Modelos de decisión en el Reaseguro

Por

JESUS MARIA VEGAS ASENSIO

Profesor Agregado de Matemática Actuarial
y de Análisis de Sistemas
de la Universidad Complutense de Madrid

El reaseguro constituye una componente esencial del subsistema de estabilidad de la empresa de seguros, siendo, junto con el recargo de seguridad y las reservas de estabilización, una de las tres variables de decisión sobre las que puede actuar el empresario asegurador para lograr sus objetivos de supervivencia a corto y a largo plazo. Los tres problemas básicos que se presentan en el reaseguro son:

a) Fijación del sistema o modalidad de reaseguro,

b) Fijación de pleno y

c) Cálculo de la prima para las distintas modalidades y una vez fijados los plenos.

Los dos primeros problemas son de elección y requieren la existencia de un criterio que nos permita tomar la mejor decisión.

Estamos ante un criterio de estabilidad cuando se tiene en cuenta la repercusión de cada decisión en el índice de estabilidad.

Dentro de esta línea se encuentran aportaciones de autores como Vadja, Kahn, Beard, Pentikainem, Personem, Wolff, Borch, etc.: sin embargo no está exento de algunas críticas como son principalmente las siguientes:

a) Para calcular una magnitud de estabilización (Recargo de seguridad, Reserva de estabilización o Reaseguro) qué criterio se utiliza, el criterio F (distribución en un período fijo) o el criterio Φ (función de ruina).

b) Otra crítica importante (Ottaviani, Finetti, Tedeschi, etc.) es la de que en el criterio Φ se considera una acumulación indefinida de las reservas que es incompatible con la finalidad del empresario que persigue un beneficio repartible.

c) Cuando se le da entrada al empresario surge la necesidad de considerar sus preferencias, lo que ha dado lugar a la teoría de la utilidad en el seguro (Borch, Khan, Wolff, etc.).

La insuficiencia de los criterios de estabilidad se pone de manifiesto a través de las consideraciones económicas siguientes:

a) Contemplando la producción del servicio de seguridad en su doble aspecto: técnico y económico.

b) Dando entrada a los supuestos de racionalidad del sujeto económico (empresario) que lleva a cabo tal proceso productivo, y

c) Teniendo en cuenta la información del ambiente en que éste toma sus decisiones; es decir, la concepción de sistema abierto de carácter adaptativo.

Modalidad de menor riesgo medio.

Vamos a medir el riesgo asociado a una determinada modalidad de reaseguro por medio de la varianza de la variable que representa la siniestralidad de propia retención.

Esta medida del riesgo no es, por supuesto, la única generalmente aceptada. Así una de las aportaciones más interesantes en este sentido es la de Lemaire (1), quien toma como medida del riesgo del cedente el recorrido de la variable asociada a la siniestralidad remanente del primer asegurador.

La asunción de la varianza como medida de este riesgo corresponde a la hipótesis de una función de pérdida cuadrática. Sin embargo, como ha puesto de manifiesto Ohlin (2), las conclusiones que se obtienen no varían en el supuesto de considerar una función de pérdida cualquiera siempre que sea convexa, continua, nula en el origen y no negativa.

Básicamente, existen dos modalidades de reaseguro:

1) *El Reaseguro proporcional,* en el que ocurrido un siniestro de cuantía x corresponde al cedente una suma $x_0 = tx$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ y al reasegurador el resto $x_1 = x - tx$.

2) *El Reaseguro no proporcional,* donde denominando por $\bar{x}$ el pleno de propia retención, las primas de propia retención —P_0— y de reaseguro —P_1— son, respectivamente:

$$P_0 = \int_0^{\bar{x}} x dF(x) + \bar{x} \int_{\bar{x}}^{\infty} dF(x)$$

$$P_1 = \int_{\bar{x}}^{\infty} (x - \bar{x})\, dF(x) \qquad [1]$$

(1) LEMAIRE, J.: "Sur la determinación d'un contrat optimal de reasurance", Astin, 1973.

(2) OCHLIN, J.: "On a class of measures of dispersión with application to optimal reinsurance", Astin, 1970.

