

# Auditoría actuarial y control global de tarifas

Por

JOSE LUIS FERNANDEZ y JUAN ALDAZ

## PRIMERA PARTE

La existencia de colectivos asegurados, que, según un régimen cualquiera de pensiones, se protegen de distintas situaciones de infortunio, dan origen a estudios actuariales, con el fin de calcular las cuotas a cambio de las cuales se obtienen unas determinadas prestaciones valoradas en dinero.

Ahora bien, una vez iniciado el funcionamiento del régimen de subsidios y pensiones (que de ahora en adelante llamaremos mutualidad), el transcurso de los años alteran los supuestos de partida y, en ocasiones, se producen dificultades para cumplir los fines reglamentarios. Se impone entonces una auditoría actuarial, entendiéndolo como tal el recálculo de las reservas y de las tarifas para evitar la quiebra de la mutualidad.

Es precisamente este objetivo de ofrecer un método de tarificación que garantice el equilibrio y, al propio tiempo, permita un control dinámico, el que justifica esta comunicación al tema I del XX Congreso Internacional de Actuarios de Tokio. Este método, que llamamos ALFER (ALDAZ-FERNÁNDEZ), nos ha dado excelentes resultados en la práctica. Utiliza un modelo donde se combinan la eficacia operativa y un coste económico razonable al sistematizar el procedimiento en una secuencia de fases que conducen con rapidez al fin propuesto. Además, los ordenadores pueden intervenir en el grado que deseemos, ya que resulta tan posible el tratamiento con calculadores de mesa como la completa automatización del proceso, lo que permite una auditoría periódica y, por lo tanto, un control actuarial dinámico, que, desgraciadamente, no suele practicarse en los esquemas de pensiones.

### *El proceso ALFER de auditoría actuarial.*

El método para el cálculo de nuevas tarifas y del déficit, si existe, de reservas exige adoptar un conjunto de decisiones y el aplicar los algoritmos expuestos en este trabajo.

El proceso de auditoría consta de tres subprocesos fundamentales:

- A) Subproceso de decisión sobre las bases técnicas.
- B) Subproceso estadístico para el análisis del colectivo.
- C) Subproceso de cálculo de los algoritmos propuestos.

En la fase A) hay que decidir la elección de las tablas actuariales, el período o períodos de equilibrio, la evolución de las variables estrictamente económicas y el sistema de cálculo material de la tarifa.

En la fase B) se obtendrá la matriz censal, que recoge las distintas situaciones del mutualista y el número de ellos en cada clase elemento.

En la fase C), que es el núcleo del proceso ALFER, se realizan los cálculos según las fórmulas que proponemos para obtener las cuotas que producen el equilibrio financiero-actuarial de la mutualidad.

*Explicación-síntesis de cada una de las fases del proceso de auditoría actuarial ALFER.*

**SUBPROCESO A) 1. Decisión sobre las bases actuariales.**

El criterio más plausible es el conseguir unos márgenes implícitos de seguridad, tanto en la elección de las tablas de mortalidad, invalidez, enfermedad u otra cualquier tabla actuarial, como en el nivel de los tipos de interés. Se adoptará también una decisión sobre la cuantía de los recargos que integran la cuota total (riesgo más gestión).

**SUBPROCESO A) 2. Decisión sobre los períodos y años de equilibrio.**

Primeramente debe determinarse el plazo de estabilización (corto, medio o largo) y fijar después el número de años del mismo, por cuanto si bien la consistencia de las hipótesis y la probabilidad de certeza son inversas al número de años contemplados, no todas las mutualidades tienen iguales posibilidades de variar con frecuencia su régimen de contraprestaciones. Estimamos que el número medio de años, en dichos plazos, debe ser de 5, en corto, 10, en medio, y 20, en largo.

**SUBPROCESO A) 3. Decisión sobre evolución de las variables económicas.**

En el cálculo de cuotas o tarifas debe presidir el mismo criterio que, como mínimo, se adoptó en el momento de iniciar el funcionamiento del sistema de previsión. Pueden también mejorarse las prestaciones, pero, en ningún caso, debe el futuro beneficiario ver disminuidos sus derechos. Por ello es esencial al sistema de auditoría prever la evolución de las variables económicas sobre las que se calculan las prestaciones y las contraprestaciones (cuotas).

SUBPROCESO A) 4. *La cuarta decisión del proceso ALFER consiste en realizar la tarificación de acuerdo con los reglamentos de la Mutualidad.*

En los sistemas de previsión constituidos por mutualidades de afiliación obligatoria, la tarifa suele venir calculada mediante un tanto por ciento sobre un sueldo base (que en España se llama Sueldo Regulador, porque regula tanto el cobro de la cuota como el pago de la indemnización). Esta tarifa debe elaborarse siguiendo escrupulosamente las disposiciones reglamentarias, pues la tarificación deberá adaptarse a las diferentes circunstancias de los mutualistas.

