

Máster Universitario en Ciencias Actuariales y Financieras
2017-2018

Trabajo Fin de Máster

Desaceleración de la longevidad en España

Identificación gradientes de inequidad de la longevidad

Teresa Alba Junge

Tutores

José Miguel Rodríguez-Pardo

Jesús Simón

Madrid, 6 de Junio de 2018



Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative Commons **Reconocimiento - No Comercial - Sin Obra Derivada**

Esta tesis es propiedad del autor. No está permitida la reproducción total o parcial de este documento sin mencionar su fuente. El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no se ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto.

En caso de obtener una calificación igual o superior a 8.0 Notable, autorizo la publicación de este trabajo en el centro de documentación de la Fundación Mapfre.

- Sí, autorizo a su publicación.
- No, desestimo su publicación.

Firmado:

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Alba J.' with a stylized flourish at the end.

Teresa Alba Junge

RESUMEN

La evolución de la longevidad es, sin duda, un tema de actualidad, que afecta y preocupa a todos los sectores de la sociedad, desde las entidades aseguradoras hasta los pensionistas. No es para menos, teniendo en cuenta que en España la esperanza de vida al nacer aumentó entre 1990 y 2016 de media más de 4 meses cada año.

Esta tendencia se atribuye a diversos factores, entre los que destacan los avances médicos que han hecho disminuir la mortalidad para determinadas causas muy extendidas, como las enfermedades cardiovasculares o el SIDA, la adopción de hábitos de vida más saludables y la mejora generalizada de las condiciones de vida.

Sin embargo, hay indicios de que esa tendencia no se podrá mantener en la misma medida. Por ello, teniendo en cuenta artículos publicados recientemente en otros países de nuestro entorno, como Estados Unidos y Reino Unido, en el presente trabajo se ha estudiado la tendencia de la longevidad en España durante los últimos años, detectando una incipiente desaceleración de la misma.

El análisis ha consistido principalmente en la aplicación de dos variantes del modelo Lee-Carter para la estimación y proyección de las tasas de mortalidad, las cuales han mostrado un buen desempeño para los años de estimación (1991-2010) pero un desajuste para los años proyectados (2011-2016).

A través de este análisis se ha podido concluir, por un lado, que una proyección basada en datos históricos, al considerar únicamente la evolución de la mortalidad en el periodo seleccionado, no puede predecir cambios de tendencia en la mortalidad, por lo que sería recomendable reevaluar los métodos actuales de modelización y proyección. Especialmente relevante resulta en el caso de los modelos actuariales, puesto que se estaría sobreestimando la longevidad, con las consiguientes consecuencias para las entidades aseguradoras y los asegurados.

Por otro lado, se ha detectado un gradiente socio-económico en la longevidad que resulta especialmente preocupante por las expectativas de agravación que se intuyen.

Por último, se han planteado ciertos aspectos de mejora, tanto en la modelización como respecto a la desigualdad, en base a las conclusiones del análisis y recientes líneas de investigación, si bien el desarrollo de un modelo concreto queda fuera del alcance de este trabajo.

Palabras clave: longevidad, mortalidad, desaceleración, inequidad, desigualdad, tendencias

ÍNDICE GENERAL

| | |
|---|----|
| 1. INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1.1. Motivación | 1 |
| 1.2. Objetivos | 2 |
| 2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA | 3 |
| 2.1. Tablas de Mortalidad. | 3 |
| 2.2. Defunciones y población | 6 |
| 2.3. Causas de muerte | 6 |
| 2.4. Nivel socio-económico | 7 |
| 2.5. Hipótesis | 8 |
| 3. METODOLOGÍA | 14 |
| 3.1. Modelización. | 14 |
| 3.1.1. Modelo Lee-Carter | 14 |
| 3.1.2. Modelo Lee-Carter extendido. | 31 |
| 4. RESULTADOS | 41 |
| 4.1. Desencadenantes de la desaceleración | 43 |
| 4.2. Métodos alternativos | 56 |
| 5. CONCLUSIONES | 57 |
| BIBLIOGRAFÍA. | 61 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Porcentaje de muertes por causa - Mujeres (1999-2016) | 7 |
| 2.2 | Porcentaje de muertes por causa - Hombres (1999-2016) | 7 |
| 2.3 | Tasas de mortalidad en función de la edad (1991-2016). | 8 |
| 2.4 | Tasas de mortalidad en función del año (1991-2016) | 9 |
| 2.5 | Evolución de las tasas de mortalidad acumulada (todas las causas) . . | 11 |
| 2.6 | Evolución de las tasas de mortalidad estandarizadas | 11 |
| 2.7 | Evolución de la esperanza de vida al nacer | 12 |
| 2.8 | Evolución del incremento anual medio (5 años) de la esperanza de vida | 13 |
| 3.1 | Parámetros resultantes modelo Lee-Carter (hombres y mujeres) . . . | 18 |
| 3.2 | Evolución del número de muertes accidentales en personas jóvenes (1999-2010) | 19 |
| 3.3 | Principales causas de muerte accidental entre jóvenes | 20 |
| 3.5 | Evolución de las principales causas de muerte | 21 |
| 3.6 | Residuos modelo Lee-Carter | 21 |
| 3.7 | Evolución del número de muertes por SIDA | 23 |
| 3.8 | Ajuste modelo Lee-Carter ($x = 30$) | 24 |
| 3.9 | Ajuste modelo Lee-Carter ($x = 65$) | 24 |
| 3.10 | Proyección k_t Lee-Carter (hombres y mujeres) | 25 |
| 3.11 | Proyección $m_{(65,t)}$ Lee-Carter (hombres y mujeres) | 26 |
| 3.12 | Proyección $m_{(70,t)}$ Lee-Carter (hombres y mujeres) | 26 |
| 3.13 | Proyección $m_{(75,t)}$ Lee-Carter (hombres y mujeres) | 27 |
| 3.14 | Proyección $m_{(80,t)}$ (Lee-Carter hombres y mujeres) | 27 |
| 3.15 | Curvas de supervivencia 2016 (Lee-Carter) | 28 |
| 3.16 | Proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ Lee-Carter (mujeres) | 29 |
| 3.17 | Proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ Lee-Carter (hombres) | 29 |
| 3.18 | Ampliación de la proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ Lee-Carter | 30 |
| 3.19 | Parámetros α_x , β_x^1 y k_t^1 (modelo extendido) | 32 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.20 | Parámetros β_x^2 y k_t^2 (modelo extendido) | 32 |
| 3.21 | Residuos modelo Lee-Carter extendido | 33 |
| 3.22 | Ajuste modelo extendido ($x = 30$) | 34 |
| 3.23 | Ajuste modelo extendido ($x = 65$) | 35 |
| 3.24 | Proyección k_t^1 y k_t^2 (mujeres) | 35 |
| 3.25 | Proyección k_t^1 y k_t^2 (hombres) | 36 |
| 3.26 | Proyección $m_{(65,t)}$ (hombres y mujeres) modelo extendido | 37 |
| 3.27 | Proyección $m_{(70,t)}$ (hombres y mujeres) modelo extendido | 37 |
| 3.28 | Proyección $m_{(75,t)}$ (hombres y mujeres) modelo extendido | 38 |
| 3.29 | Proyección $m_{(80,t)}$ (hombres y mujeres) modelo extendido | 38 |
| 3.30 | Proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ (mujeres) modelo extendido | 39 |
| 3.31 | Proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ (hombres) modelo extendido | 39 |
| 3.32 | Ampliación de la proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ modelo extendido | 40 |
| 4.1 | Ajuste de las SMR modelizadas | 41 |
| 4.2 | Ajuste de las SMR para periodo de observación reducido (2000-2010) | 42 |
| 4.3 | Ajuste de las SMR para modelo extendido a 5 componentes principales | 42 |
| 4.4 | Tasas de mortalidad por enfermedades del sistema circulatorio | 43 |
| 4.5 | Evolución de las principales causas de muerte accidental (1999-2016) | 44 |
| 4.6 | Tasas de mortalidad por cáncer | 45 |
| 4.7 | Evolución de las tasas de mortalidad (causas al alza) | 46 |
| 4.8 | Relación entre PIB y tasas de mortalidad por CCAA | 47 |
| 4.9 | Relación entre PIB y esperanza de vida por CCAA | 47 |
| 4.10 | Evolución del PIB per cápita a nivel nacional | 48 |
| 4.11 | Evolución del PIB per cápita a nivel regional | 48 |
| 4.12 | Evolución de la esperanza de vida al nacer a nivel regional | 49 |
| 4.13 | Indicadores socio-económicos a nivel regional (IGN Web) | 50 |
| 4.14 | Distribución de personas de 16 y más años por decil de renta según nivel de formación (2016) | 50 |
| 4.15 | Relación entre el nivel de educación y tasas de mortalidad por CCAA (2016) | 51 |
| 4.16 | Tasas de mortalidad según nivel de estudios (2016) | 51 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.17 | Contraste evolución del consumo del tabaco y la obesidad | 52 |
| 4.18 | Carencia material por nivel de formación alcanzado (2016) | 53 |
| 4.19 | Distribución de la población por nivel de estudios según CCAA (2016) | 53 |
| 4.20 | Comparativa entre índice socio-económico y mortalidad (Sanz et al. 2015, Díaz-Olalla y Benítez-Robredo 2015) | 55 |
| 4.21 | Comparativa entre tasa de riesgo de pobreza y esperanza de vida (IGN). | 55 |
| 5.1 | Indicios de causalidad entre gasto público y mortalidad | 57 |
| A.1 | Población estándar europea (Eurostat 2013) | |
| D.1 | Relación entre PIB y tasas de mortalidad por CCAA (2015) | |
| D.2 | Relación entre PIB y tasas de mortalidad por CCAA (2014) | |
| D.3 | Relación entre PIB y tasas de mortalidad por CCAA (2013) | |
| D.4 | Relación entre PIB y tasas de mortalidad por CCAA (2012) | |

ÍNDICE DE TABLAS

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Variables tablas de mortalidad - INE | 3 |
| 2.2 | Variación de las tasas de mortalidad entre periodos (mujeres) | 10 |
| 2.3 | Variación de las tasas de mortalidad entre periodos (hombres) | 10 |
| 2.4 | Variación anual media de las tasas de mortalidad (mujeres) | 10 |
| 2.5 | Variación anual media de las tasas de mortalidad (hombres) | 10 |
| 2.6 | Mejora anual media de las tasas de mortalidad | 12 |
| 2.7 | Incremento anual medio de la esperanza de vida | 13 |
| 3.1 | Variabilidad acumulada recogida por las componentes principales . . . | 18 |
| 3.2 | MAPE y MSE de los residuos (Lee-Carter) | 22 |
| 3.3 | Diferencias en los residuos por edades (Lee-Carter) | 23 |
| 3.4 | MAPE y MSE en el periodo proyectado (Lee-Carter) | 30 |
| 3.5 | Variabilidad acumulada recogida en las componentes principales . . . | 31 |
| 3.6 | MAPE y MSE de los residuos (modelo extendido) | 33 |
| 3.7 | Diferencias en los residuos por edades (modelo extendido) | 34 |
| 3.8 | Errores en la proyección (modelo extendido) | 40 |
| 4.1 | Mejoras relativas de las tasas de mortalidad por enfermedades del sistema circulatorio | 44 |
| 4.2 | Cambios destacados en las principales causas de muerte | 45 |

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación

En las últimas décadas, las tasas de mortalidad han mostrado una mejora notable, debida en gran medida a la adopción de hábitos de vida más saludables (alimentación, reducción en el consumo de tabaco, deporte,...etc.) y a los avances médicos, que según apunta Farmaindustria (2018), explican un 73 % del aumento de la esperanza de vida.

En particular, destaca el empleo de nuevos medicamentos para el tratamiento de enfermedades cardiovasculares, que han permitido reducir su incidencia e impacto, y los tratamientos antirretrovirales, que permitieron tratar el SIDA aumentando considerablemente la esperanza y calidad de vida de personas seropositivas, de los cuales ya se puede deducir un descenso en las tasas de mortalidad.

Sin embargo, es natural preguntarse si este aumento de la longevidad es sostenible en el tiempo, puesto que implicaría a su vez un aumento continuado y significativo de la esperanza de vida. Considerando, intuitivamente, que la esperanza de vida no puede continuar en aumento infinitamente, se plantea la pregunta de cuándo se producirá la desaceleración de la longevidad o si incluso podría llegar a producirse un aumento de la mortalidad.

En algunos países como Estados Unidos (Fenton, Kelley y Steiner 2016) y Reino Unido (Ridsdale 2017, Institute and Faculty of Actuaries 2018) se han llevado a cabo recientemente análisis en relación a las tendencias de las tasas de mortalidad en las últimas décadas, los cuales apuntan a que la desaceleración de las mejoras en las tasas de mortalidad ya se puede percibir. En concreto, de acuerdo a Fenton y Kelley (2018), las consecuencias de dicha desaceleración ya se detectan en la evolución de la esperanza de vida en Estados Unidos, que ha disminuido en los dos últimos años estudiados (2015 y 2016), e incluso se espera que la mortalidad aumente entre las clases sociales más desfavorecidas.

Si bien es necesario que pasen unos años para poder corroborar si se trata de un comportamiento puntual o de una tendencia a más largo plazo, se tiende a optar por la segunda opción considerando los factores que parecen causar la desaceleración.

En primer lugar, con carácter general, se observan cambios en las principales causas de muerte, entre los que destaca la reducción de las tasas de mortalidad por enfermedades del sistema circulatorio. Según apunta Palin (2017), un 70 % de la mejora en la mortalidad que se produjo entre los años 1968 y 2010 en Reino Unido se atribuye al descenso de las tasas de mortalidad por enfermedades del sistema circulatorio, las cuales se redujeron en los últimos 40 años en un 75 %. Por lo tanto,

el margen para futuras mejoras en la mortalidad derivada de estas patologías queda significativamente reducido. Adicionalmente, se percibe la tendencia al alza de otras enfermedades tales como el Alzheimer o la demencia senil.

