Deducción abreviada de la fórmula de Stirling para el cálculo de $n!$

Por **D. Angel Vegas Pérez,**
Catedrático en la Escuela Central de Altos Estudios Mercantiles.

(Publicado también en la «Revista de la Real Academia de Ciencias», de Madrid. Tomo XXXVI, páginas 126 a 129.)

La importancia extraordinaria de la formula de Moivre-Stirling, por sus fecundas aplicaciones, especialmente al Cálculo de Probabilidades, ha hecho que numerosos tratadistas de Análisis y Cálculo de Probabilidades hayan dedicado particular atención a su cálculo.

Los procedimientos empleados ordinariamente son prolijos y colmados de artificiosas transformaciones de cálculo. Sirven de ejemplo las demostraciones debidas a Serret, Borel, Castelnuovo...

En todas ellas se procede a la determinación de $n! = f(n)$, llegando a la expresión:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n}\, \varphi(n)$$

y haciendo aplicación de la fórmula de Walis:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{4n} \, \underline{|n}^4}{\underline{|(2n)}^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

se determina el valor:

$$\varphi(n) = \sqrt{2\pi}$$

luego:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Con el fin de simplificar la demostración, Darmois, en su *Statistique Matematique*, propone una solución mediante la curva logarítmica, procediendo después a un escrupuloso análisis del error cometido al sustituir el área de la suma de los rectángulos:

$$l1 + l2 + \quad + ln = ln!$$

por el área:

$$\int_1^n lx\,dx$$

Pero el estudio de dicho error resulta tan complicado que la ventaja del empleo del procedimiento geométrico desaparece, resultando la demostración de la fórmula de Stirling, según Darmois, tan larga y molesta como las clásicas.

Ultimamente, empleando con singular sencillez el método geométrico, el Profesor Puig (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1939), llega de forma simple y abreviada a la obtención de la fórmula de Stirling, estudiando escrupulosamente el error relativo cometido en su empleo.

La inquietud por encontrar un procedimiento más simplificado e inmediato nos impulsó a aplicar la fórmula de Eüler-Maclaurin, que liga una sumación discreta, con una integración, aprovechando de esta forma el procedimiento geométrico empleado por Darmois.

Sabemos que la fórmula de Eüler-Maclaurin es:

$$h\,\Sigma_a^b\,F(x) = \int_a^b F(x)\,dx + \frac{h}{2}\,[F(b) + F(a)] + \frac{h^2}{12}\,[F'(b) - F'(a)] + \ldots,$$

los términos siguientes son de potencias superiores de h, y h es la base de los rectángulos de alturas:

$$F(a)\,.\,F(a+h)\ldots\ldots F(a+mh) = (b)$$

El error que se comete al tomar en la serie de Eüler-Maclaurin hasta el término $(2\,p)^{o}$ es menor que $A_{2p+2}\,h^{2p+2}\,\mu(b-a)$ siendo A_{2p+2} el coeficiente correspondiente al primer término despreciado y μ la cota superior de la derivada de orden $2\,p+2$ en el intervalo $b-a$.

Aplicando esta fórmula a $ln!$, tendremos:

$$ln! = \Sigma_1^n\,lx = \int_1^n lx\,dx + \frac{1}{2}\,[l1 + ln] + \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{1}\right] + R =$$

$$= n\,l\,n - n + 1 + \frac{1}{2}\,l\,n + \frac{1}{12\,n} - \frac{1}{12} + \mathrm{R} =$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) l\,n - n + \frac{1}{12\,n} + \left[1 - \frac{1}{12} + \mathrm{R}\right]$$

por tanto:

$$\mathrm{R} < \frac{n}{720}$$

$$n\,! = n^n \sqrt{n}\, e^{-n + \frac{1}{12\,n}}\, \alpha$$

siendo:

$$\alpha = e^{1 - \frac{1}{12} + \mathrm{R}}$$

La determinación α la haremos con la acostumbrada aplicación de la fórmula de Walis:

$$\frac{2^{4n}\left(\alpha\, n^{n + \frac{1}{2}}\, e^{-n + \frac{1}{12\,n}}\right)^4}{(2\,n + 1)\left(\alpha\, \overline{2\,n}^{\,2\,n + \frac{1}{2}}\, e^{-2\,n + \frac{1}{24\,n}}\right)^2} \rightarrow \frac{\alpha^2\, n\, e^{\frac{3}{12\,n}}}{2\,(2\,n + 1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\alpha^2}{4}$$

luego:

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \sqrt{2\,\pi}$$

y:

$$n\,! = n^n\, e^{-n + \frac{1}{12\,n}} \sqrt{2\,\pi\,n} \qquad [1]$$

Sabemos que la fórmula de Stirling es:

$$n\,! = n^n\, e^{-n} \sqrt{2\,\pi\,n} \qquad [2]$$

Teniendo en cuenta [1]:

$$e^{\frac{1}{12\,n}} = 1 + \frac{1}{12\,n} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{12\,n}\right)^2 + \ldots. < 1 + \frac{1}{12\,n} + \left(\frac{1}{12\,n}\right)^2 + \ldots = \frac{12\,n}{12\,n - 1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{12\,n - 1} < 1 + \frac{1}{11\,n}$$

El error absoluto será, por tanto:

$$E < n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{11n}\right) - n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

y el error relativo:

$$e < \frac{1}{11n} < \frac{1}{10n}$$

Estimamos que el empleo de la fórmula de Eüler-Maclaurin abrevia notablemente la demostración de la fórmula de Stirling, y que, dada la aplicación fecunda de la citada fórmula de Eüler para otros teoremas de Cálculo de Probabilidades y Estadística Matemática: correcciones de Sheppard..., la demostración de ella, aparte su notoria sencillez, puede darse por conocida, lo que manifiesta la ventaja del procedimiento expuesto.