Lógicamente se verifica la igualdad $P_0+P_1=P$, siendo

$$P=\int_0^{\infty} x\, dF(x) = E(x)$$

Si se verifica que $0\leqslant P_1\leqslant P$ podemos enunciar el siguiente *teorema*: Para P_1 fijo, el reaseguro de excedentes representa el riesgo medio mínimo para la cartera remanente del primer asegurador, entre los posibles reaseguros admisibles. Como reaseguro admisible denominamos un reaseguro con $0\leqslant x_0\leqslant x$, donde x representa el daño y x_0 la parte de daño a cargo del primer asegurador; por ello, una limitación a reaseguros admisibles es lógica, aunque no sea obligatorio considerarla.

Demostración: Se describe el reaseguro con la Transformación T. Sea $x_0=Tx$; $x_1=x-Tx$. Así, pues,

$$P_0=\int_0^{\infty} Tx\, dF(x) = E(Tx)$$

es el importe esperado del valor efectivo de la parte de daño a cargo del primer asegurador y

$$P_1=\int_0^{\infty}(x-Tx)\,dF(x)=P-E(Tx)=P-P_0$$

el importe esperado del valor efectivo de la parte del daño a cargo del reasegurador; *es decir, la prima neta del reaseguro.* El riesgo medio de la cartera del seguro remanente del primer asegurador es:

$$M^2(Tx)=\int_0^{\infty}[Tx-E(Tx)]^2\,dF(x)=\int_0^{\infty}(Tx-P_0)^2\,dF(x)$$

se cumple ahora

$$M^2(Tx)=\int_0^{\infty}(Tx-\bar{x})^2\,dF(x)-[\bar{x}-E(Tx)]^2\geqslant\int_0^{\bar{x}}(Tx-\bar{x})^2\,dF(x)-$$

$$-(\bar{x}-P_0)\geqslant\int_0^{\bar{x}}(x-\bar{x})^2\,dF(x)-(\bar{x}-P_0)^2 \qquad [2]$$

Si elegimos ahora la forma especial de transformación T^*, siendo

$$T^*x=\begin{cases} x & \text{para} \quad 0\leqslant x\leqslant\bar{x} \\ \bar{x} & \text{para} \quad x>\bar{x}\end{cases}$$

entonces, como puede verse, siempre valdrá en [2] el signo de igualdad; en efecto, sustituyendo en [2] se obtiene:

$$M^2(T^*x)=\int_0^{\bar{x}}(x-\bar{x})^2\,dF(x)+\int_{\bar{x}}^{\infty}(\bar{x}-\bar{x})^2\,dF(x)-[\bar{x}-P_0]^2=$$

$$=\int_0^{\bar{x}}(x-\bar{x})^2\,dF(x)-(\bar{x}-P_0)^2$$

es decir, $M^2(Tx)\geqslant M^2(T^*x)$, con lo que el teorema está demostrado.

Una vez seleccionada la modalidad de reaseguro óptima desde el punto vista del cedente, que en el caso de que x represente la variable aleatoria asociada a la siniestralidad de toda la cartera, será, por tanto, el "stop-loss", el pleno de propia retención $\dddot{x}$ y las primas P_0 y P_1 se determinan a partir de las ecuaciones [1].

Por otra parte, no hay dificultad en hacer extensivo este resultado al caso de que existieran n reaseguradores. Sin embargo, si se prevé para el seguro un recargo de seguridad, λ, después de deducido el porcentaje de carácter fijo retenido por el asegurador directo, β, quedará un importe $(1-\beta)\lambda$, que deberá ser repartido entre el cedente y el reasegurador. Como el reaseguro no proporcional origina una transferencia del riesgo del asegurador directo al reasegurador, éste tratará de compensar el mayor riesgo incrementando su propio recargo de seguridad o margen de reaseguro; es decir, su participación en la suma $(1-\beta)\lambda$, ya que P_1 es fijo, con lo que desde el ángulo del cedente se pueden perder parte de las ventajas ofrecidas por haber encontrado la modalidad de riesgo mínimo.

Por esta razón se demuestra también que si $M^2(x)$ es el riesgo medio de la cartera total de seguros, Tx la parte de daño x a cargo del primer asegurador, $M^2(x_0)=M^2(Tx)$ el riesgo medio de la cartera del primer asegurador y $M^2(x_1)=M^2(x-Tx)$ el riesgo medio de la cartera del reasegurador y elegimos un valor M_1^2 con $0<M_1^2<M^2(x)$.