SUBPROCESO B) 1. *Análisis cualitativo y cuantitativo de cada una de las prestaciones.*

Hay que elaborar un cuadro de doble entrada cuya primera columna indique la situación del mutualista. Por ejemplo:

1. Jubilado especial.
2. Jubilado forzoso.
3. Activo.
4. Incapacitado.

En la primera fila hay que enumerar las distintas prestaciones a que los afiliados al sistema de previsión tienen derecho. Por ejemplo:

1. Auxilio para gastos de enterramiento.
2. Subsidio por defunción.
3. Pensión de viudedad.
4. Pensión de orfandad.
5. Pensión de jubilación.
6. Asistencia sanitaria.
7. Dote de nupcialidad.
8. Ayuda a la natalidad.
9. Pensión de incapacidad.
10. Cualquier otra modalidad.

En cada una de las casillas se describirán resumidamente los derechos que corresponden a cada uno de los distintos grupos de afiliados.

SUBPROCESO B) 2. *Determinación de la matriz censal según situaciones actuariales de las personas que integran el colectivo.*

Esta matriz estadística se calcula mediante ordenadores que ejecutan ésta y las restantes manipulaciones programadas a partir de un fichero de información base.

Cada elemento de la matriz indica el número de personas que se hallan en determinada situación actuarial, según designa la intersección de la columna y de la fila marginal correspondiente. Por ejemplo:

*Columna marginal (a la izquierda):*

1. J. F. (Jubilados forzosos).
2. J. E. (Jubilados especiales).
3. J. T. (Jubilados totales).
4. A. (Activos).
5. I. (Incapacitados).
6. G (Totales generales).

*Fila marginal (parte superior):*

1. Sm (Solteros).
2. Sf (Solteras).
3. Sg (Solteros total).
4. Cm (Casados).
5. Cf (Casadas).
6. Cg (Casados totales).
7. Vm (Viudos).
8. Vf (Viudas).
9. Vg (Viudos totales).
10. Qm (Totales varones).
11. Qf (Totales mujeres).
12. Qy (Totales varones y mujeres).
13. Em (Esposos).
14. Ef (Esposas).
15. Eg (Totales esposos y esposas).
16. Hm (Hijos).

### SUBPROCESO B) 3. *Distribuciones actuariales.*

Una característica fundamental del método ALFER es la obtención de un conjunto de distribuciones por edades y el cálculo simultáneo de la edad media de cada uno de estos subcolectivos. Existirán tantas distribuciones como modalidades de previsión. En una Mutualidad-tipo las prestaciones más frecuentes son: Auxilio para gastos de enterramiento; subsidio por defunción; pensión de viudedad; pensión de orfandad; pensión de jubila-

ción; dotes de nupcialidad; ayuda por natalidad, y pensión por incapacidad, en sus distintos grados.

A partir de este esquema de prestaciones son necesarias las siguientes distribuciones:

1. *I de incapacitados*, por edades, estado civil y sexo.
2. *J de jubilados*, por edades, estado civil y sexo.
3. *A de activos*, por edades, estado civil y sexo.
4. *EOJ de esposos* casados con mutualistas mujeres jubiladas, por edades.
5. *EOI de esposos* casados con mutualistas mujeres incapacitadas, por edades.
6. *EOA de esposos* casados con mutualistas mujeres activas, por edades.
7. *H de hijos menores*, por edades.

Además de estas distribuciones serán necesarias las que corresponden a los pensionistas de orfandad y viudedad que están percibiendo prestaciones.

8. *PV del número de pensionistas de viudedad*, por edades y sexos.
9. *PO del número de pensionistas de orfandad*, por edades y sexo.

SUBPROCESO B) 4. *Determinación de una matriz de edades medias en correspondencia biunívoca con la matriz censal.*

Esta matriz tiene las mismas enumeraciones marginales y sus elementos son cada una de las edades medias calculadas a partir de las distribuciones estadísticas.

La elaboración de esta matriz de edades medias constituye una fase decisiva en el método ALFER, ya que el cálculo de las nuevas tarifas se hace bajo la hipótesis de la uniformidad de edades entre todas las cabezas de un mismo subcolectivo (Edad media,  $\bar{X}$ ). La matriz que presentamos en este trabajo consta de  $18 \times 6 = 108$  elementos.

La introducción en las fórmulas actuariales de la edad media,  $\bar{X}$ , constituye uno de los parámetros de conversión de un sistema de capitalización individual a un sistema de capitalización colectiva. De este modo se consigue combinar la técnica actuarial estrictamente individualizada con la técnica actuarial colectiva al redistribuir los costes por edades sobre la hipótesis de la misma edad media, y la fiabilidad de esta ley de compensaciones es función creciente de la importancia cuantitativa del colectivo y del número de elementos de la matriz.