Por otro lado, se menciona la existencia de un componente socio-económico con impacto en la evolución de las tasas de mortalidad. De acuerdo a Fenton et al. (2016) y Fenton y Kelley (2018) las personas con mejor posición socio-económica mostraron un mayor descenso de las tasas de mortalidad que aquellas personas con menor poder adquisitivo. Este hecho se achaca tanto a unos hábitos de vida más saludables, como al acceso a atención médica de calidad.

1.2. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es analizar si la evolución de la longevidad en España, al igual que en otros países de Occidente, presenta signos de desaceleración y profundizar en las posibles causas.

En este sentido, dadas las similitudes demográficas entre países de la Unión Europea y Estados Unidos, servirán como referencia los estudios mencionados anteriormente, considerando en todo momento las diferencias y peculiaridades que puedan aplicarse en el caso de España, como puede ser el acceso a servicios sanitarios públicos.

Adicionalmente, si se observa dicha desaceleración de la longevidad en los últimos años, cabe plantearse si se trata de un “bache” o si por el contrario se corresponde a un cambio de tendencia en las tasas de mortalidad.

Por último, se estudiará la posible existencia de un gradiente de inequidad en la mortalidad en España, sus causas y, en la medida de lo posible, su evolución y tendencia.

2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

La principal fuente de información en este trabajo es el Instituto Nacional de Estadística (INE) que publica periódicamente información detallada sobre los fenómenos demográficos y sociales en España, aunque puntualmente se utilizará información de los Ministerios de Educación, Cultura y Deporte y de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad.

2.1. Tablas de Mortalidad

Nacionales

En la web del INE están disponibles tablas de mortalidad a nivel nacional para todos los años comprendidos entre 1975 y 2016 (INE web).

Sin embargo, en 1991 se produjo un cambio en la estructura de los datos al aumentar la edad máxima, ω , de los 90 a los 100 años.

Por lo tanto, con el fin de evitar distorsiones en los datos, se utilizarán los datos de 1991 en adelante, es decir, un total de 26 años de histórico.

Estas tablas incluyen distintas variables, de las que se utilizarán:

Tabla 2.1. Variables tablas de mortalidad - INE

| Nombre | Notación | Descripción |
|--------------------|-------------|---|
| Tasa de mortalidad | $m_{(x,t)}$ | Número de personas que fallecen a la edad x en el año t por tiempo de exposición a dicho riesgo |
| Riesgo de muerte | $q_{(x,t)}$ | Probabilidad de que una persona que sobrevive hasta la edad x en el año t muera con esa edad |
| Esperanza de vida | $e_{(x,t)}$ | Número medio de años que restan por vivir a una persona de edad x en el año t |

El cálculo y la relación entre variables puede variar ligeramente entre distintas fuentes, por lo que se especifica la metodología utilizada por el INE (Metodología INE):

$$\begin{aligned}
 m_{(x,t)} &= d_{(x,t)} / L_{(x,t)} \\
 q_{(x,t)} &= d_{(x,t)} / l_{(x,t)} \\
 e_{(x,t)} &= \sum_{y \geq x} L_{(y,t)} / l_{(x,t)}
 \end{aligned}$$

donde, considerando una cohorte ficticia inicial $l_{(0,t)} = 100,000$:

- x : Edad de un individuo, tal que $0 \leq x \leq \omega$
 t : Año de calendario, entendido como el tiempo que transcurre entre t y $t + 1$
 $d_{(x,t)}$: Número de fallecidos en el año t con edad x
 $l_{(x,t)}$: Número de personas que sobreviven a la edad x en el año t
 $(l_{(x+1,t)} = l_{(x,t)} - d_{(x,t)})$
 $L_{(x,t)}$: Número de años vividos por las personas que tienen x años en el año t

Cabe destacar que si bien $l_{(x,t)}$ es una variable habitual en tablas de mortalidad y su definición es sencilla e intuitiva, la variable $L_{(x,t)}$ puede conllevar más confusión. Se trata de la exposición al riesgo de morir en el año t con edad x medida en años, por lo que aquellas personas que sobrevivan hasta $t+1$ aportarán un año completo, mientras que aquellas personas que fallezcan a lo largo del año t , en concreto $d_{(x,t)}$ personas, aportarán la fracción de año correspondiente. Por la complejidad de calcular $L_{(x,t)}$ en muchas ocasiones se aproxima mediante la población media de edad x a lo largo del año t o bien la población de edad x a mitad del año t .

En cualquier caso, es importante recalcar que en la documentación metodológica del INE se especifica la aproximación utilizada para calcular $q_{(x,t)}$ en base a $m_{(x,t)}$:

$$q_{(x,t)} = \frac{m_{(x,t)}}{1 + (1 - a_{(x,t)})m_{(x,t)}}, \quad (1)$$

donde $a_{(x,t)}$ expresa el “tiempo promedio vivido con edad cumplida x por aquellos individuos de la cohorte ficticia que mueren con dicha edad” (Metodología INE).

En consecuencia, $m_{(x,t)}$ y $q_{(x,t)}$ ofrecen valores muy cercanos el uno del otro, pero no iguales.

Puntualmente, en la sección 2.5, será necesario ampliar el horizonte temporal hasta 1986 para captar la tendencia de las variaciones en la esperanza de vida (imagen 2.8). Por lo tanto, en resumen:

| Variable | Desglose | Periodo | Fuente |
|----------------------------|--|-----------|--------|
| Tasa de mortalidad | · Sexo · Edad · Año | 1991-2016 | INE |
| Tasa de mortalidad | · Sexo · Edad (rangos 5 años) · Año · Causa de muerte | 1999-2016 | INE |
| Esperanza de vida al nacer | · Sexo · Edad · Año | 1986-2016 | INE |

Regionales

Análoga a la información nacional, el INE publica las tasas de mortalidad y la esperanza de vida por Comunidades Autónomas ¹, las cuales también se han empleado en el presente trabajo.

En este caso, el periodo seleccionado es el mismo (1991-2016), sin embargo el desglose por edades difiere respecto al nacional, estando agrupado para las Comunidades Autónomas de 5 en 5 años.

| Variable | Desglose | Periodo | Fuente |
|----------------------------|---------------------------|-----------|--------|
| Tasa de mortalidad | · Sexo · Año · CCAA | 2012-2016 | INE |
| Esperanza de vida al nacer | · Sexo · Año · CCAA | 1991-2016 | INE |

Tasas estandarizadas

En algunas ocasiones se utilizarán tasas estandarizadas de mortalidad, SMR por sus siglas en inglés ², que consisten en la agregación de los ratios de muertes específicos por edad o rangos de edad en base a una distribución estándar de la población.

Siempre que sea posible, como en el caso de las tasas por nivel de estudio, las tasas estandarizadas serán aquellas publicadas por el INE, sin embargo en algunos casos es necesario calcular estas tasas al no encontrarse con el nivel de desglose requerido o aplicarse a tasas correspondientes a estimaciones/proyecciones propias.

En estos casos se utilizará la distribución poblacional sugerida por Eurostat (2013) e incluida en el Anexo A.

En relación a las tasas estandarizadas, cabe destacar que es frecuente expresarlas en tanto en por cien mil, por lo que siempre se especificará la unidad de medida, así como el origen de las tasas mostradas (INE o elaboración propia), si bien se resume a continuación:

| Variable | Desglose | Periodo | Fuente |
|--|--|---------|--------|
| Tasas estandarizadas de mortalidad (edades ≥ 30) | · Sexo · Año · Nivel de estudios | 2016 | INE |

¹En adelante abreviado por CCAA.

²Del inglés, (*Age-*) *Standardized Mortality Rates* (SMR).

2.2. Defunciones y población

Se emplean también cifras en relación al número de defunciones (por edades y causas) y a la población (por edades y regiones), en cuyo caso se ha optado por utilizar la población a mitad de año (1 de julio), para ser consecuentes con la definición previa de las tasas de mortalidad $m_{(x,t)}$.

En ambos casos los datos se han extraído del INE para los años comprendidos entre 1991 y 2016.

| Variable | Desglose | Periodo | Fuente |
|----------------------------------|---|-------------------------|--------|
| Defunciones | · Sexo · Edad · Año | 1991-2016 | INE |
| Defunciones por causa (nacional) | · Sexo · Edad (rangos 5 años) · Año · Causa muerte | 1980 ³ -2016 | INE |
| Población residente a 1 de julio | · Sexo · Edad · Año | 1980-2016 | INE |

2.3. Causas de muerte

Para el análisis de las tendencias en las causas de muerte, se utilizarán tanto el número de defunciones como las tasas de mortalidad desglosados por causa de muerte, de acuerdo a lo detallado en apartados anteriores.

Respecto a las tasas, la información está disponible desde 1993, sin embargo mantiene el mismo formato desde 1999 (desglose por Comunidades Autónomas y enfermedades), por lo que se analizará a partir de este último año.

Para este periodo la segmentación consta de 102 enfermedades, agrupadas en 17 tipos de enfermedades, que serán los que se analicen en este trabajo. En concreto, se considerarán los 9 tipos de enfermedades más frecuentes, por ser coincidentes (aunque no en el mismo orden) entre hombres y mujeres y teniendo en cuenta que recogen entorno a un 95 % del total de fallecimientos, como se muestra a continuación:

³Puntualmente se utilizará la información desde 1980 (imagen 3.7), iniciando generalmente el periodo de estudio en 1991.

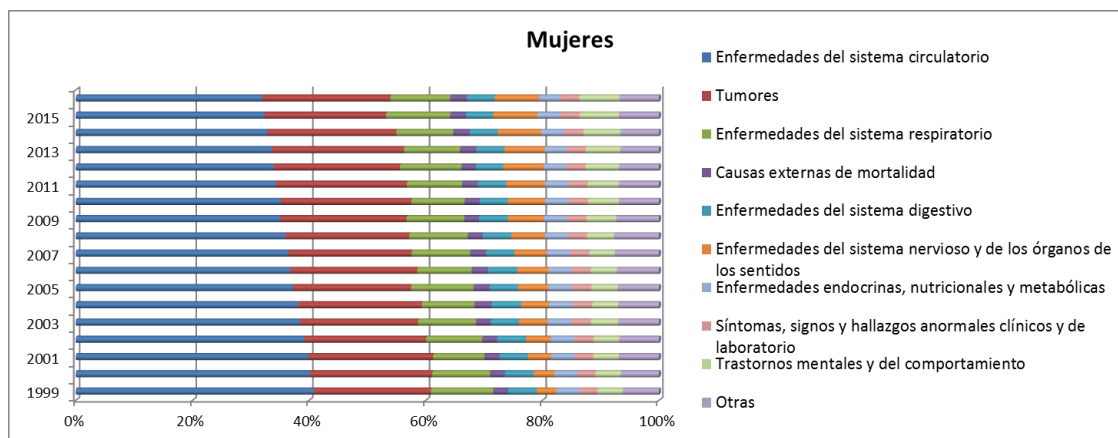


Figura 2.1. Porcentaje de muertes por causa - Mujeres. Fuente: INE; Elaboración propia.

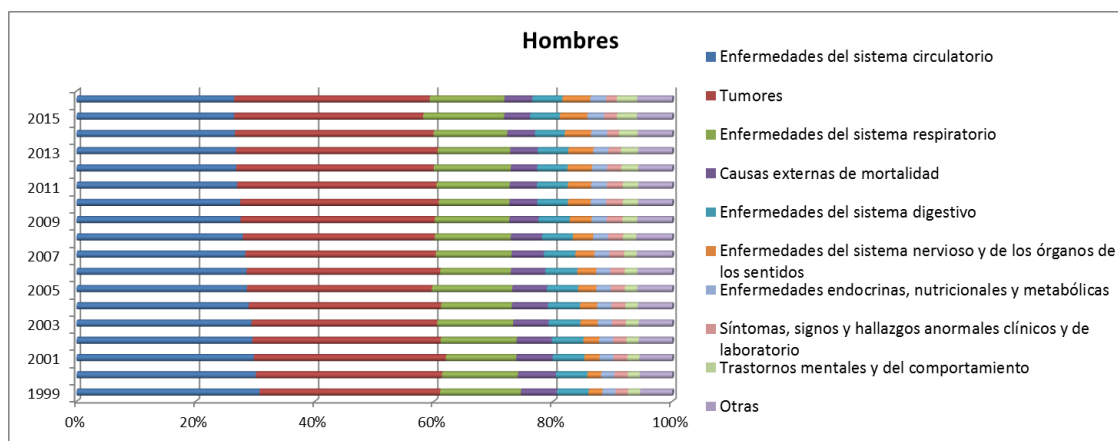


Figura 2.2. Porcentaje de muertes por causa - Hombres. Fuente: INE; Elaboración propia.

Si bien, más adelante se llevará a cabo un análisis más detallado de la distribución y evolución de las distintas causas de muerte, en este punto es reseñable que sólo las dos causas mayoritarias, enfermedades del sistema circulatorio y tumores, suponen alrededor de 55 %–60 % del total de defunciones.