Sea $M_1^2=(1-t)^2M^2(x)$ con $0<t<1$; entonces se verifica que:

Para $M^2(x_1)=M_1^2$, el recargo proporcional $x_0=tx$ es el que ofrece el riesgo medio mínimo a la cartera remanente del primer asegurador, entre todos los reaseguros admisible.

En efecto, con ayuda de la transformación Tx formamos la transformación Sx mediante $Sx=Tx-tx$.

Ahora se cumple:

$$(1-t)^2 M^2(x) = M_1^2 = M^2(x-Tx) = \int_0^\infty [x - Tx - E(x-Tx)]^2 \, dF(x) =$$

$$= \int_0^\infty [x - tx - Sx - E(x - tx - Sx)]^2 \, dF(x) = (1-t)^2 \int_0^\infty [x - E(x)]^2 \, dF(x) -$$

$$- 2(1-t) \int_0^\infty [x - E(x)] [Sx - E(Sx)] \, dF(x) + \int_0^\infty [Sx - E(Sx)]^2 \, dF(x) =$$

$$= (1-t)^2 M^2(x) - 2(1-t) \int_0^\infty [x - E(x)] [Sx - E(Sx)] \, dF(x) +$$

$$+ \int_0^\infty [Sx - E(Sx)]^2 \, dF(x)$$

en consecuencia

$$\int_0^\infty [Sx - E(Sx)]^2 \, dF(x) = \frac{1}{2(1-t)} \int_0^\infty [x - E(x)] [Sx - E(Sx)] \, dF(x)$$

Pero

$$M^2(x_0) = \int_0^\infty [Tx - E(Tx)]^2 \, dF(x) = \int_0^\infty [tx + Sx - E(tx + Sx)]^2 \, dF(x) =$$

$$= t^2 M^2(x) + 2t \int_0^\infty [x - E(x)] [Sx - E(Sx)] \, dF(x) + \int_0^\infty [Sx - E(Sx)]^2 \, dF(x)$$

y de [1] obtenemos

$$M^2(x_0) = t^2 M^2(x) + \frac{1}{1-t} \int_0^\infty [Sx - E(Sx)]^2 \, dF(x)$$

$M^2(x_0) \geqslant t^2 M^2(x)$ siempre se cumple y para $Sx \equiv 0$, $M^2(x_0)$ toma su valor mínimo. Sin embargo, para este caso se deduce de $Sx = Tx - tx$ que $Tx \equiv tx$, lo que quiere decir que el riesgo medio del primer asegurador alcanza su valor mínimo para reaseguros proporcionales $x_0 = tx$ „ $x_1 = x - tx = (1-t)x$.

La importancia de este segundo teorema es clara. Si el reasegurador trata de defenderse de la transferencia del riesgo de la cartera a la que se llegaba mediante el sistema de reaseguro óptimo ("stop-loss"), desde el punto de vista del cedente, y para ello establece en las condiciones de aceptación del reaseguro un riesgo fijo M_1^2, entonces la modalidad óptima para el cedente es el reaseguro proporcional (cuota-parte).

El Reaseguro como sistema de control en la empresa.

Vamos a considerar ahora el reaseguro como un mecanismo de control que establece el asegurador directo para garantizar el índice de estabilidad adecuado.

En este caso, los cuatro elementos que integran todo sistema de control serían los siguientes (1):

— Sistema controlado, constituido por el índice de estabilidad del cedente (probabilidad de ruina, riesgo de la cartera, etc.).

— Sensor, constituido por la información contable acerca de los riesgos asumidos y de los siniestros ocurridos.

— Regulador, misión que lleva a cabo la dirección del departamento de reaseguros, observando si el riesgo o el siniestro están comprendidos dentro de la cobertura del contrato de reaseguro, y comunicado al reasegurador, en caso afirmativo, su obligación de aceptación o pago.

