. Dossat.

SAXER, W. (1958): *Versicherungmathematisk*. Zweiter Teil. Springer Verlag.

SCHMID, P. (1958): *On the Kolmogorov and Smirnov limit theorems for discontiouos distributions functions*. A. M.S., 30; 10011-27.

SLAKTER, M. J. (1966): *Comparative validity of the chi square and two modified chi-square goodness of fit test for smal but equal expected frecuencies*. Biometric, 53; 619-22.

SMIRNOV, N. V. (1939): *On the estimation of discrepancy empirical, curves of distribution for two independent samples* (*Russian*). Bull. Moscow University. 2-2, 3-16. (Referee by CONOVER, W. J. Practical Nomparametric Statistic, John Wilel & Sons. Inc.)

STECK, G. P. (1969): *Smirnov two sample tests as rank tests*. A. M. S., 40; 1449-65.

VINCZE, L. (1967): *On some questions connected with two-sample tests of Smirnov type*. Proc. Fifth Berkeley Symposium, I, 657-66.

WALSH, J. E. (1963): *Bounded probability propieties of Kolmogorov-Smirnov and similar statistics for discrete data*. Ann. Inst. Stat. Math. Japan, 13; 153-8.

WOLFF, K. H. (1959): *Die Zeitliche Anderung der Sterblichkeit und ihre Berchsichtigung in der Pensionenversicherung*. Proc. of the the Second Intern. Conf. of Social Security Actuaries and Statisticians.

YU, C. S. (1972): *Pitman eficiencies of the Kolmogorov-Smirnov tests*. A. M. S., 43; 1595-1605.

RESUMEN

En esta comunicación, tras presentar el problema de la evolución del fenómeno de la mortalidad, se formulan diferentes alternativas para la solución del mismo, tales como la nueva construcción de tablas con información directa, la corrección de las tables preexistentes propuesta por K. H. Wolff, la elección de tablas de mortalidad construidas con información procedentes de colectivos exteriores al de asegurados, así como la elección de fuentes de información exteriores para la construcción de tablas de mortalidad, dedicando especial atención a estas dos últimas alternativas.

Para garantizar una completa adherencia de las tablas elegidas a las que realmente debieran obtenerse por información directa, si ésta tuviera un tamaño admisible, se estudian en primer lugar el difeomorfismo y la isofuncionalidad que ha de existir entre las tablas de mortalidad disponibles y las que realmente corresponde al colectivo e nel momento de la elección, y posteriormente se propone un contraste de adherencia en valores mediante la aplicación del estadístico Smirnov-Kolmogorov, cuyos elementos instrumentales y propiedades se justifican mediante referencia, definiendo con ello una clase de tablas de mortalidad admisibles y la correspondiente regla de elección, sin excluir la posibilidad de que inicialmente tal clase resultara vacía, para cuyo caso se formulan métodos de corrección distintos del propuesto por Wolff (1959).

Para la solución del problema de elección de fuentes de información se aplica el estadístico bimuestral de Kolmogorov, cuyos elementos instrumentales y propiedades, también se referencian haciendo uso también para la resolución de este problema de los criterios de antiduración y teoría de renovación de colectivos, que también son aplicables al problema de elección de tablas de mortalidad inicialmente estudiado.

RESUMÉ

Dans cette comunication, après avoir énoncé le problème de l'évolution du phénomène de la mortalité, l'auteur propose diverses formules pour le résoudre, telles que que l'établissement de nouvelles tables basées sur une information directe, la correction des tables préexistantes proposée par K. H. WOLFF, le choix de tables de mortalité basées sur une information provenant de populations extérieures à la population assurée ainsi que le choix de sources d'information extérieures pour l'établissement de tables de mortalité, et étudie plus particulièrement ces deux dernières formules.

Pour s'assurer que les tables choisies s'ajustent parfaitement à celles qui devraient être basées sur l'information directe, si celle-ci représentait un volume suffiisant, l'auteur étudie, en premier lieu, le difféhomorphisme et l'isofonctionnalité qui doivent exister entre les tables de mortalité disponibles et celles qui correspondent à la population assurée choisie, au moment du chois, puis propose une formule d'ajustement des trajectoires, en appliquant la statistique de Smirnov-Kolmogorov, dont les éléments instrumentaux et les propriétés ont fait l'objet de diverses preuves, définissant de cette maniére une catégorie de tables de mortalité admissibles, ainsi que la règle de choix correspondante, sans exclure la possibilité que cette catégorie s'avère vide au départ, auquel cas on formulerait des méthodes de correction différentes de celles que propose Wolff (1959).