2.4. Nivel socio-económico

Los índices seleccionados para la determinación del nivel socio-económico son variados, si bien todos se han obtenido de fuentes oficiales: Instituto Nacional de Estadística, Ministerio de Educación, Cultura y Deportes (MECD) y Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad (MSSSI). Por simplicidad, se resumen en la siguiente tabla las variables utilizadas:

| Variable | Desglose | Periodo | Fuente |
|--|-------------------------------|-----------|--------|
| Producto interior bruto per cápita (PIB) | · CCAA · Nacional | 2000-2016 | INE |
| Porcentaje de población (24-65 años) | · CCAA · Nivel de estudios | 2016 | MECD |
| Porcentaje de población (16+ años) por decil de renta | · Nivel de estudios | 2016 | MECD |
| Consumo de tabaco en adultos (porcentaje) | · Nivel de estudios | 1997-2016 | MSSSI |
| Obesidad en adultos (porcentaje) | · Nivel de estudios | 1997-2016 | MSSSI |
| Personas (16+ años) con carencia material (porcentaje) | · Nivel de estudios | 2016 | MECD |
| Gasto público en Sanidad | | 1988-2016 | MSSSI |
| Gastos internos corrientes en actividades de I+D | | 1988-2016 | INE |

2.5. Hipótesis

Como primera aproximación a los datos, se representa gráficamente la evolución de las tasas de mortalidad observadas respecto a la edad:

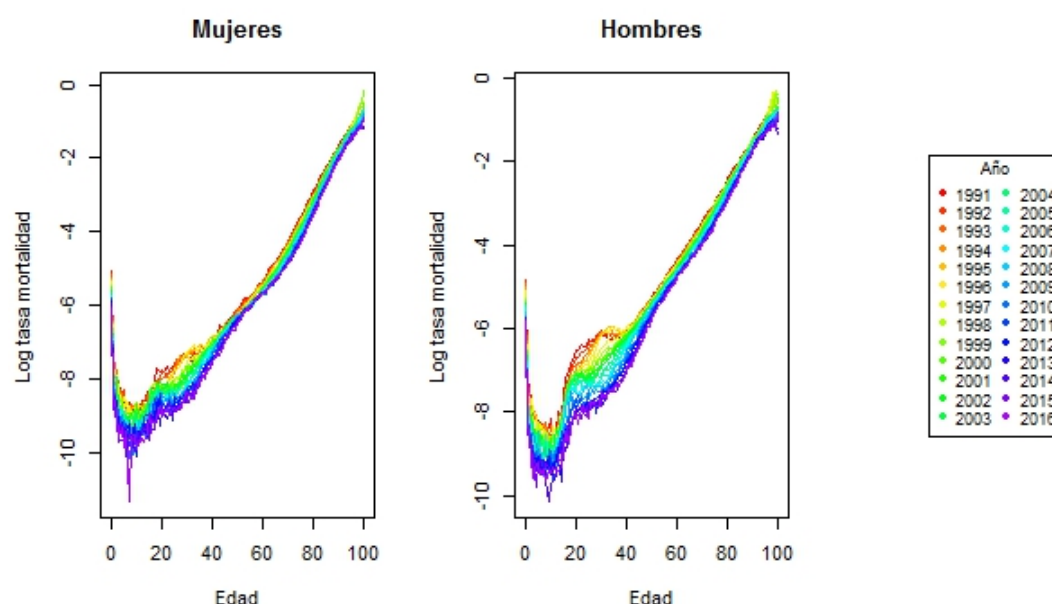


Figura 2.3. Tasas de mortalidad en función de la edad. Fuente: INE; Elaboración propia.

Se observan varias características propias de las tasas de mortalidad, que refuerzan la fiabilidad de los datos, como son:

- Un pico de la mortalidad en la edad inicial $x = 0$
- Una clara tendencia creciente de la mortalidad a partir del nacimiento
- Un repunte de la mortalidad para edades comprendidas entre los 20 y 40 años, especialmente notable en el caso de los hombres, debido a muertes accidentales. En la imagen puede apreciarse que este repunte es especialmente pronunciado a principios de la década de los 90, puesto que las líneas rojas y anaranjadas se distancian del resto de trayectorias.

De igual manera, se representa la evolución de las tasas de mortalidad a lo largo de los años y se observa una ligera tendendcia a la baja, más notable para edades bajas y medias, aunque no resulta posible sacar conclusiones a simple vista.

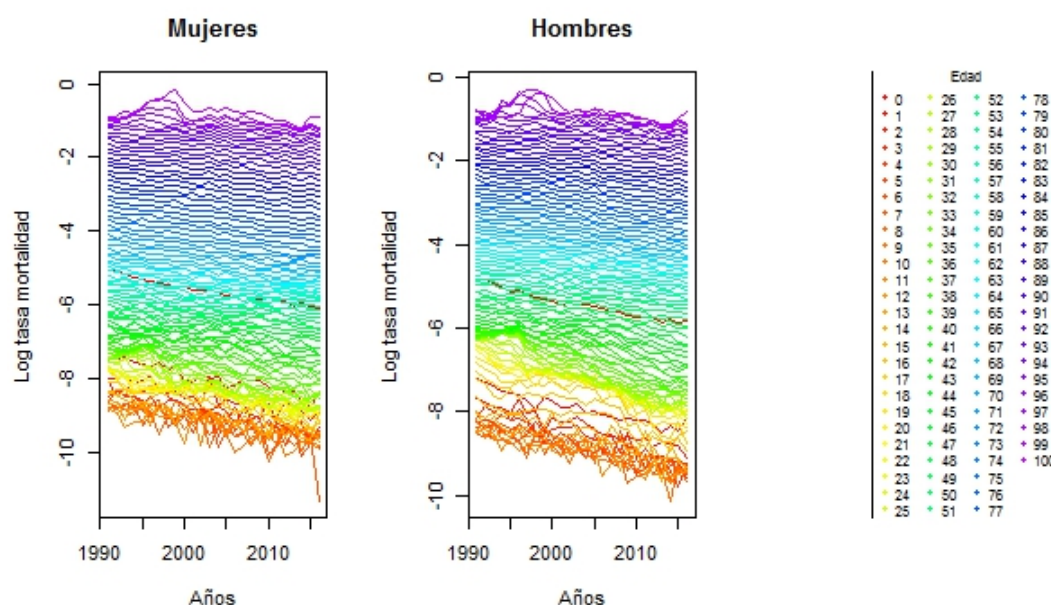


Figura 2.4. Tasas de mortalidad en función del año. Fuente: INE; Elaboración propia.

Como se ha dicho anteriormente, el principal objetivo de este trabajo es analizar si la disminución de las tasas de mortalidad se está desacelerando y para ello se realiza una primera y sencilla comparación de las variaciones de tasas de mortalidad como paso previo al análisis.

En primer lugar se contrasta la mejora porcentual que se produce entre los años 2000 y 2010 con aquella observada entre 2010 y 2016, es decir:

$$\text{mejora entre } t \text{ y } t + T = \Delta_t^{t+T} = \left(1 - \frac{m_{(x,t+T)}}{m_{(x,t)}}\right) \frac{1}{T}$$

Es importante tener en cuenta que estas cifras no recogen el comportamiento dentro de los periodos, sino que contrasta las cifras de dos años puntuales y se ajusta por

la duración del periodo correspondiente, para permitir la comparación entre ambas etapas.

Tabla 2.2. Variación de las tasas de mortalidad entre periodos (mujeres)

| MUJERES | | | | | | | | |
|------------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Periodo | Edades | | | | | | | |
| | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 | 90+ |
| 2000-2010 | 3,84 % | 3,73 % | 1,74 % | 0,46 % | 2,31 % | 2,64 % | 2,40 % | 1,75 % |
| 2010-2016 | 1,71 % | 2,26 % | 2,87 % | 0,63 % | -0,22 % | 1,91 % | 1,67 % | 0,98 % |
| Diferencia | -2,12 % | -1,46 % | 1,13 % | 0,17 % | -2,53 % | -0,72 % | -0,74 % | -0,76 % |

Fuente: INE; Elaboración propia.

Tabla 2.3. Variación de las tasas de mortalidad entre periodos (hombres)

| HOMBRES | | | | | | | | |
|------------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Periodo | Edades | | | | | | | |
| | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 | 90+ |
| 2000-2010 | 5,10 % | 5,18 % | 3,02 % | 1,54 % | 2,20 % | 2,43 % | 1,83 % | 1,66 % |
| 2010-2016 | 3,30 % | 2,79 % | 4,45 % | 2,24 % | 0,93 % | 1,70 % | 1,75 % | 1,10 % |
| Diferencia | -1,80 % | -2,38 % | 1,42 % | 0,70 % | -1,27 % | -0,74 % | -0,08 % | -0,56 % |

Fuente: INE; Elaboración propia.

De manera análoga, se contrasta la mejora anual media de los periodos, es decir la media de Δ_k^{k+1} para $t \leq k < T$, con el fin de recoger las fluctuaciones dentro de los periodos.

Tabla 2.4. Variación anual media de las tasas de mortalidad (mujeres)

| MUJERES | | | | | | | | |
|------------|---------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Periodo | Edades | | | | | | | |
| | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 | 90+ |
| 2000-2010 | 3,52 % | 0,11 % | 0,82 % | 0,33 % | 2,50 % | 2,96 % | 2,61 % | 1,71 % |
| 2010-2016 | 0,36 % | 1,43 % | 2,91 % | 0,50 % | -0,32 % | 1,95 % | 1,61 % | 0,76 % |
| Diferencia | -3,16 % | 1,32 % | 2,09 % | 0,17 % | -2,82 % | -1,00 % | -1,00 % | -0,96 % |

Fuente: INE; Elaboración propia.

Tabla 2.5. Variación anual media de las tasas de mortalidad (hombres)

| HOMBRES | | | | | | | | |
|------------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Periodo | Edades | | | | | | | |
| | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 | 90+ |
| 2000-2010 | 6,39 % | 6,81 % | 3,41 % | 1,53 % | 2,37 % | 2,69 % | 1,91 % | 1,62 % |
| 2010-2016 | 2,93 % | 2,52 % | 4,95 % | 2,32 % | 0,88 % | 1,70 % | 1,75 % | 0,78 % |
| Diferencia | -3,45 % | -4,28 % | 1,54 % | 0,79 % | -1,49 % | -0,99 % | -0,16 % | -0,84 % |

Fuente: INE; Elaboración propia.

Como se puede apreciar en ambos casos, las tasas de mortalidad han disminuido en ambas décadas para prácticamente todos los rangos de edades (a excepción de uno), tanto en mujeres como en hombres, sin embargo la disminución es generalmente menor en el periodo comprendido entre 2010 y 2016, lo cual podría señalar una incipiente desaceleración de la longevidad.

Si bien es cierto que la aparente desaceleración no se observa en todos los rangos de edad, especialmente entre las edades 40 y 59, sí se mantiene para los rangos de edad superiores a los 60 años.

En vista de la falta de homogeneidad entre los rangos de edad, se opta por ver la evolución de las tasas de mortalidad acumuladas para todas las causas de muerte:

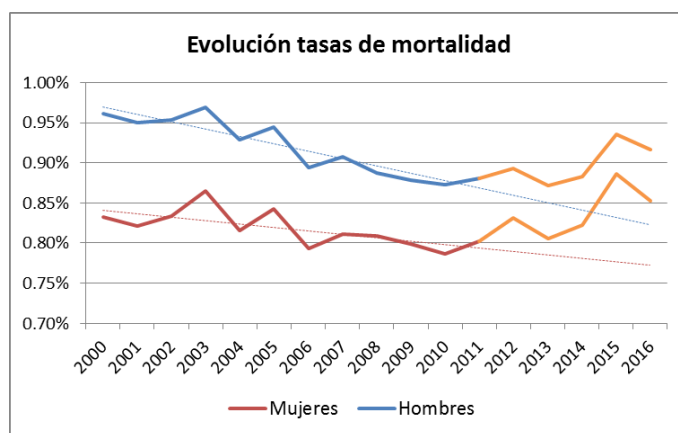


Figura 2.5. Evolución de las tasas de mortalidad acumulada. Fuente: INE; Elaboración propia.

También al agregar las tasas de mortalidad mediante el cálculo de tasas estandarizadas⁴ se observa un comportamiento similar:

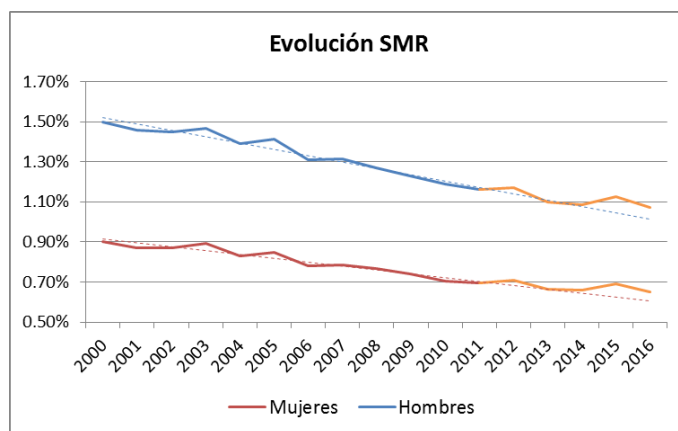


Figura 2.6. Evolución de SMR. Fuente: INE; Elaboración propia.

⁴Cálculo propio en base a la distribución propuesta en Eurostat (2013)

En ambos gráficos se intuye la desaceleración de la longevidad, aunque llaman la atención las diferencias tanto en la magnitud de las tasas como en la intensidad de la desaceleración. En este sentido es importante recordar que las tasas estandarizadas representadas en 2.6 precisamente se basan en la eliminación del efecto de cambios en la estructura de edades, mientras que la imagen 2.5 sí estaría recogiendo el envejecimiento de la población.

A pesar de las diferencias, es evidente que las tasas de mortalidad a partir de 2011 quedan en ambos casos por encima de la tendencia observada entre los años 2000 y 2010 (líneas punteadas), apuntando a la disminución de las mejoras en la mortalidad en España, si bien no es tan pronunciada como en el caso de Reino Unido (Institute and Faculty of Actuaries 2018), y los datos así lo corroboran:

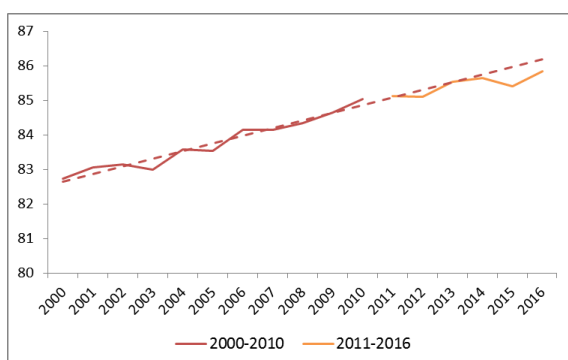
Tabla 2.6. Mejora anual media de las tasas de mortalidad

| | Tasas de mortalidad (todas las causas) | | Tasas de mortalidad estandarizadas | |
|-------------------|---|---------|---------------------------------------|---------|
| | Mujeres | Hombres | Mujeres | Hombres |
| 2000-2010 | 0,50 % | 0,93 % | 2,37 % | 2,25 % |
| 2010-2016 | -1,42 % | -0,85 % | 1,29 % | 1,64 % |
| Diferencia | -1,93 % | -1,78 % | -1,08 % | -0,61 % |

Fuente: INE; Elaboración propia.