Aquellas personas que estén por debajo de la edad media contribuyen con más de su coste individual en beneficio de los de edad superior. Pero la equidad del criterio se deriva del proceso que constituye toda mutualidad de previsión. Los que hoy pagan más mañana pagarán menos. Estas edades medias constituyen el "primer parámetro de mutualización" del método ALFER.

SUBPROCESO B) 5. *Cálculo de los "coeficientes de distribución" de los costes actuariales.*

Otra característica fundamental del método ALFER es el "segundo parámetro de mutualización", que se calcula al dividir el número de mutualistas que debieran pagar las cuotas calculadas, entre el número de mutualistas que soportan de hecho esas cargas. En el momento de realizar una auditoría actuarial, existen grupos o subcolectivos que si bien debieran pagar la nueva tarifa calculada, no están en condiciones de hacerlo porque ha cesado la obligación del pago de cuotas. Pero como resulta imprescindible el cobro de todas las cuotas individualizadas para garantizar los equilibrios globales, habrá que redistribuir esos pagos entre todos aquellos que están obligados. De este modo, los coeficientes de distribución de cargas cumplen la función de "mutualizar" situaciones que, tratadas individualmente, harían imposible determinadas prestaciones.

Para terminar esta parte conviene resaltar que la auditoría ALFER se fundamenta en una combinación realizada matemáticamente, mediante la cual se transforma la capitalización individual en capitalización colectiva, por intermedio de los dos parámetros fundamentales que son las edades medias de los subcolectivos y los coeficientes de distribución de costes, por lo cual se obtienen unas tarifas de equilibrio para cada subcolectivo y se contrastan con los existentes; de este modo se determina el déficit o el superávit de cuotas en cada situación, que es el objetivo último de toda auditoría.

SUBPROCESO C) 1. *Formulación matemático-actuarial.*

En esta última fase del proceso se describen los algoritmos actuariales del método ALFER de auditoría y tarificación.

Por haber sido contrastada su aplicación a Mutualidades de gran número de asociados podemos avalar su rapidez y eficacia, lo que permite la posibilidad teórica de un contraste periódico (incluso anual), si se organiza adecuadamente la administración de la mutualidad.

Seguimos el orden de las prestaciones-tipo a que hicimos referencia al describirlas.

Primera.—*Auxilio para gastos de enterramiento.*

$$K_{GS} = p^t \Psi^0 [P^{(12)''} x_{Ga_m} \cdot \lambda_{Ga_m} + P^{(12)''} x_{Ga_f} \cdot \lambda_{Ga_f}] : \bar{S}_r$$

$$Q_{GS} = \Psi^0 [\Pi^{(12)''} x_{Ga_m} \cdot \lambda_{Ga_m} + \Pi^{(12)''} x_{Ga_f} \cdot \lambda_{Ga_f}] : \bar{S}_r^t$$

La tarifa  $K_{Gs}$  se utiliza cuando el período de equilibrio es lo suficientemente amplio como para justificar el factor de capitalización.

- 1)  $p^t \psi^0$  simboliza la cuantía en el futuro de los gastos de sepelio.
- 2)  $p^{(12)''}_{x_{Ga_m}}$  es la prima comercial mensual calculada a partir de las tablas de mortalidad, del tipo de interés y de los recargos de gestión.
- 3) El símbolo  $\bar{X}_{Ga_m}$  indica la edad media para el grupo de hombres activos. En cuanto a  $p^{(12)''}_{x_{Ga_f}}$  es la cuota tipo de las mujeres activas.
- 4) Los coeficientes de distribución  $\lambda_{Ga_m}$  y  $\lambda_{Ga_f}$  recogen la relación entre el grupo que tendría que pagar las cuotas y los que las pagan efectivamente.
- 5) Por último,  $\bar{S}^t_r$  es el salario medio proyectado a  $t$  años. Por lo tanto, si  $\bar{S}^t_0$  es el salario del momento de la auditoría, la fórmula a aplicar es  $\varepsilon^t \bar{S}^t_0 = \bar{S}^t_r$ , siendo  $\varepsilon^t$  el factor de proyección.
- 6) La fórmula 2 se aplica en el caso de un equilibrio calculado para un plazo de cinco años.
- 7)  $KGS$  es la tarifa o coste expresado en tanto por ciento sobre el salario medio mensual regulador. La auditoría termina para esta prestación en el momento de calcular las tarifas mensuales,  $KGS$ .

Segunda.—Subsidios por defunción.