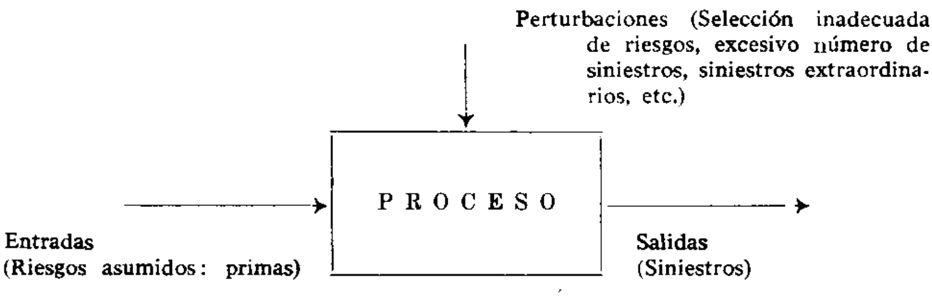
En la práctica, el cedente tiene la obligación de comunicar al reasegurador los siniestros en que éste se crea afectado en el plazo más corto posi-

(1) El significado de estos elementos, así como el estudio de las clases de sistemas de control puede verse, por ejemplo, en mi artículo "La empresa aseguradora como servosistema", Seguros, 1973.

ble, exigiéndose, en la mayoría de los casos, que acompañe un extracto de los documentos en virtud de los cuales quedó reconocida la obligación de pago o, si el reasegurador lo pide, una copia exacta de los mismos.

—Controlador, o intervención del reasegurador aceptando riesgos o pagando siniestros. En la práctica los mutuos pagos de ambos contratantes suelen quedar formalizados en cuentas trimestrales, o mensuales, o semestrales, etc., debiendo ser saldados por la parte deudora una vez verificada la cuenta al final de cada período estipulado y en la moneda original estipulada en la póliza.

Si consideramos ahora el esquema input-output más sencillo del asegurador directo:



vemos que de los dos tipos de control existentes, por circuito abierto y por circuito cerrado, el reaseguro de sumas o riesgos constituye un mecanismo de control por circuito abierto, ya que los elementos del control miden y actúan sobre las entradas del sistema, que en este caso son los riesgos asumidos que dan origen a una corriente o flujo de primas para el asegurador directo.

Este mecanismo no tiene en cuenta las perturbaciones y no garantiza, por tanto, un control efectivo de la variable controlada (el índice de estabilidad en este caso). Por el contrario, el reaseguro de siniestros constituye un mecanismo de control por circuito cerrado, ya que actúa sobre las salidas del sistema —siniestros habidos— por la que neutraliza los efectos de las perturbaciones y realiza un control mucho más perfecto de la estabilidad del sistema.

En consecuencia, tomado como modelo de decisión el mecanismo de control óptimo, la modalidad de reaseguro más adecuada desde el punto de vista del cedente es el reaseguro de siniestros ("stop-loss"), conclusión análoga a la que habíamos obtenido anteriormente.

En este caso, el reasegurador asume el peso del control efectivo del sistema, para lo que exigirá un precio normalmente mucho más alto del que demandaría en el supuesto de un control por circuito abierto.

El Mercado de Reaseguro.

Consideremos el caso de las compañías C_1 y C_2, cuyas variables de siniestralidad total ξ_1 y ξ_2, respectivamente, se suponen independientes. Ambas entidades desean establecer un contrato de reaseguro de base recíproca, que satisfaga las siguientes condiciones:

a) La ganancia esperada a posteriori sea nula; es decir, no exista margen de reaseguro λ_r. Se trata de un caso particular de la conocida expresión $P'_1=P_1+\lambda_r M^2_1$ cuando $\lambda_r=0$, siendo P_1 la prima pura de reaseguro y M^2_1 la varianza de la siniestralidad a cargo del reasegurador.

b) El riesgo (medida por la varianza), a posteriori, debe ser el mínimo posible para las dos Compañías, C_1 y C_2. Esta segunda condición exige la modalidad óptima de reaseguro sobre una base recíproca sea la proporcional (cuota parte); es decir, la siniestralidad total será:

— A cargo de C_1: $x_1 = t_1 \xi_1 + (1 - t_2) \xi_2$

— A cargo de C_2: $x_2 = (1 - t_1) \xi_1 t_2 + \xi_2$ [1]

donde t_1 y t_2 son, respectivamente, la cuota de propia retención de C_1 y C_2.