Por otro lado, se observa la evolución de la esperanza de vida para recién nacidos en los mismos periodos.

(a) Mujeres



(b) Hombres

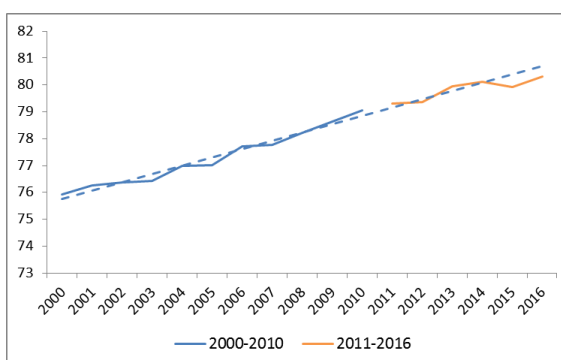


Figura 2.7. Evolución de la esperanza de vida al nacer. Fuente: INE; Elaboración propia.

Se aprecia que, en concordancia con las tasas de mortalidad, la evolución de la esperanza de vida entre 2011 y 2016 se sitúa por debajo de la tendencia de la primera década del siglo XXI (líneas punteadas).

Adicionalmente, de manera análoga a las comparativas llevadas a cabo para las tasas de mortalidad, se analiza el promedio de los incrementos relativos anuales:

Tabla 2.7. Incremento anual medio de la esperanza de vida

| | Mujeres | Hombres |
|----------------------------------|---------|---------|
| 2000-2010 | 0,27 % | 0,40 % |
| 2010-2016 | 0,16 % | 0,26 % |
| Diferencia | -0,12 % | -0,14 % |
| Fuente: INE; Elaboración propia. | | |

Por último, para contemplar el periodo completo de observación (1991-2010), se representa a continuación la evolución de la media de las mejoras anuales de los últimos 5 años de la esperanza de vida al nacer. Por lo tanto, a modo de ejemplo, el dato correspondiente al año 2000 es igual a la media de los incrementos anuales observados entre 1995 y 2000, lo cual permite suavizar la curva.

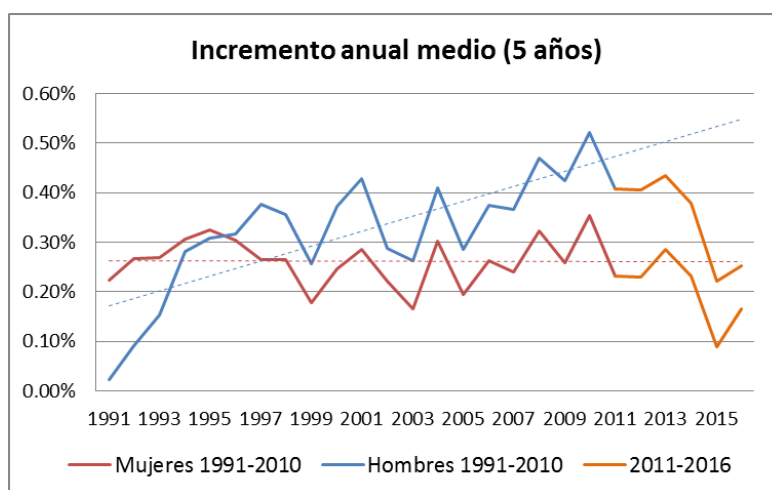


Figura 2.8. Evolución de la esperanza de vida. Fuente: INE; Elaboración propia.

Una vez más, los incrementos en la esperanza de vida parecen ralentizarse en los últimos años.

En vista de estos resultados en su conjunto, parece haber indicios suficientes para suponer que en España también se está produciendo un cambio de tendencia en la mortalidad.

Por ello, de ahora en adelante, este trabajo tratará de demostrar la incipiente desaceleración de la longevidad y, en la medida de lo posible, se abordarán los factores que *a priori* explican el cambio de tendencia, tales como la menor incidencia de los avances médicos y la evolución de las principales causas de muerte.

3. METODOLOGÍA

Una forma intuitiva y clara de corroborar el cambio de tendencia en los últimos años consiste en modelizar el comportamiento de las tasas de mortalidad hasta un año determinado, pudiendo así proyectar las tasas de mortalidad para los años siguientes y contrastarlas con las tasas observadas.

En esta línea, se tomarán como datos de observación o estimación los comprendidos entre 1991 y 2010, ambos inclusive, al considerar una ventana de 20 años suficientemente amplia y asegurando que se preserva la homogeneidad de los datos.

Se proyectarán por tanto las tasas de mortalidad entre 2011 y 2016, obteniendo valores para un periodo de 6 años que permitirán un contraste de tendencias (proyectadas vs observadas) más fiable, al no ser un periodo excesivamente corto ni largo.

La herramienta utilizada para los cálculos que se presentan en esta sección es *R*, si bien se ha utilizado *Excel* en ocasiones puntuales como herramienta auxiliar para la organización o representación de los datos.

3.1. Modelización

Se opta por aplicar el modelo **Lee-Carter**, puesto que es un modelo ampliamente utilizado en el sector asegurador y, sin ser un modelo excesivamente complejo, presenta en términos generales buenos resultados y se caracteriza por una fácil interpretación de sus parámetros, como bien apuntan Albarrán, Ariza, Cóbreces, Durbán y Rodríguez-Pardo (2014)

Precisamente gracias a la popularidad del modelo, la literatura acerca del mismo es amplia y se han publicado diversos estudios de ampliaciones de dicho modelo. En el presente trabajo se aplicará una extensión del modelo Lee-Carter, propuesta por Debón, Martínez y Montes (2007).

En primer lugar, se detalla el modelo desde un punto de vista teórico y posteriormente se presentan los resultados de su aplicación sobre los datos específicos de la mortalidad en España.

3.1.1. Modelo Lee-Carter

El modelo Lee-Carter se centra en el logaritmo neperiano de las tasas de mortalidad, ajustándolas mediante el método de máxima verosimilitud para obtener una

expresión de la siguiente forma:

$$\ln(m_{(x,t)}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t} \iff m_{(x,t)} = e^{\alpha_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t}} \quad (2)$$

donde

α_x : Recoge el efecto de la edad

β_x : Recoge el efecto de la edad asociado al paso del tiempo (periodo), es decir, la sensibilidad de un determinado grupo de edad a los cambios en k_t

k_t : Recoge el efecto del paso del tiempo, es decir, la tendencia de la mortalidad a lo largo del periodo

$\epsilon_{x,t}$: Representa el error de la estimación, por lo tanto, variaciones no recogidas por el modelo

Sin embargo, no es difícil comprobar que esta ecuación no tiene solución única. Basta ver que para unos valores α_x^* , β_x^* y k_t^* dados, la siguiente transformación ofrece una solución alternativa para cualquier $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha_x^* &\rightsquigarrow \alpha_x^{**} = \alpha_x^* - \beta_x^* c \\ k_t^* &\rightsquigarrow k_t^{**} = k_t^* + c \end{aligned}$$

Este hecho no supone un obstáculo para la aplicación del modelo, puesto que transformaciones como esta darían lugar a las mismas estimaciones (y proyecciones), sin embargo se opta por normalizar los parámetros mediante la aplicación de las siguientes restricciones:

$$\sum_x \beta_x = 1 \quad (3)$$

$$\sum_t k_t = 0 \quad (4)$$

Se podría interpretar (3) como la distribución del parámetro β_x a lo largo de la estructura de edades, aunque no necesariamente de forma uniforme.

A su vez, (4) implica que para una edad fija x_0 la estimación del modelo debe ser muy próxima a la media de $\ln(m_{(x_0,t)})$ respecto de t . Basta ver que:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in [1, T]} \ln(m_{(x_0, t)}) &\approx \sum_{t \in [1, T]} (\alpha_{x_0} + \beta_{x_0} k_t) \\ &\approx T \alpha_{x_0} + \beta_{x_0} \underbrace{\sum_{t \in [1, T]} k_t}_{=0} \\ \Rightarrow \alpha_{x_0} &\approx \frac{\sum_{t \in [1, T]} \ln(m_{(x_0, t)})}{T} = \overline{\alpha_{x_0}} \end{aligned} \quad (5)$$

de manera que α_{x_0} equivale a la media de las tasas reales $\ln(m_{(x,t)})$ en el tiempo, salvo por el error propio del modelo.

Al aplicar este modelo, como se puede deducir de (2), se está asumiendo que no existe interacción entre la edad y x y el tiempo t .

Esta hipótesis es considerada uno de los principales puntos débiles del modelo Lee-Carter, puesto que, como señalan Girosi y King (2007), algunos estudios apuntan a la existencia de cierto grado de dependencia entre ambas variables, o lo que es lo mismo, entre los parámetros β_x y k_t .

Una vez sentadas las bases necesarias del modelo Lee-Carter, se detallan a continuación los pasos a seguir para la obtención de los parámetros α_x , β_x y k_t del modelo.

En primer lugar, se calculan los valores de $\alpha_x = (\alpha_x)_{x=0,1,\dots,\omega}$ como se detalla en (5).

A partir de este resultado, se calcula “el residuo” o, dicho de otra manera, los logaritmos de las tasas de mortalidad centrados en la media, $(\tilde{m}_{(x,t)} = \ln(m_{(x,t)}) - \alpha_x)$. Éstos deben de corresponder con la multiplicación de los vectores β_x y k_t . Matricialmente:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{m}}_{(\omega+1) \times \mathbf{T}} &= (\ln(m_{(x,t)}))_{\substack{x=0,\dots,\omega \\ t=1,\dots,T}} - \underbrace{(\alpha_x \mid \cdots \mid \alpha_x)}_T \\ &= \begin{bmatrix} \ln(m_{(0,1)}) & \cdots & \ln(m_{(0,T)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln(m_{(\omega,1)}) & \cdots & \ln(m_{(\omega,T)}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_0 & \cdots & \alpha_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_\omega & \cdots & \alpha_\omega \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{m}}_{(\omega+1) \times \mathbf{T}} &\stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\omega \end{pmatrix} (k_1 \cdots k_T) = [\beta_x (k_t)^T]_{\substack{x=0,\dots,\omega \\ t=1,\dots,T}} \end{aligned}$$

Los valores de β_x y k_t bajo máxima verosimilitud se obtienen al aplicar el método de descomposición en valores singulares, es decir, encontrando $U \in \mathbb{R}^{(\omega+1) \times T}$, $D \in \mathbb{R}^{T \times T}$ y $V \in \mathbb{R}^{T \times T}$ tales que

$$\tilde{\mathbf{m}}_{(\omega+1) \times \mathbf{T}} = UDV^T, \quad (6)$$

donde U y V son matrices ortogonales ⁵ y D es una matriz diagonal que contiene los autovalores de $\tilde{\mathbf{m}}_{(\omega+1) \times \mathbf{T}}$ ordenados de mayor a menor.

Una vez encontradas estas matrices, los valores de β_x y k_t se definen de forma inmediata como sigue:

$$\begin{aligned} \beta_x &= \left(\frac{U_{(i,1)}}{\sum_i U_{(i,1)}} \right)_{i=0,\dots,\omega} \Rightarrow \text{Primera columna de } U \text{ normalizada} \\ k_t &= D_{(1,1)} (V_{(j,1)})_{j=0,\dots,T} \sum_i U_{(i,1)} \Rightarrow \text{Mayor autovalor} \times \text{autovector} \\ &\quad \text{correspondiente, escalado por la suma de } \beta_x \end{aligned}$$

⁵Se dice que una matriz cuadrada $A_{n \times n}$ es ortogonal cuando su traspuesta coincide con su inversa, es decir, $AA^T = \mathbf{I}_n$.

En este punto cabe destacar que en algunas ocasiones se aplica un ajuste sobre el vector k_t para minimizar la diferencia entre el número de muertes estimadas y reales. Es el caso de la función 'lca' incluida en el programa R que se utilizará en apartados posteriores.

Como se puede observar en (6), el modelo de Lee-Carter equivale a un caso particular del método de componentes principales, en el que sólo se utiliza la primera componente principal (β_x).

Bajo este enfoque, se puede determinar fácilmente qué porcentaje de variabilidad recoge cada componente principal y determinar si aplicando este modelo la variabilidad es suficientemente representativa:

$$\text{Porcentaje de variabilidad recogido en la componente } i = \frac{D_{(i,i)}^2}{\sum_j D_{(j,j)}^2}.$$

Una vez se tienen todos los parámetros del modelo, el siguiente paso consiste en proyectar las tasas de mortalidad en el tiempo. Para ello el modelo Lee-Carter proyecta los valores de k_t mediante un paseo aleatorio con deriva, manteniendo los valores de α_x y β_x fijos, puesto que éstos no se ven afectados por la variable t .

Es por lo tanto un proceso estocástico definido mediante la siguiente ecuación:

$$k_t = k_{t-1} + d + \epsilon_t^k,$$

equivalente a un modelo $ARIMA(0, 1, 0)$ con deriva.

Se observa que que los k_i no son independientes entre sí, pero por el contrario las diferencias $\Delta k_i = k_i - k_{i-1} = d + \epsilon_i^k$ sí lo son.

Adicionalmente, es fácil ver que, siendo T el número de años recogidos en el periodo de observación, para un Δt dado se tiene mediante iteración:

$$k_{T+\Delta t} = k_T + (\Delta t)d + \sum_{h=T}^{T+\Delta t} \epsilon_h^k$$

Por lo tanto, la proyección consiste en extrapolar la línea recta que conforman el primer y último valor de k_t , es decir k_1 y k_T , y el valor de d se estima en:

$$\hat{d} = \frac{k_T - k_1}{T - 1}.$$

Aplicación

En primer lugar se aplica el modelo Lee-Carter previamente descrito y determinado por (2) para el periodo de observación (1991-2010), como se detalla en el Anexo B, y se analiza la variabilidad recogida en la primera componente principal.