Para cada coste de equilibrio la fórmula a aplicar es:

$$K_{SD} = 15 \bar{S}^t_r [P^{(12)''}_{\bar{X}_{AQ_m}} \cdot \lambda_{AQ_m} + P^{(12)''}_{\bar{X}_{AQ_f}} \cdot \lambda_{AQ_f}] \\ + 10 \bar{S}^t_r [P^{(12)''}_{\bar{X}_{JTa_m}} \cdot \lambda_{JTa_m} + P^{(12)''}_{\bar{X}_{JTaf}} \cdot \lambda_{JTaf}] \\ + [P^{(12)''}_{\bar{X}_{Ia_m}} \cdot \lambda_{Ia_m} + P^{(12)''}_{\bar{X}_{Iaf}} \cdot \lambda_{Iaf}]$$

- 1)  $15 \bar{S}^t_r$  significa quince sueldos mensuales, expresión, por ejemplo, del derecho nacido en el momento de la defunción.
- 2) Los símbolos restantes ya han sido explicados. Sólo hay que identificar las letras subindicadas con los subcolectivos correspondientes, según las claves ya dadas.
- 3)  $K_{SD}$  es la tarifa en tanto por ciento sobre el sueldo regulador.

Tercera.—Pensión por invalidez.

Las tarifas  $K_{IF}$  se calcularán mediante la fórmula siguiente:

$$K_{IF} = 0.30 \cdot \bar{S}^t_r \cdot 14 \cdot i''_{\bar{X}_{a_g}} [a_{\bar{X}_{Ga_m}} \cdot \lambda_{Ga_m} + a_{\bar{X}_{Ga_f}} \cdot \lambda_{Ga_f}]$$

- 1) 0,30 significa la cuantía de la pensión.
- 2) El 14 significa catorce pagos del 30 %, en el supuesto de dos mensualidades extraordinarias;

- 3)  $i''_{\bar{x}_{ag}}$  es la prima de invalidez para la edad media  $\bar{X}$ .
- 4)  $a_{\bar{x}_{Gaf}}$  simboliza el valor actual de una renta postpagable, a la edad media  $\bar{X}$  del subcolectivo de hombres activos y  $a_{\bar{x}_{Gaf}}$  es para mujeres activas.
- 5)  $\lambda_{Gam}$  y  $\lambda_{Gaf}$  son los coeficientes de distribución explicados.
- 6)  $K_{IP}$  es la tarifa de invalidez de equilibrio actuarial del sistema y objetivo final de la auditoría.

Cuarta.—*Pensión por jubilación.*

La tarifa  $K_j$  se calcula del siguiente modo:

$$K_j = 14 \cdot 0.30 \cdot \bar{S}_r^t \left[ \frac{{}_{70-\bar{x}} \bar{A}_{Qm} | a_{\bar{x}} \bar{A}_{Qm}}{0.9 a_{\bar{x}} \bar{A}_{Qm} : {}_{70-\bar{x}} \bar{A}_{Qm}} \cdot 0.09 \cdot \lambda_{AQm} + \frac{{}_{70-\bar{x}} \bar{A}_{Qf} | a_{\bar{x}} \bar{A}_{Qf}}{0.9 a_{\bar{x}} \bar{A}_{Qf} : {}_{70-\bar{x}} \bar{A}_{Qf}} \cdot 0.09 \cdot \lambda_{AQf} \right]$$

- 1)  $14 \cdot 0.30 \cdot \bar{S}_r^t$  son catorce pagas del 30 % del sueldo regulador proyectado  $t$  años.
- 2) Los símbolos entre corchetes son rentas diferidas calculadas sobre edades medias  $\bar{X}_{AQm}$  y  $\bar{X}_{AQf}$  de los grupos subíndices.
- 3)  $\lambda_{AQm}$  y  $\lambda_{AQf}$  son los coeficientes de distribución para esta prestación.
- 4)  $K_j$  es la tarifa mensual de jubilación como resultado de la auditoría.

Quinta.—*Pensión de viudedad.*

$$K_v = 0.25 \cdot a_{\bar{v}_{EA_g}} \cdot \bar{S}_r^t [P^{(12)''} \bar{X}_{ACm} \cdot \lambda_{ACm} + P^{(12)''} \bar{X}_{ACf} \cdot \lambda_{ACf}] + 0.25 \cdot a_{\bar{v}_{EJ_g}} \cdot \bar{S}_r^t [P^{(12)''} \bar{X}_{JTCm} \cdot \lambda_{JTCm} + P^{(12)''} \bar{X}_{JTCf} \cdot \lambda_{JTCf}] + 0.25 \cdot a_{\bar{v}_{EI_g}} \cdot \bar{S}_r^t [P^{(12)''} \bar{X}_{ICm} \cdot \lambda_{ICm} + P^{(12)''} \bar{X}_{ICf} \cdot \lambda_{ICf}]$$

- 1)  $a_{\bar{v}_{EA_g}}$  es el valor actual de la renta anual postpagable calculada a la edad media.
- 2) Los símbolos restantes están descritos en este trabajo.