En efecto, el riesgo asumido por la Compañía C_1 a posteriori lo podemos describir

$$M^2(C_1) = M^2_{11} + M^2_{21} \quad \text{siendo} \quad M^2_{11} \ \text{y} \ M^2_{22}$$

las varianzas de las variables de siniestralidad de propia retención y de reaseguro aceptado, respectivamente, teniendo en cuenta que ξ_1 y ξ_2 son, por hipótesis, independientes.

Análogamente, el riesgo a posteriori de la segunda Compañía será:

$$M^2(C_2) = M^2_{12} + M^2_{22}$$

donde M_{22}^2 se refiere al propio negocio y M_{12}^2 al reaseguro aceptado.

Si la modalidad de reaseguro no fuera la proporcional, entonces la Compañía C_1 podría reducir el riesgo aceptado M_{21}^2 sin alterar las demás varianzas, y análogamente, la Compañía C_2 podría reducir su riesgo M_{12}^2 sin alterar el resto, y en ambos casos mediante la adopción de una forma de reaseguro proporcional, modalidad que minimiza la varianza de la siniestralidad asumida por el reasegurador.

El problema que se plantea ahora es la determinación de los valores t_1 y t_2 de las ecuaciones [1]. Resulta evidente que ambas partes exigirán que el riesgo a posteriori sea menor o igual que el riesgo a priori (antes del reaseguro); es decir, que se verifique

$$M^2(C_1) = t^2_1 M^2(\xi_1) + (1 - t_2)^2 M^2(\xi_2) \leqslant M^2(\xi_1) = M^2_1$$
$$M^2(C_2) = (1 - t_1)^2 M^2(\xi_1) + t^2_2 M^2(\xi_2) \leqslant M^2(\xi_2) = M^2_2$$

Geométricamente, el punto (t_1, t_2) se encuentra en el área comprendida por las elipses de ecuaciones

$$\frac{t^2_1}{1} + \frac{(t_2 - 1)^2}{M^2_1 / M^2_2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{(t_1 - 1)^2}{M^2_2 / M^2_1} + \frac{t^2_2}{1} = 1$$

Si ahora supusiéramos conocido $M^2(C_1)$, entonces se demuestra fácilmente que el mínimo valor de $M^2(C_2)$ se obtiene para $t_1 + t_2 = 1$. Esta nueva condición es precisamente el segmento que une los centros de ambas elipses, por lo que nos encontramos ante un problema de conflicto de intereses entre las dos entidades C_1 y C_2.

La primera Compañía prefiere un punto (t_1 y t_2) lo más próximo posible al punto (0,1), mientras que a C_2 le ocurre lo contrario.

La solución de este problema para cada entidad debe hallarse dando entrada a la información, proviniente del mercado en que se encuentra y desarrolla su actividad; es decir, teniendo en cuenta, en este caso, la estrategia adoptada por la entidad contraria; por ejemplo, si los intereses de las partes son totalmente paralelos podemos obtener como solución óptima la que corresponde al punto P de coordenadas:

$$t_1 = \frac{P_1}{P_1 + P_2} \qquad \text{y} \qquad t_2 = \frac{P_2}{P_1 + P_2} \qquad \text{donde} \qquad \begin{array}{l} P_1 = E\ (\xi_1) \\ P_2 = E\ (\xi_2) \end{array}$$

Este punto P de la figura es la intersección de las rectas de ecuaciones $t_1 + t_2 = 1$ con $(1 - t_1)P_1 = (1 - t_2)P_2$; y por encontrarse en el supuesto $t_1 + t_2 = 1$ constituyen un óptimo de Pareto.

BIBLIOGRAFIA

VAJDA, S.: "Minimum Variance Reinsurance", 1962.

WOLFF, K. H.: "Versicherungsmathematik", 1972.

VEGAS ASENSIO, J.: "La Empresa aseguradora como servosistema", Seguros, 1973.

LEMAIRE, J.: "Sur la determination d'un contrat optimal de reassurance", Astin, 1973.

PRIETO PÉREZ, E.: "El Reaseguro, su función económica", 1973.