Tabla 3.1. Variabilidad acumulada recogida por las componentes principales

| | Componentes principales | | | | | | | | | | | |
|----------------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|--------|
| | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª | 6ª | 7ª | 8ª | 9ª | 10ª | ... | 20ª |
| Mujeres | 76,9% | 81,1% | 84,9% | 87,5% | 90,0% | 91,7% | 93,3% | 94,4% | 95,4% | 96,3% | ... | 100,0% |
| Hombres | 85,4% | 88,7% | 91,6% | 93,3% | 94,5% | 95,6% | 96,4% | 97,1% | 97,7% | 98,2% | ... | 100,0% |
| Total | 88,3% | 91,4% | 93,9% | 95,2% | 96,2% | 96,9% | 97,5% | 98,0% | 98,4% | 98,7% | ... | 100,0% |

Elaboración propia.

Se aprecia que el modelo ajustado a las tasas de mortalidad de mujeres recoge mucha menos variabilidad que el de los hombres para un mismo número de componentes principales y, curiosamente, el modelo que capta mayor porcentaje de variabilidad es aquel que se ajusta a las tasas conjuntas.

Algunos estudios como Girosi y King (2007) indican que es más probable que los resultados del modelo Lee-Carter sean satisfactorios para aquellos casos donde la primera componente principal recoge al menos un 90 % de la variabilidad total de los datos.

Los resultados de la tabla 3.1 están lejos de este umbral, sin embargo esto no implica que el modelo no se pueda aplicar, sino que hay que ser especialmente cuidadoso a la hora de analizar la fiabilidad de los resultados.

Por ello, se aplica el modelo sobre el periodo de observación y se analizan los parámetros resultantes de la estimación, distinguiendo entre mujeres y hombres.

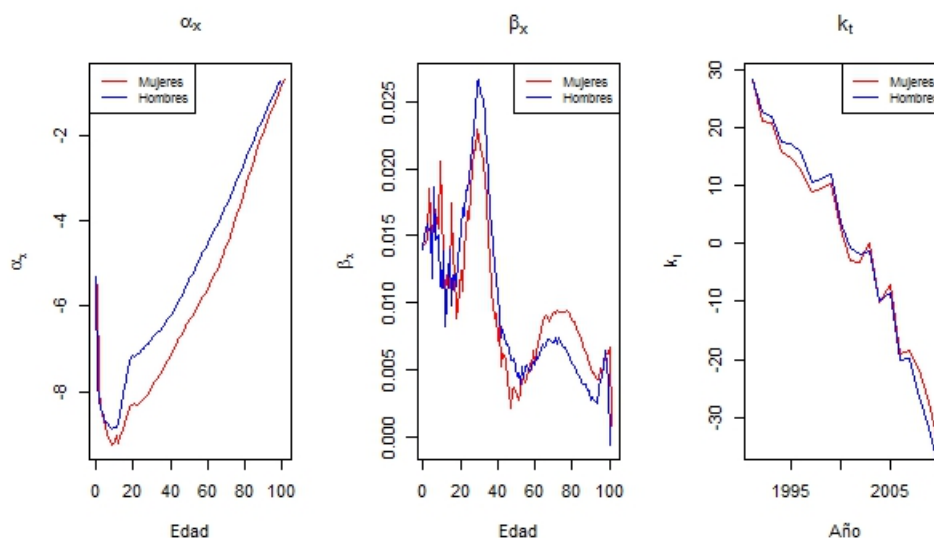


Figura 3.1. Parámetros resultantes modelo Lee-Carter. Elaboración propia.

Se aprecia como los gráficos de α_x representan la tendencia de las tasas de mortalidad en función de la edad previamente vistas en el gráfico 2.3, incluyendo la peculiaridad de la edad $x = 0$ y el repunte por muertes accidentales para edades entre los 20 y los 40 años aproximadamente.

De igual manera, el factor k_t es claramente decreciente en el tiempo, corroborando la continua mejora de las tasas de mortalidad en las últimas décadas.

La interpretación del gráfico correspondiente al parámetro β_x resulta algo más compleja, pero siendo consecuentes con la definición de éste, se podría concluir que las edades cuyas tasas de mortalidad son más sensibles al paso de los años son aquellas próximas a los 30 años, así como entre los 60 y los 80 años.

Se deduce por lo tanto, que la reducción de la mortalidad es especialmente notable para estos dos rangos de edades, para el primero de los cuales se explica por el descenso de la principal causa de muerte: los accidentes ⁶.

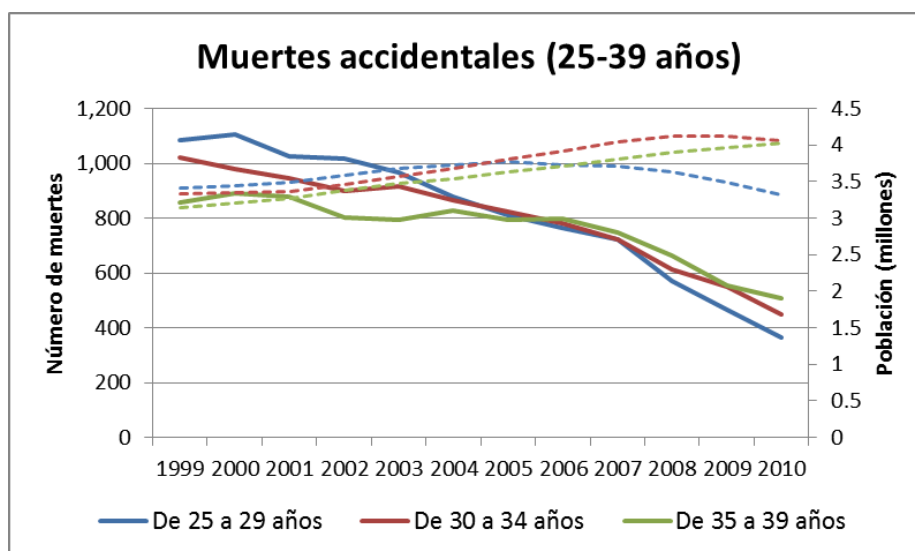


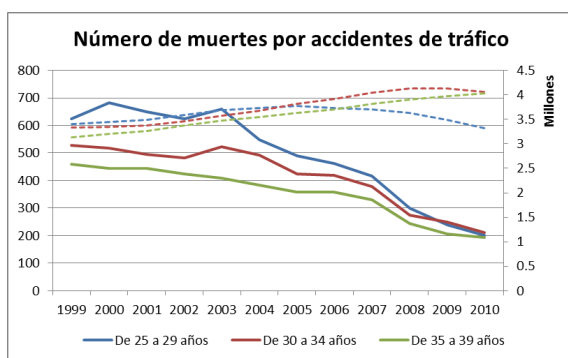
Figura 3.2. Evolución del número de muertes accidentales. Fuente: INE; Elaboración propia.

Como se aprecia en la imagen anterior, el número de muertes accidentales en personas de entre 25 y 39 años cae en poco más de 10 años de manera espectacular hasta reducirse prácticamente a la mitad, sin que ello esté justificado por una disminución proporcional de la población (líneas punteadas, eje vertical derecho).

En particular, si desglosamos por tipo de accidente, es evidente que el descenso del número de muertes se debe principalmente a la evolución de los accidentes de tráfico, que suponen alrededor de un 50% del total de muertes accidentales, y en menor medida a la disminución de muertes por envenenamiento accidental por psicofármacos y drogas. A continuación se muestra gráficamente la disminución mencionada junto con la evolución de la población respectiva (líneas punteadas), de manera que facilite la valoración de la repercusión en las tasas de mortalidad:

⁶En las bases de datos utilizadas (INE) computan como muertes por accidente aquellas causadas por accidentes de tráfico de vehículos de motor, otros accidentes de transporte, caídas accidentales, ahogamiento, sumersión y sofocación accidentales, accidentes por fuego, humo y sustancias calientes, envenenamiento accidental por psicofármacos y drogas de abuso, otros envenenamientos accidentales y otros accidentes

(a) Accidentes de tráfico



(b) Psicofármacos y drogas

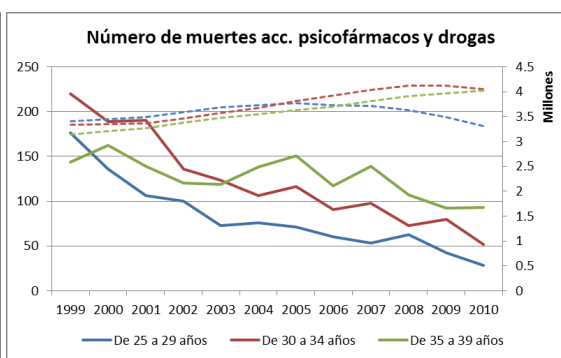
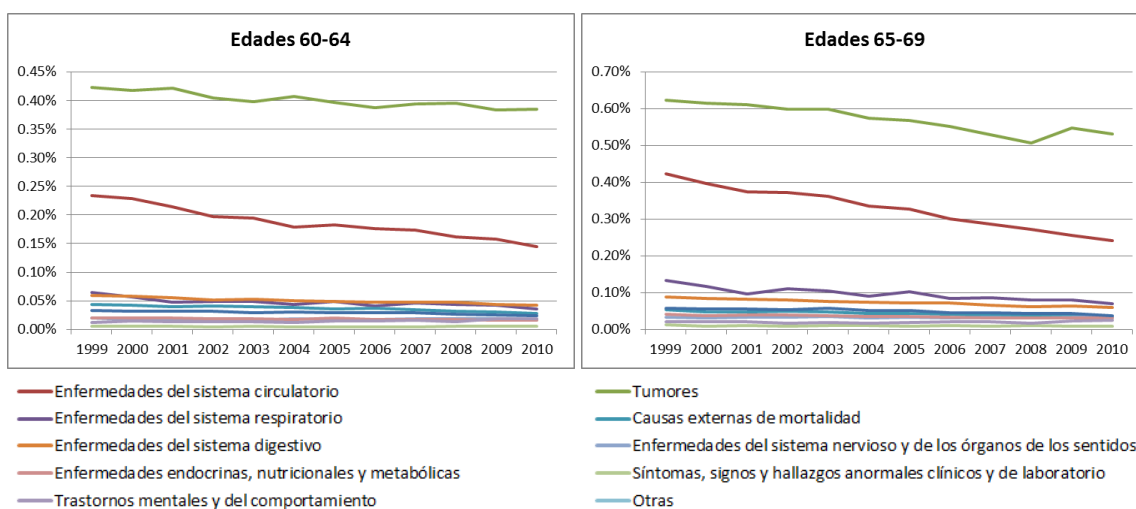


Figura 3.3. Principales causas de muerte accidental entre jóvenes. Fuente: INE; Elaboración propia.

Los motivos subyacentes pueden ser varios y variados, tales como una mayor concienciación de la sociedad, la introducción del carné de conducir por puntos (julio 2006) y el impacto de la crisis económica (menor uso de vehículos, menor consumo de drogas,...etc.). Lo más probable es que, de hecho, todos los factores influyan en mayor o menor medida, sin embargo este análisis excede el alcance de este trabajo.

En el caso de las personas entre los 60 y 80 años, el repunte de β_x es menos pronunciado y el motivo de éste menos obvio, puesto que las muertes no se concentran en una sola causa y las causas de muerte prevaecientes son más cambiantes según el rango de edad.

Sin embargo, observando la evolución de las tasas de mortalidad para las principales causas de muerte, se aprecia un denominador común y es la disminución de las tasas de muertes debidas a enfermedades del sistema circulatorio.



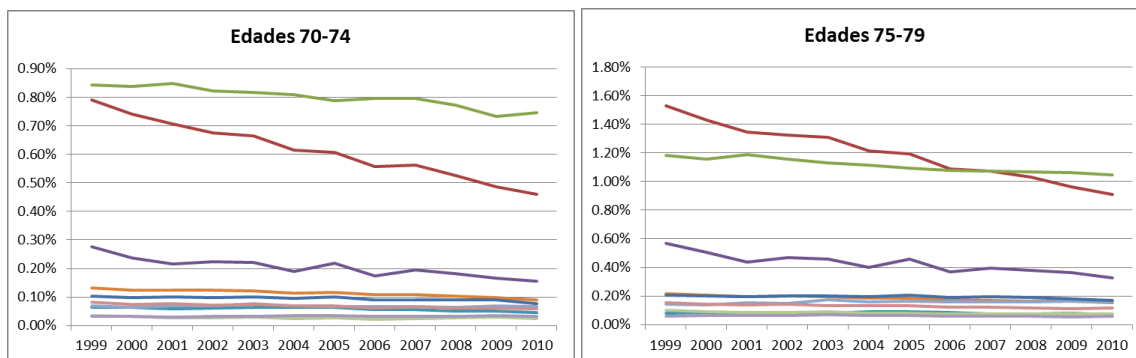


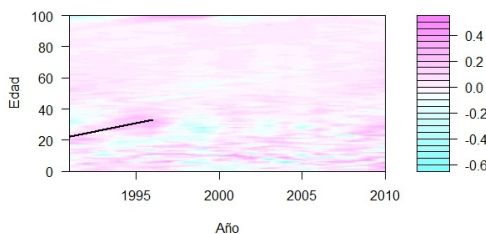
Figura 3.5. Evolución de las principales causas de muerte. Fuente: INE; Elaboración propia.

Parece por lo tanto que el decremento de dichas tasas es un factor determinante, si bien no necesariamente el único, en la mejora de las tasas de mortalidad para personas de edades entre los 60 y 80 años.

Una vez analizados el comportamiento y la coherencia de los parámetros estimados (α_x , β_x y k_t), se quiere analizar el desempeño del modelo a través de sus residuos.

Respecto a éstos, entendidos como $\ln\left(m_{(x,t)}^{INE}\right) - \ln\left(m_{(x,t)}^{modelo}\right)$, se opta por una representación en un mapa de calor que recoja todas las componentes y permita detectar posibles concentraciones de los residuos.