Sexta.—*Pensión de orfandad.*

Las tarifas se calcularán así:

$$K_0 = 0.10 \cdot \bar{S}_r^t \cdot a_{Z_{HG_g}} \cdot \frac{m_0 \cdot P^{(12)''} \bar{X}_{GC_g+GV_g} \cdot \lambda_{GC_g+GV_g}}{23 - Z_{HG_g}}$$

- 1)  $0,10 \cdot \bar{S}_r^t$ , se supone el 10 % del sueldo regulador.
- 2) El símbolo de la renta anual temporal postpagable se refiere a la edad media  $\bar{Z}$  para el grupo de huérfanos totales.
- 3)  $m_0$  es el número medio de hijos menores de veintitrés años (máxima edad supuesta para percibir el beneficio de orfandad). Se calcula así:

$$m_0 = HG_0 : (GC_0 + GV_0).$$

- 4) Los símbolos restantes responden a conceptos ya explicados.

Séptima.—*Dotes de nupcialidad.*

La ecuación de equilibrio que debe plantearse es:

$$\bar{S}_r^t \cdot \sigma^{t-1} \cdot 12 \cdot K_B \cdot A Q_0 \cdot \gamma_1^{t-1} = N_b^0 \cdot \gamma_b^{t-1} \cdot D_b^0 \cdot v_b^{t-1}$$

de donde el importe de la cuota mensual será:

$$K_B = \frac{N_b^0 \cdot \gamma_b^{t-1} \cdot D_b^0 \cdot v_b^{t-1}}{12 \cdot \bar{S}_r^t \cdot \sigma^{t-1} \cdot A Q_0 \cdot \gamma_1^{t-1}}$$

$N_b^0$  Casamientos en la última anualidad.

$\gamma_b^0$  Crecimiento porcentual medio anual esperado, según tratamiento estadístico, durante la mitad del período observado.

$D_b^0$  Importe de la dote de nupcialidad vigente.

$v_b^t$  Crecimiento de dicha dote durante los  $t$  años.

$\gamma_1^t$  Crecimiento durante los  $t$  años, de mutualistas cotizantes (activos).

El exponente aplicado en la ecuación es  $t-1$  por cuanto en  $t$  años se genera  $t-1$  crecimientos y el número 12 resulta al contemplar la tarifa mensual.

Octava.—*Ayuda de natalidad.*

La ecuación de equilibrio que debe plantearse es:

$$\bar{S}_r \cdot \sigma^{t-1} \cdot 12 \cdot K_N \cdot A G_0 \cdot \eta^{t-1} = N_N \gamma_N^{t-1} \cdot D_N^0 \cdot v_N^{t-1}$$

$$K_N = \frac{N_N \cdot \gamma_N^{t-1} \cdot D_N^0 \cdot v_N^{t-1}}{12 \cdot \bar{S}_r \cdot \sigma^{t-1} \cdot A G_0 \cdot \eta^{t-1}}$$

Los conceptos simbólicos utilizados son similares a los de nupcialidad, diferenciados por medio del subíndice  $N$ .

## SEGUNDA PARTE

### VALORACIÓN DE LAS OBLIGACIONES EN CURSO

Una auditoría actuarial se realiza forzosamente durante algún momento de la existencia de la mutualidad. Un método eficiente debe distinguir y separar dos zonas de contenido actuarial muy distinto. Por una parte, el colectivo de todos aquellos que son potenciales beneficiarios de las distintas prestaciones, y por otra, el colectivo de los que perciben de hecho prestaciones de algún tipo; es decir, los deudores y los acreedores de la mutualidad.

Para el colectivo de deudores el método ALFER establece un proceso explicado en la primera parte del trabajo. Para el colectivo de acreedores habrá que valorar las obligaciones que para con ellos tiene la mutualidad en el momento  $t$  de la auditoría, cuyos algoritmos se desarrollan en esta segunda parte de la comunicación.

El método ALFER distingue claramente en su proceso de cálculo entre deudores (cotizantes) y acreedores (beneficiarios). Para estos últimos se establecen seguidamente las fórmulas adecuadas y se explica el significado de los símbolos empleados.

La característica de tipo general que debemos destacar, es el empleo tal como ha quedado debidamente justificado en la primera parte, de las edades medias de cada subcolectivo obtenidas a partir de las distribuciones enumeradas anteriormente, lo que permite sustituir en los cálculos un colectivo censal por un colectivo equivalente en el tiempo.

El orden que seguimos en esta segunda parte es como sigue:

1. Valoración de las obligaciones adquiridas en el momento  $t$  por pensiones de jubilación forzosa.
2. Valoración de las obligaciones adquiridas en el momento  $t$  por pensiones de jubilación voluntaria.
3. Valoración de las obligaciones adquiridas por pensiones a favor de personas incapacitadas.
4. Valoración de las obligaciones adquiridas por pensiones de viudedad.
5. Valoración de las obligaciones adquiridas por pensiones de orfandad.