Pour résoudre le problème du choix des sources d'information, l'auteur applique la statistique de Kolnogorov basée sur deux échantillons, et dont les éléments instrumentaux et propiétés ont été vérifiés par divers auteurs, en utilisant aussi les critéres d'ancienneté du portefeuille et de renouvellement des populations assurées, applicables aussi au problème du choix des tables de mortalité étudié au début.

SUMMARY

In this report, after presenting the problem of the evolution of the mortality phenomenon, different alternatives are drawn up to resolve same, such as the new construction of tables with direct information, correction of the pre-existing tables proposed by K. H. Wolff, choice of mortality tables constructed with information from collectives falling outside those of the insured, and also the choise of external sources of information to construct mortality tables, devoting special attention to these latter two alternatives.

To guarantee a complete adherence of the tables chosen to those that should really be obtained by direct information, should this have an admissible size, first of all the dipheomorphism and the isofunctionality are studied, which should exist between the available mortality tables, and those that really correspond to the collective at the time of making the choice. Later on, an adherence contrast is proposed in values by applying the Smirnov-Kolmogorov statistic, whose instrumental elements and properties are justified by references. With this, an admissibles class of mortality tables are defined, and the corresponding choice rule, not excluding the possibility that initially this class could prove empty. In this case different correction methods to the one proposed by Wolff (1959) are drawn up.

To solve the election problem of information sources, the bi-sample statisfic of Kolmogorov is applied. Its instrumental elements and properties are also referred to, making use of the anti-duration criteria and collectives renewal theory, in order to resolve this problem. These are also applicable to the problem of choosing mortality tables, initially studied.

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Mitteilung zeigt zunächst die Probleme auf, die sich hinsichtlich der Entwicklung des Phänomens der Sterblichkeit ergeben.

Zur Lösung dieser Probleme werden verschiedene Alternativen formuliert wie z. B.: die neue Konstruktion von Sterbetafeln aufgrund direkter Information, die Korrektur bereits bestehender Tafeln gemäss dem Verfahren von K. H. Wolff, die Wahl von Sterbetafeln, die früher aufgrund von Statistiken ausserhalb der Kreise von Versicher-

ten konstruiert wurden, sowie die Wahl von äusseren Informationsquellen zur Konstruktion von Sterbetafeln. Den beiden letzteren Alternativen wurde in dieser Abhandlung spezielle Aufmerksamkeit geschenkt.

Um eine vollständige Angleichung der gewählten Sterbetafeln an diejenigen zu gewähren, die sich durch direkte Beobachtung ergeben hätten, falls überhaupt ein zulässiger Umfang des Beobachtungsmaterials vorliegt, wurden zunächst der Diffeomorphismus und die Isofunktionalität, welche zwischen den verfügbaren Sterbetafeln und denjenigen, die für das betreffende Kollektiv im Zeitpunkt der Wahl richting wären, geprüft.

Hierauf gaht der Verfasser von der Voraussetzung aus, dass ein gewisser "Zugehörigkeitskontrast" besteht, wenn man von der Anwendung der statistischen Methoden von Smirnov-Kolmogorov ausgeht —auf deren Hilfsmittel und Eigenschaften mittels Referenzen hingewiesen wird—, indem diese Methoden eine Klasse von zulässigen Sterbetafeln und die entsprechende Wahlregel definieren, ohne die Möglichkeit auszuschliessen, dass diese Klasse anfänglich leer bleibt. In diesem Fall werden Korrektur-Methoden formuliert, die von denjenigen von Wolff (1959) abweichen.

Was die Lösung des Problems der geeigneten Wahl der Informationsquellen betrifft, wendet der Verfasser die zweidimensionale Statistik von Kolmogorov an. Die Hilfsmittel und Eigenschaften dieser Methoden beziehen sich sowohl auf die Lösung des Problems der Kriterien der "Antidauer" wie der Theorie der Erneuerung von Gesamtheiten, welche ebenso sehr anwendbar sind zur Lösung des zuerst genannten Problems der richtigen Wahl der Sterbetafeln.