(a) Mujeres



(b) Hombres

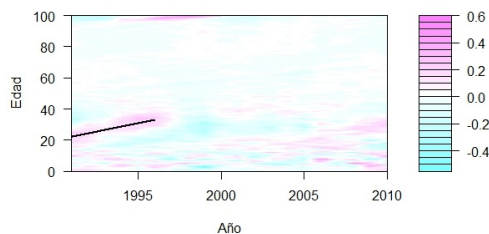


Figura 3.6. Residuos modelo Lee-Carter. Elaboración propia.

A simple vista, se puede intuir que el modelo es relativamente bueno, ya que los colores tenues apuntan a residuos pequeños. Para tener una idea de su dimensión y distribución, se muestran a continuación cifras relativas a su media y desviación, en concreto:

$$MAPE_t^7 = \frac{\sum_x \frac{|m_{(x,t)} - \hat{m}_{(x,t)}|}{m_{(x,t)}}}{\omega + 1}$$

$$MSE_t^8 = \sqrt{\sum_x \frac{(m_{(x,t)} - \hat{m}_{(x,t)})^2}{\omega + 1}}$$

Tabla 3.2. MAPE y MSE de los residuos (Lee-Carter)

| Año | Mujeres | | Hombres | |
|---------------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| | MAPE | MSE | MAPE | MSE |
| 1991 | 7,72 % | 0,02258 | 7,96 % | 0,01587 |
| 1992 | 6,52 % | 0,01740 | 6,22 % | 0,01991 |
| 1993 | 5,71 % | 0,00700 | 4,72 % | 0,01859 |
| 1994 | 5,95 % | 0,02258 | 5,76 % | 0,01031 |
| 1995 | 6,47 % | 0,01016 | 5,83 % | 0,01232 |
| 1996 | 8,07 % | 0,02244 | 7,12 % | 0,02576 |
| 1997 | 7,16 % | 0,02453 | 5,83 % | 0,03187 |
| 1998 | 7,62 % | 0,03317 | 7,62 % | 0,03531 |
| 1999 | 9,80 % | 0,03784 | 9,85 % | 0,02831 |
| 2000 | 7,05 % | 0,01148 | 4,78 % | 0,01790 |
| 2001 | 5,88 % | 0,00974 | 5,14 % | 0,01073 |
| 2002 | 6,27 % | 0,00652 | 5,17 % | 0,00881 |
| 2003 | 8,43 % | 0,00462 | 5,46 % | 0,00509 |
| 2004 | 5,53 % | 0,00532 | 5,02 % | 0,00451 |
| 2005 | 7,55 % | 0,00370 | 5,87 % | 0,00306 |
| 2006 | 5,95 % | 0,00248 | 5,75 % | 0,00434 |
| 2007 | 5,48 % | 0,00486 | 4,41 % | 0,00820 |
| 2008 | 6,16 % | 0,00356 | 5,49 % | 0,00598 |
| 2009 | 7,04 % | 0,00490 | 7,03 % | 0,00512 |
| 2010 | 9,27 % | 0,00907 | 7,01 % | 0,00845 |
| Promedio | 6,98 % | 0,01279 | 6,10 % | 0,01402 |
| Elaboración propia. | | | | |

Sí cabe destacar en cualquier caso una clara concentración de residuos positivos para la generaciones nacidas entorno a 1970 cuando tienen edades comprendidas entre los 20 y 40 años, marcados en la imagen 3.6 por una línea negra gruesa. Esta acumulación apunta a un exceso de mortalidad en esa franja, que el modelo no es capaz de captar.

Todo parece apuntar a que ese exceso se explica por la alta incidencia del SIDA en los años 90 entre personas con edades de 20 a 40 años, como muestra el siguiente gráfico:

⁷Media del error porcentual absoluto. Del inglés *Mean absolute percentage error (MAPE)*

⁸Media de los errores al cuadrado. Del inglés *Mean squared error (MSE)*

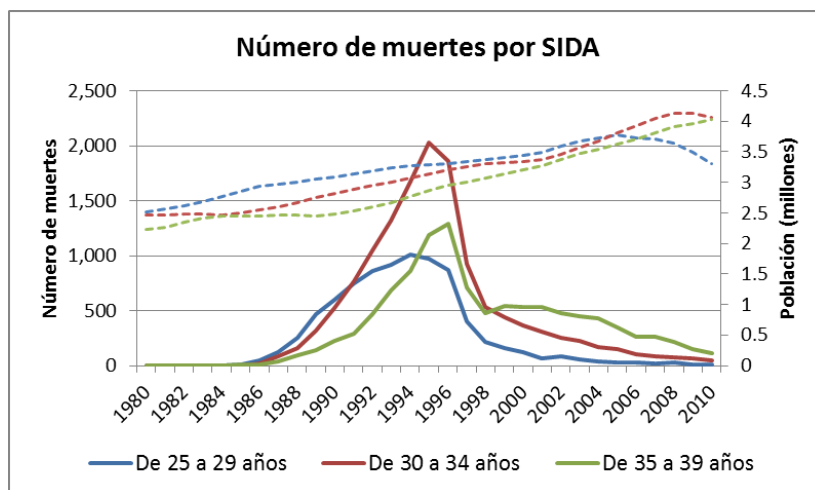


Figura 3.7. Evolución del número de muertes por SIDA. Fuente: INE; Elaboración propia.

Es evidente que el número de muertes entre jóvenes por el virus VIH se disparó a finales de los años 80, sin venir acompañado de un aumento proporcional de la población en las mismas franjas de edad (líneas punteadas), de manera que las tasas de mortalidad para estas generaciones son excepcionalmente elevadas. Al considerarse un fenómeno puntual, no resulta un inconveniente que el modelo no capte dicho exceso de mortalidad.

Adicionalmente, se aprecia en general una mayor concentración en la parte inferior de los gráficos vistos en 3.6, correspondiente a las edades inferiores a los 40 años, de hecho separando ambos periodos, las cifras son dispares:

Tabla 3.3. Diferencias en los residuos por edades (Lee-Carter)

| | Mujeres | | Hombres | |
|--------------------------------|-----------|----------|-----------|----------|
| | ≤ 40 años | >40 años | ≤ 40 años | >40 años |
| MAPE promedio | 12,16 % | 3,44 % | 10,65 % | 3 % |
| ↔ Variación respecto tabla 3.2 | 74,16 % | -50,67 % | 74,51 % | -50,91 % |
| MSE promedio | 0,00006 | 0,01659 | 0,00006 | 0,01659 |
| ↔ Variación respecto tabla 3.2 | -99,50 % | 29,74 % | -99,54 % | 18,35 % |
| Elaboración propia. | | | | |

Se aprecia un comportamiento distinto entre los valores de MAPE y MSE, en tanto que el primero es claramente mayor para edades por debajo de los 40 años y a cambio el segundo es prácticamente nulo. En primera instancia resulta difícil concluir un patrón en los residuos, sin embargo es importante tener en cuenta que las magnitudes de las tasas son muy diferentes entre ambos segmentos. Es decir, las tasas de mortalidad para personas con edades $x \leq 40$ son notablemente menores que para las personas con edades superiores a los 40 años, con lo cual los valores de

MSE serán proporcionalmente pequeños. Teniendo en cuenta esta circunstancia, se considera más adecuado en este caso tomar como referencia los valores de MAPE que indican errores relativos y muestran un comportamiento en línea con el visto en la imagen 3.6.

A modo de ejemplo, se comparan en el siguiente gráfico las tasas de mortalidad observadas y estimadas para las edades $x = 30$ y $x = 65$.

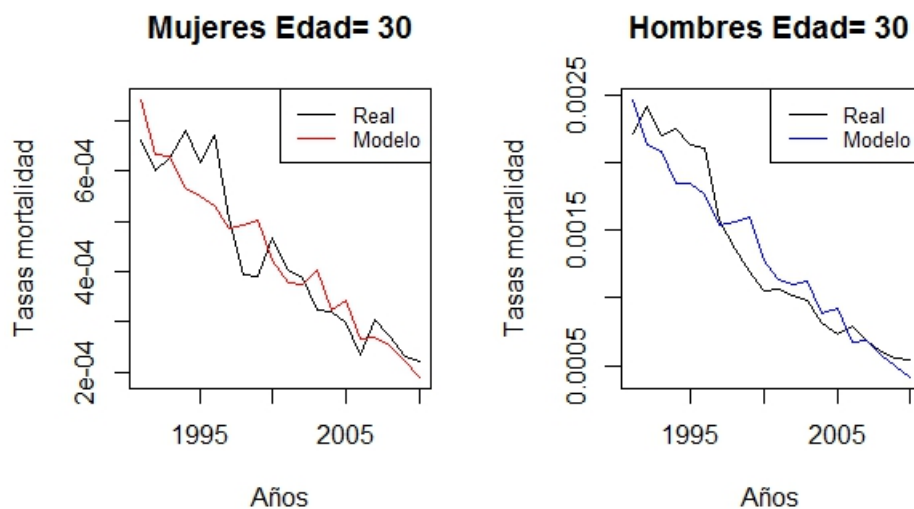


Figura 3.8. Ajuste modelo Lee-Carter ($x = 30$). Elaboración propia.

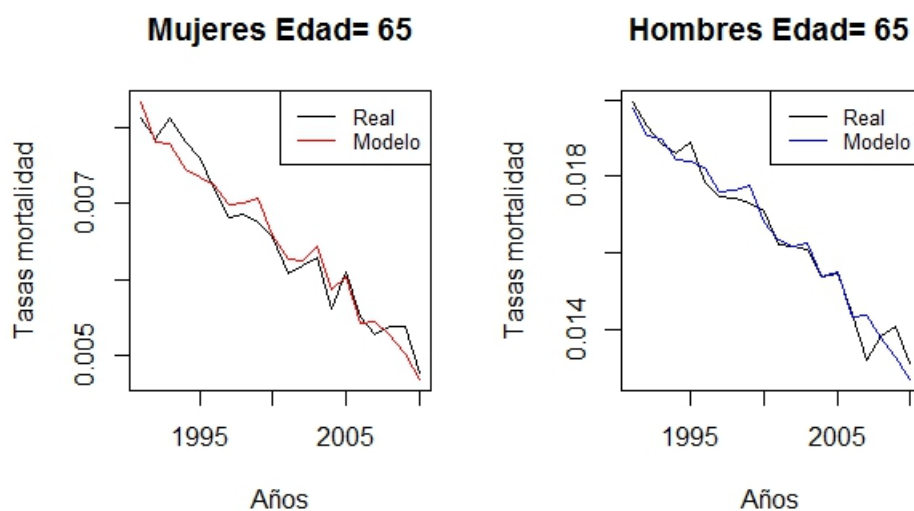


Figura 3.9. Ajuste modelo Lee-Carter ($x = 65$). Elaboración propia.

Estos gráficos sustentarían que el ajuste del modelo es mejor para edades avanzadas, para las cuales la distancia entre las líneas y la diferencia de trayectorias es claramente menor. Esto podría indicar que el modelo no capta correctamente el

repunte de la mortalidad que se produce entre los 20 y 40 años a causa de la mayor incidencia de muertes accidentales.

Por otro lado, en la imagen 3.6 se aprecia que en el caso de las mujeres predominan colores rosados (residuos positivos) mientras que en el caso de los hombres los residuos son ligeramente negativos (azul). Esto quiere decir que, en términos generales, el modelo ajustado para las tasas de mortalidad está subestimando las tasas de mortalidad de mujeres ($m_{(x,t)}^{INE} > m_{(x,t)}^{modelo}$) y sobreestimando las de hombres ($m_{(x,t)}^{INE} < m_{(x,t)}^{modelo}$).

Proyección

La proyección del modelo de Lee-Carter consiste en la proyección del parámetro k_t a futuro y la utilización de ésta, manteniendo los parámetros α_x y β_x de la estimación, para obtener las tasas de mortalidad.

El valor estimado en las derivas de los modelos son:

$$\hat{d}_{mujeres} = \frac{-34,6972 - 28,3712}{19} = -3,3194$$

$$\hat{d}_{hombres} = \frac{-38,4427 - 28,1856}{19} = -3,5068,$$

por lo que se deduce que la pendiente de k_t es más pronunciada en el caso de los hombres, indicando una mayor sensibilidad de sus tasas de mortalidad al paso del tiempo. Gráficamente, incluyendo un nivel de confianza del 95 %:

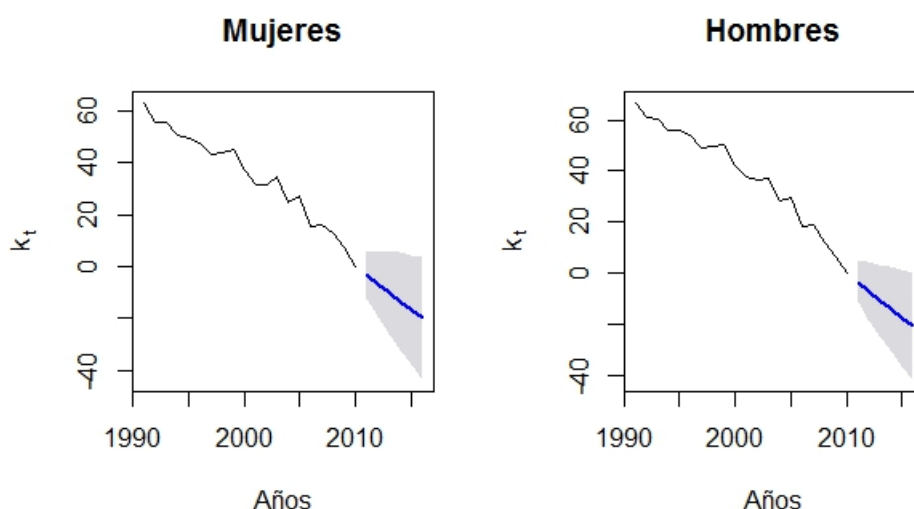


Figura 3.10. Proyección k_t Lee-Carter (hombres y mujeres). Elaboración propia.