#### 1. Obligaciones adquiridas por pensiones de jubilación forzosa

Hombres:

$$Q^{(1)}_{JFQ_m} = JFQ_m \cdot a_{\bar{X}_{JFQ_m}} \cdot \bar{Y}_r^{(1)} \cdot 12$$

$$\sigma^{(1)}_{JFQ_m} = JFQ_m \cdot \bar{Y}_r^{(1)}$$

Mujeres:

$$\Omega^{(t)}_{JFQ_f} = JFQ_f \cdot a_{\bar{x}_{JFQ_f}} \cdot \bar{\gamma}_r^{(t)} \cdot 12$$

$$\sigma^{(t)}_{JFQ_f} = JFQ_f \cdot \bar{\gamma}_r^{(t)}$$

los símbolos anteriores tienen el significado siguiente:

1.  $\Omega^{(t)}_{JFQ_m}$  es la cuantía de las obligaciones adquiridas con los pensionistas de jubilaciones forzosas.
2. La expresión  $JFQ_m$  significa el número de jubilados forzosos varones totales; es decir, ya sean casados, solteros o viudos que se obtiene de la matriz censal.
3.  $a_{\bar{x}_{JFQ_m}}$  es la renta vitalicia anual postpagable a la edad media  $\bar{x}$  del colectivo cesal de jubilados forzosos varones. La  $\bar{x}$  aparece en la matriz de edades medias.
4.  $\bar{\gamma}_r^{(t)} \cdot 12$  es el tanto por ciento anual de incremento de pensiones contempladas para el año  $t$ , medio del período observado, teniendo en cuenta el correspondiente tratamiento estadístico de las actualizaciones.
5.  $\sigma^{(t)}_{JFQ_m}$  es el valor medio de la totalidad de pensiones mensuales que se contemplan para el pago en el año  $t$  (mitad del período observado) a los pensionistas varones de jubilación forzosa. Por ello esta expresión es igual al producto del número total de jubilados  $JFQ_m$  por la pensión mensual  $\bar{\gamma}_r^{(t)}$ .

Explicados los símbolos para los valores, los mismos conceptos se extienden a las mujeres, sin dificultad.

## 2. OBLIGACIONES ADQUIRIDAS POR PENSIONES DE JUBILACIÓN VOLUNTARIA

Teniendo en cuenta la homogeneidad de los conceptos y los símbolos explicados para los jubilados forzosos, las fórmulas que valoran las obligaciones en curso en el momento  $t$  para el caso de jubilación voluntaria son:

Hombres:

$$\Omega^{(t)}_{JFQ_m} = JEQ_m \cdot a_{\bar{x}_{JFQ_m}} \cdot \bar{\gamma}_r^t \cdot 12$$

$$\sigma^{(t)}_{JFQ_m} = JEQ_m \cdot \bar{\gamma}_r^t$$

Mujeres:

$$\Omega^{(t)}_{JFQ_f} = JFQ_f \cdot a_{\bar{x}_{JFQ_f}} \cdot \bar{\gamma}_r \cdot 12$$

$$\sigma^{(t)}_{JFQ_f} = JFQ_f \cdot \bar{\gamma}_r^{(t)}$$

3. OBLIGACIONES ADQUIRIDAS POR PENSIONES A FAVOR DE INCAPACITADOS

Hombres:

$$\Omega^{(t)}_{Im} = IQ_m \cdot a_{\bar{x}_{IQ_m}} \cdot \bar{\gamma}_r^{(t)} \cdot 12$$

$$\sigma^{(t)}_{Im} = IQ_m \cdot \bar{\gamma}_r^{(t)}$$

Mujeres:

$$\Omega^{(t)}_{If} = IQ_f \cdot a_{\bar{x}_{If}} \cdot \bar{\gamma}_r^{(t)} \cdot 12$$

$$\sigma^{(t)}_{If} = IQ_f \cdot \bar{\gamma}_r^{(t)}$$

El significado de los símbolos es el siguiente:

1.  $\Omega^{(t)}_{Im}$  es el valor de las obligaciones por pensiones de incapacitados varones en el momento de la auditoría (momento  $t$ ).
2.  $IQ_m$  significa el número total de incapacitados varones solteros, casados y viudos, cifra que se obtiene de la matriz censal.
3.  $a_{\bar{x}_{IQ_m}}$  es la renta vitalicia postpagable calculada a la edad media  $\bar{x}$  del subcolectivo de incapacitados varones.
4.  $\bar{\gamma}_r^{(t)} \cdot 12$  es el tanto por ciento de incremento anual de las pensiones en el año  $t$ .

La extensión al caso de las mujeres no ofrece ninguna dificultad.