Si bien la diferencia entre las pendientes de ambos gráficos es imperceptible a la

vista, es intuitivamente lógico pensar que las cifras de mortalidad de los hombres disminuyen a mayor ritmo, puesto que sus tasas de mortalidad son históricamente más elevadas y por lo tanto hay mayor “margen de mejora”.

A partir de estos resultados, se pueden construir unas tasas de mortalidad proyectadas, las cuales contrastaremos con las tasas reales/observadas entre los años 2011 y 2016 para las edades 65, 70, 75 y 80.

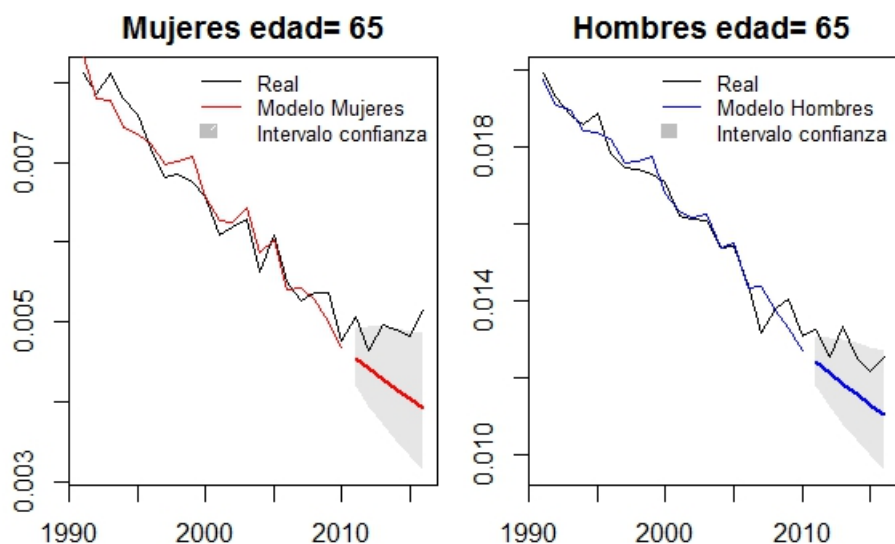


Figura 3.11. Proyección $m_{(65,t)}$ Lee-Carter (hombres y mujeres). Elaboración propia.

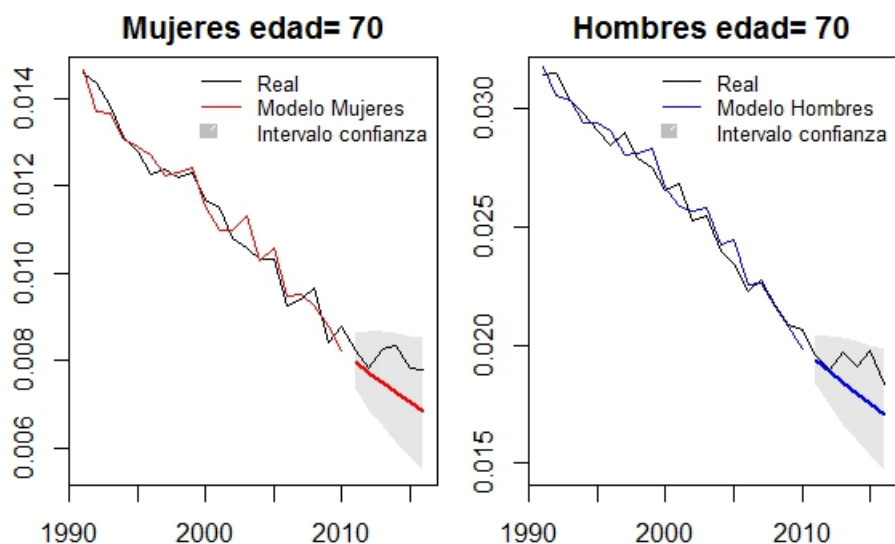


Figura 3.12. Proyección $m_{(70,t)}$ Lee-Carter (hombres y mujeres). Elaboración propia.

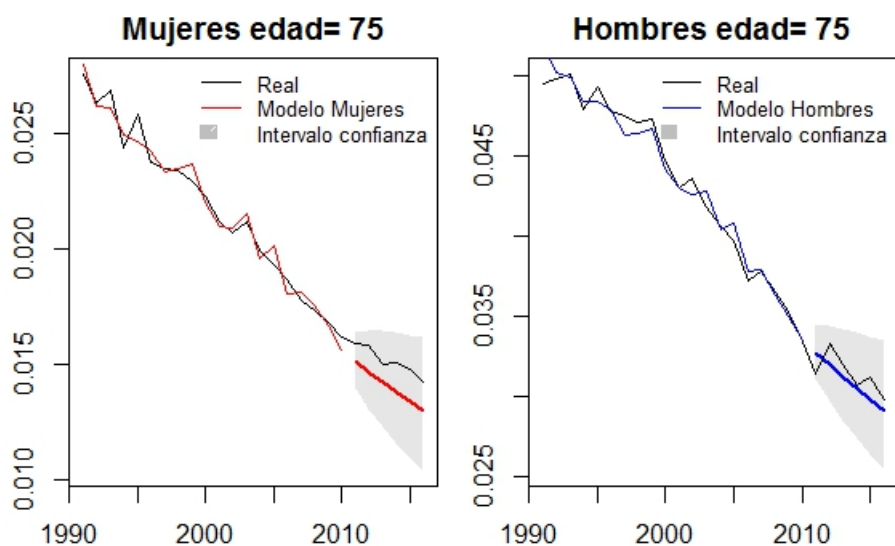


Figura 3.13. Proyección $m_{(75,t)}$ Lee-Carter (hombres y mujeres). Elaboración propia.

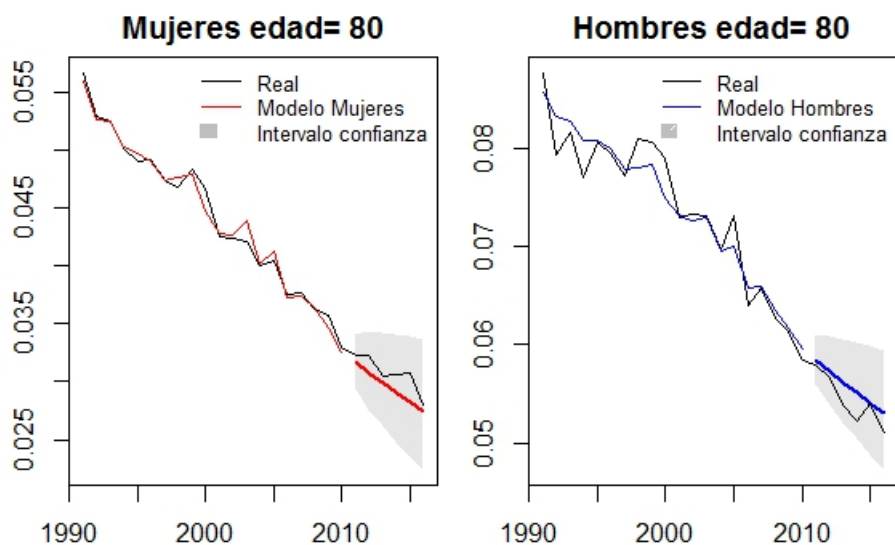


Figura 3.14. Proyección $m_{(80,t)}$ Lee-Carter (hombres y mujeres). Elaboración propia.

Se observa que las tasas proyectadas (línea gruesa) para la edad $x = 65$ son claramente más optimistas que las tasas reales/observadas tanto en hombres como en mujeres, llegando incluso a exceder el intervalo de confianza. Sin embargo, a medida que avanza la edad, estas diferencias se reducen hasta tal punto que en el caso de los hombres se invierte la relación para la edad $x = 80$, donde las tasas proyectadas son mayores a las tasas reales.

Este fenómeno podría deberse a que la proyección es excesivamente optimista en lo que respecta a lo longevidad y por lo tanto subestimaría las tasas de mortalidad

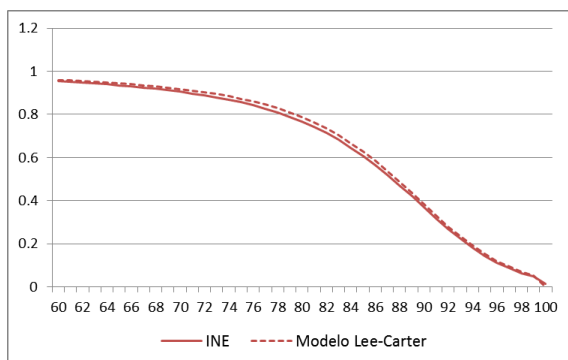
en términos generales, pero concentraría las muertes en las edades más avanzadas, es decir, presentaría una curva de supervivencia más “rectangular” que la observada.

La comprobación es fácil, puesto que basta con aplicar la metodología del INE a las tasas estimadas ($\hat{m}_{(x,t)}$) utilizando la fórmula (1) para obtener la probabilidad de fallecimiento $\hat{q}_{(x,t)}$. A partir de estos valores, se puede calcular fácilmente la probabilidad acumulada de supervivencia para cada edad como sigue:

$$\text{Probabilidad de llegar con vida a la edad } x = P_x = \prod_{i=0}^x p_{(i,t)} = \prod_{i=0}^x (1 - q_{(i,t)}) .$$

A modo de ejemplo, se muestran las curvas de supervivencia resultantes de las tasas de mortalidad (observadas y proyectadas) correspondientes al último año de proyección ($t = 2016$).

(a) Mujeres



(b) Hombres

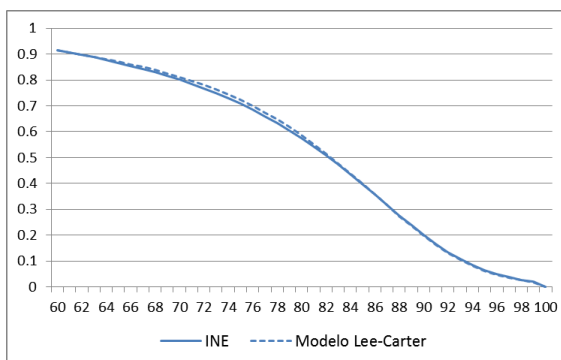


Figura 3.15. Curvas de supervivencia 2016 (Lee-Carter) Fuente: INE; Elaboración propia.

A pesar de la proximidad de las curvas, se puede observar que la curva de supervivencia correspondiente a la estimación (punteada) queda ligeramente por encima para prácticamente todas las edades contempladas, si bien las curvas tienden a converger para edades muy avanzadas. Esta comparativa sostendría la hipótesis de que el modelo sobreestima la supervivencia, o lo que es lo mismo, subestima la mortalidad.

Por último, se contrastan para el mismo año 2016 las tasas de mortalidad proyectadas y observadas para todas las edades, obteniendo los siguientes gráficos:

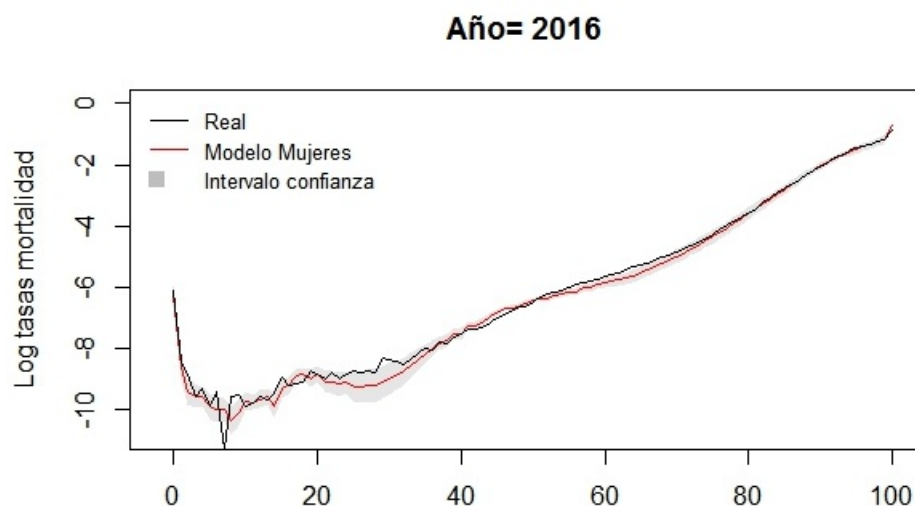


Figura 3.16. Proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ Lee-Carter (mujeres). Elaboración propia.

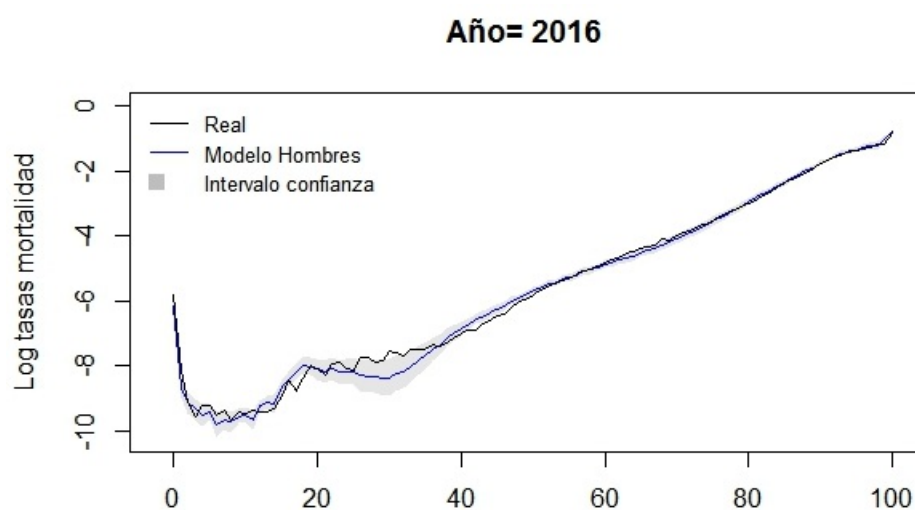
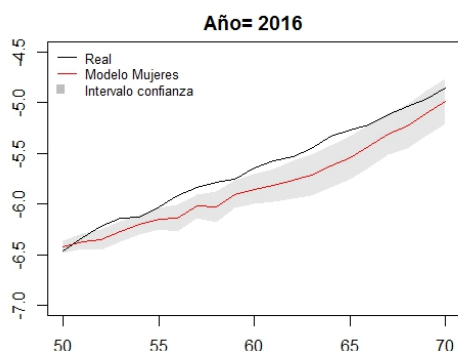


Figura 3.17. Proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ Lee-Carter (hombres). Elaboración propia.