4. OBLIGACIONES ADQUIRIDAS EN EL MOMENTO  $t$  POR PENSIONES DE VIUDEDAD

Hombres:

$$\Omega^{(t)}_{Vm} = RV_m \cdot a_{\bar{x}_{RV_m}} \cdot \bar{\tau}^{(t)} \cdot 12$$

Mujeres:

$$\Omega^{(t)}_{Vf} = RV_f \cdot a_{\bar{x}_{RV_f}} \cdot \bar{\tau}^{(t)} \cdot 12$$

Conjunto (Total):

$$\Omega^{(t)}_{Vg} = RV_g \cdot a_{\bar{x}_{RV_g}} \cdot \bar{\tau}^{(t)} \cdot 12$$

$$\sigma_v^{(t)} = RV_g \cdot \bar{\tau}^{(t)}$$

Los símbolos tienen el significado siguiente:

1.  $\Omega^t_{vm}$  es el valor de las pensiones a favor de varones viudos ( $V_m$ ).
2.  $\Omega_{vm}$  es el número total de varones viudos obtenido de la matriz censal.
3.  $a_{\bar{x}_{Rvm}}$  es el valor de una renta vitalicia postpagable para la edad media  $\bar{x}$  de los varones viudos.
4.  $\bar{\tau}_r^{(t)}$  es la pensión media reguladora mensual de viudedad.
5.  $\sigma_1^{(t)}$  es el tanto por ciento anual de incremento de pensiones contempladas para el año  $t$ , medio del período observado, teniendo en cuenta el correspondiente tratamiento estadístico de las actualizaciones.

5. OBLIGACIONES ADQUIRIDAS EN EL MOMENTO  $t$  PARA PENSIONES DE ORFANDAD

No incapacitado:

$$\Omega^{(t)}_{og} = RO_g \cdot a_{\bar{x}_{RO_g} : 23 - \bar{x}_{RO_g}} \cdot \bar{H}^{(t)} \cdot 12$$

$$\sigma^{(t)}_{og} = RO_g \cdot \bar{H}^{(t)}$$

Incapacitado:

$$\Omega^{(t)}_{(og)} = (RO_g) \cdot a_{\bar{x}_{(RO_g)}} \cdot \bar{H}^{(t)} \cdot 12$$

$$\sigma^{(t)}_{(og)} = (RO_g) \cdot \bar{H}^t$$

El significado de los símbolos es el que sigue:

1.  $\Omega^t_{og}$ , valor total de las pensiones de orfandad en el momento  $t$  de la auditoría.
2.  $RO_g$  es el número de huérfanos no incapacitados.
3.  $a_{\bar{x}_{RO_g} : 23 - \bar{x}_{RO_g}}$  es el valor de una renta a satisfacer hasta alcanzar la edad de veintitrés años.
4.  $\bar{x}_{RO_g}$  es la edad media del subcolectivo de huérfanos no incapacitados.
5.  $\bar{H}^t$  es el tanto por ciento anual de incremento de pensiones contempladas para el año  $t$ , medio del período observado, teniendo en cuenta el correspondiente tratamiento estadístico de las actualizaciones.
6.  $\sigma^{(t)}_{og}$  es el valor total de las pensiones mensuales.

Estos significados se extienden sin dificultad a las fórmulas que damos para huérfanos incapacitados.

## TERCERA PARTE

## SÍNTESIS MATEMÁTICO-CONCEPTUAL DEL MÉTODO ALFER

Una transformación fundamental en el proceso de auditoría que proponemos, es la sustitución sistemática de un grupo de cabezas de diferentes edades por un colectivo-imagen con igual número de personas bajo la hipótesis uniforme de que todos tienen la misma edad media, calculada a partir de la distribución censal correspondiente, y que en cada caso viene dada por los vectores

$$(x, L_x)(x+1, L_{x+1})(x+2, L_{x+2})\dots(x+n, L_{x+n})\dots$$

en donde las  $x=i$  ( $0 \leq i < \infty$ ) representan las diferentes edades del colectivo y las  $L_{x+i}$  el número de personas censadas en cada edad.

De este modo se calcula una sola prima en régimen de capitalización individual (la que corresponde a la edad media  $X$ ) se multiplica por el número total de miembros del colectivo. Este coste global se redistribuye según los algoritmos expuestos en la primera parte de la comunicación. La transformación de un colectivo en otro de edad uniforme supone la conversión de un sistema de capitalización individual en otro de carácter colectivo y admisible por cuanto se fundamenta en el siguiente principio que proponemos y que no dudamos en calificarlo de topológico conjuntista por cuando define un variante temporal en colectivos de distintas edades.

*Los conjuntos de personas de diferente composición por edades que vivan el mismo número total de años en regímenes obligatorios de pensiones son actuarialmente equivalentes.* El sentido de esta equivalencia consiste en que el coste total de una determinada prestación se distribuya primero entre el número de años en que se extingue la totalidad del colectivo y se reparta después la carga anual entre los supervivientes del grupo. De este modo, la cuota persona/año es la misma (si excluimos la noción de rentabilidad) para constituir un capital de cuantía determinada siempre que no varíe el número total de años de vida de los grupos.

En la capitalización individual, las primas a cada edad son distintas en razón a que cada colectivo  $lx$  se extingue en un número de años diferente; o dicho de otra manera: Las personas de igual edad ( $x$ ) pagan la misma prima, debido a que es igual su tiempo de extinción en el grupo  $lx$ . Tiempo medido con la relatividad de toda Tabla de Mortalidad, que es un intento de calcular los procesos de eliminación en el tiempo de los seres humanos.

Como valor medio del tiempo de extinción a la edad  $x$  podemos utilizar el concepto de esperanza de vida  $e_x$ , que es un invariante temporal para cada Tabla de Mortalidad.

Cada persona que forme parte de los grupos  $L_x, L_{x+1}, L_{x+2}, \dots$ , clasificados según las edades vivirá, por término medio y respectivamente,  $e_x, e_{x+1}, e_{x+2}, \dots$  años.

Las distribuciones censales que utiliza el método ALFER, por edades y frecuencia en cada edad, permiten obtener la edad media  $\bar{X}$ . En efecto, el número total de años del colectivo es

$$\text{is } x \cdot L_x + (x+1) \cdot L_{x+1} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (x+i) L_{x+i},$$

última expresión que representaremos simbólicamente por  $\sum_x L_x$ . Por lo tanto,  $\bar{X} = \sum_x L_x : L_x$ ,  $\sum L_x =$  número total de personas que integran el colectivo.

La hipótesis utilizada en el método ALFER consiste en suponer que todas las personas  $\sum L_x$  tienen la misma edad media  $\bar{X}$ , es decir

$$\sum L_x = \sum L_{\bar{X}}$$

Si efectivamente fuera así, el número total de años que puede estar pagando el colectivo por existir algún superviviente sería  $e_x \cdot \sum L_{\bar{X}}$  es decir el producto de la esperanza de vida a la edad hipotética media  $\bar{X}$ , por el número total de personas.

Lo que vamos ahora a demostrar es que el número total de años hasta su extinción total es aproximadamente el mismo para el colectivo censal  $L_{\bar{X}}$  que para el colectivo imagen  $L_x$

El número de años vividos por el grupo  $\sum L_x$  será  $\sum_x L_x + \sum e_x L_x$ , teniendo los sumatorios el significado simbólico de suma de productos de edades y esperanzas de vida por el número de personas de esa misma edad. La expresión  $\sum_x L_x + \sum e_x L_x$  da como resultado el número total de años vividos y por vivir en el momento de la auditoría.

Si aceptamos a la vista de cualquier Tabla de Mortalidad que la suma de los años vividos más los años que le quedan por vivir a cada persona es aproximadamente constante dentro de una desviación máxima de diez años, resulta posible plantear la igualdad que sigue:

$$\sum x L_x + \sum e_x L_x = (x + e_x) \sum L_x = k \cdot \sum L_x \quad [1]$$

ya que suponemos que  $x + e_x \approx k =$  constante. Si ahora multiplicamos y dividimos simultáneamente la expresión [1] por  $\sum L_x$  tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\sum x L_x}{\sum L_x} \cdot \sum L_x + \frac{\sum e_x L_x}{\sum L_x} \cdot \sum L_x &\approx k \sum L_x \\ \bar{X} \cdot \sum L_x + e_{\bar{X}} \cdot \sum L_x &\approx k \cdot \sum L_x \\ \bar{X} + e_{\bar{X}} &\approx k \end{aligned} \quad [2]$$

En las expresiones [1] y [2] aparecen el número total de años vividos por todo el colectivo  $\Sigma L_x$  hasta su extinción, representados por la cantidad  $(\bar{X} + e_x)\Sigma L_x \simeq L\Sigma L_x$ .

Tanto el colectivo censal  $\Sigma L_x$  como el colectivo-imager  $\Sigma L_{\bar{X}} = \Sigma L_x = N$ , viven en total el mismo número de años y tienen, por lo tanto, la misma capacidad temporal de pago. De este modo si dos grupos de exacto número de personas se extinguen totalmente en el mismo número de años, la capacidad financiera de absorber un coste determinado es equitativa para cada persona/año.

Esta homogeneidad de los colectivos humanos a través de su tiempo total de vida singulariza al sistema de mutualismo obligatorio por su solidaridad en el infortunio y hace válido el tecnicismo del método ALFER de sustituir en los cálculos actuariales los colectivos de diferentes edades por otros con la misma edad media. El resultado final es un proceso automático de auditoría actuarial para sistemas de pensiones de cualquier clase que permite una tarificación dinámica capaz de ser completamente programada en ordenadores de tipo medio, y necesaria, cada vez más, en un mundo económico de alteraciones rápidas que el actuario debe valorar y controlar para no hacer ilusorias las legítimas aspiraciones de los afiliados, problema éste de extrema importancia social.