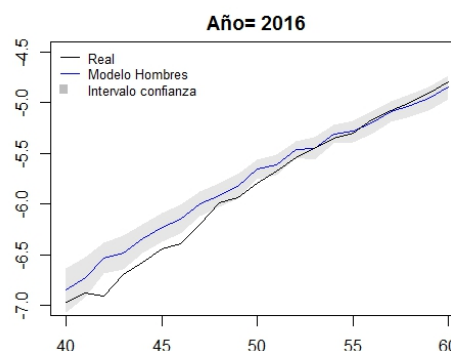
Se aprecia en ambos casos que para edades inferiores a 40, las tasas estimadas distan más de las tasas observadas, como ya apuntaba la imagen 3.8, si bien se encuentran mayoritariamente dentro del intervalo de confianza de la proyección (95%).

Para edades superiores a los 40 años, parece que el ajuste del modelo es algo mejor, ya que las tasas reales son más próximas a las estimadas. Sin embargo también se pueden observar franjas de edad para las que las tasas reales quedan fuera del intervalo de confianza:

(a) Mujeres



(b) Hombres

Figura 3.18. Ampliación de la proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ Lee-Carter. Elaboración propia.

Adicionalmente, la proyección del modelo para el año 2016 no se considera correcta, puesto que viendo las desviaciones tasa a tasa, es decir para cada edad, se comprueba que de las 101 tasas proyectadas, en 32 y 26 ocasiones se superan los intervalos de confianza, para mujeres y hombres respectivamente. Los errores suponen un porcentaje superior al 5 % implícito en el intervalo de confianza y en consecuencia las proyecciones se consideran incorrectas.

Por último, se calculan los valores MAPE y MSE para todo el periodo de proyección y se contrastan con los vistos en la tabla 3.2, con el fin de determinar si el grado de ajuste es similar en la proyección y en la estimación.

Tabla 3.4. MAPE y MSE en el periodo proyectado (Lee-Carter)

| Año | Mujeres | | Hombres | |
|---------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | MAPE | MSE | MAPE | MSE |
| 2011 | 9,65 % | 0,01178 | 9,94 % | 0,00976 |
| 2012 | 12,80 % | 0,01248 | 9,56 % | 0,01245 |
| 2013 | 12,34 % | 0,01647 | 12,18 % | 0,01770 |
| 2014 | 13,87 % | 0,01853 | 15,08 % | 0,02115 |
| 2015 | 15,70 % | 0,01074 | 13,27 % | 0,01161 |
| 2016 | 17,81 % | 0,00750 | 14,93 % | 0,00735 |
| Promedio | 13,70 % | 0,01292 | 12,49 % | 0,01334 |
| ↔ Variación respecto estimación | 96,18 % | 1,00 % | 104,76 % | -4,89 % |

Elaboración propia.

En líneas generales, se aprecia un aumento progresivo de los valores de MAPE, lo cual se considera natural puesto que una proyección a más largo plazo es susceptible de presentar mayores errores. A pesar de ello, el hecho de que los errores porcentuales (MAPE) de la proyección doblen en promedio a los observados en el periodo de estimación, apuntan a un desvío excesivo en la proyección.

En conjunto, si bien el modelo ofrece un ajuste razonable, no se puede considerar que la proyección sea viable, por lo cual se aplicará una versión extendida del modelo que recoja más variabilidad con el objetivo de lograr un mejor ajuste tanto en la estimación como en la proyección.

3.1.2. Modelo Lee-Carter extendido

En este sentido, se presenta a continuación la generalización de (2) propuesta por Debón et al. (2007), agregando nuevos términos que permitan capturar mejor la interacción entre la edad y el tiempo. Adicionalmente se utiliza la función *logit* para evitar obtener estimaciones superiores a 1, obteniendo finalmente la siguiente expresión:

$$\ln\left(\frac{m_{(x,t)}}{1-m_{(x,t)}}\right) = \alpha_x + \sum_{i=1}^r \beta_x^i k_t^i + \epsilon_{x,t} \quad (7)$$

De manera análoga al modelo Lee-Carter, se aplicarán las siguientes restricciones para que el modelo tenga una única solución:

$$\sum_x \beta_x^i = 1 \forall i = 1, \dots, r$$

$$\sum_t k_t^i = 0 \forall i = 1, \dots, r$$

En este punto, es necesario fijar un número de términos r a incluir en el modelo. Teniendo en cuenta que la obtención de los parámetros β_x^i y k_t^i se realizará también mediante el método de descomposición en valores singulares, tomaremos como referencia el porcentaje de variabilidad acumulada recogido por las componentes principales, que distan ligeramente de los reflejados en la tabla 3.1 por el efecto de *logit*.

Tabla 3.5. Variabilidad acumulada recogida en las componentes principales

| | Componentes principales | | | | | | | | | | | |
|----------------|-------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----|-----------------|
| | 1 ^a | 2 ^a | 3 ^a | 4 ^a | 5 ^a | 6 ^a | 7 ^a | 8 ^a | 9 ^a | 10 ^a | ... | 20 ^a |
| Mujeres | 71,4 % | 81,7 % | 85,6 % | 88,1 % | 90,3 % | 92,0 % | 93,4 % | 94,6 % | 95,5 % | 96,3 % | ... | 100,0 % |
| Hombres | 80,4 % | 87,6 % | 91,2 % | 92,9 % | 94,1 % | 95,1 % | 96,0 % | 96,8 % | 97,4 % | 98,0 % | ... | 100,0 % |
| Total | 82,6 % | 90,9 % | 93,8 % | 95,0 % | 96,1 % | 96,8 % | 97,5 % | 97,9 % | 98,4 % | 98,7 % | ... | 100,0 % |

Elaboración propia.

Se puede ver que el mayor salto cualitativo se produce al introducir la segunda componente principal, ya que supone un aumento cercano al 10 % tanto en hombres como en mujeres. Si bien es cierto que para ninguno de los sexos se llega a alcanzar el umbral del 90 % de la variabilidad, se considera que la inclusión de la segunda componente principal es suficientemente notable, evitando el aumento hasta la 5^a componente principal con el consecuente impacto en la parsimonia del modelo.

Aplicación

Como ya se ha mencionado en relación a la tabla 3.5, de no haber introducido *logit* en (7), los resultados de los parámetros obtenidos bajo el modelo Lee-Carter se corresponderían con el primer término del nuevo modelo ($r = 1$).

Sin embargo, dado este cambio, es necesario recalcular todos los parámetros.

Estos cálculos se han realizado igualmente con el programa *R*, si bien en esta ocasión no existen funciones predefinidas para la aplicación del modelo (estimación y proyección), por lo que el cálculo se ha realizado paso a paso de manera manual⁹, sin aplicar ajustes sobre los k_t .

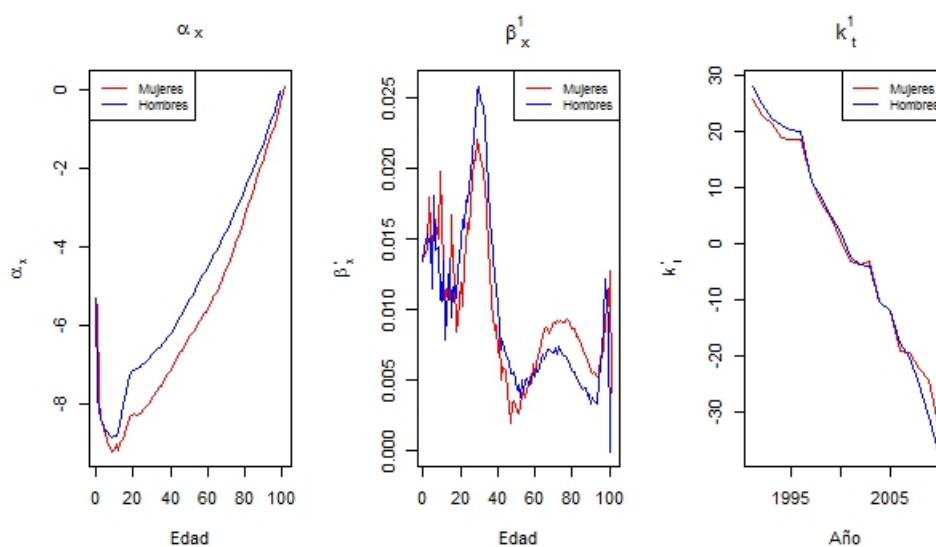


Figura 3.19. Parámetros α_x , β_x^1 y k_t^1 (modelo extendido). Elaboración propia.

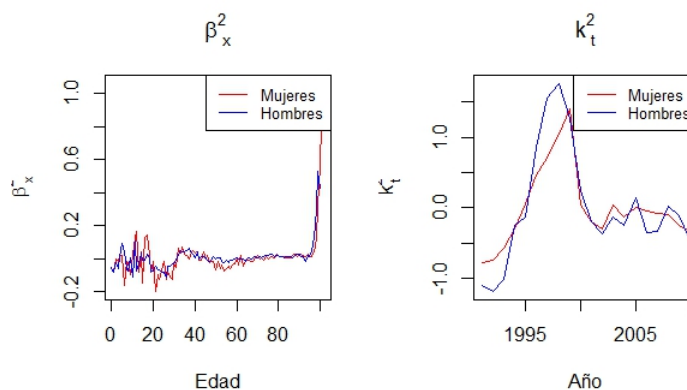
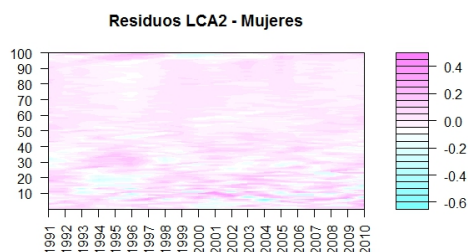


Figura 3.20. Parámetros β_x^2 y k_t^2 (modelo extendido).
Elaboración propia.

⁹El detalle de los cálculos se pueden encontrar en en el Anexo C.

Aplicando los valores obtenidos a la ecuación del modelo (7) con $r = 2$, los residuos resultantes, entendidos como $\text{logit} \left(m_{(x,t)}^{INE} \right) - \text{logit} \left(m_{(x,t)}^{\text{modelo}} \right)$, son:

(a) Mujeres



(b) Hombres

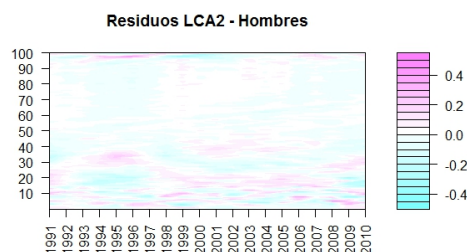


Figura 3.21. Residuos modelo Lee-Carter extendido. Elaboración propia.

No resulta evidente a la vista si los residuos son inferiores a los vistos en la imagen 3.6, sin embargo sí se intuye una mayor difusión de los errores, es decir, la concentración de los residuos en edades bajas, si bien sigue produciéndose, es menos intensa que en el modelo anterior.

Para contrastar estas apreciaciones, se muestran a continuación los datos equivalentes a los mostrados en las tablas 3.2 y 3.3:

Tabla 3.6. MAPE y MSE de los residuos (modelo extendido)

| Año | Mujeres | | Hombres | |
|------|---------|---------|---------|---------|
| | MAPE | MSE | MAPE | MSE |
| 1991 | 5,96 % | 0,00615 | 6,24 % | 0,00546 |
| 1992 | 4,66 % | 0,00289 | 3,76 % | 0,00739 |
| 1993 | 4,93 % | 0,00504 | 3,88 % | 0,00835 |
| 1994 | 5,88 % | 0,00385 | 5,76 % | 0,00937 |
| 1995 | 6,13 % | 0,00809 | 5,97 % | 0,01195 |
| 1996 | 8,12 % | 0,00899 | 6,75 % | 0,01825 |
| 1997 | 5,85 % | 0,00970 | 4,10 % | 0,00810 |
| 1998 | 5,39 % | 0,00310 | 4,53 % | 0,00763 |
| 1999 | 5,79 % | 0,00905 | 6,30 % | 0,01426 |
| 2000 | 6,93 % | 0,00982 | 4,60 % | 0,01679 |
| 2001 | 5,91 % | 0,00756 | 5,11 % | 0,00977 |
| 2002 | 6,00 % | 0,00393 | 4,94 % | 0,00420 |
| 2003 | 7,32 % | 0,00511 | 4,91 % | 0,00514 |
| 2004 | 5,56 % | 0,00351 | 5,08 % | 0,00271 |
| 2005 | 6,41 % | 0,00509 | 5,21 % | 0,00414 |
| 2006 | 5,94 % | 0,00233 | 5,53 % | 0,00564 |

| | | | | |
|---------------------------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| 2007 | 5,46 % | 0,00474 | 4,24 % | 0,00750 |
| 2008 | 6,13 % | 0,00232 | 5,59 % | 0,00613 |
| 2009 | 6,62 % | 0,00250 | 6,93 % | 0,00422 |
| 2010 | 8,93 % | 0,00365 | 6,53 % | 0,00531 |
| Promedio | 6,17 % | 0,00537 | 5,30 % | 0,00812 |
| ↔ Variación respecto Lee-Carter | -11,63 % | -58,00 % | -13,19 % | -42,12 % |
| Elaboración propia. | | | | |

En promedio los errores, tanto MAPE como MSE, descienden notablemente respecto al modelo anterior, lo cual indica una mejora sustancial en el ajuste respecto al modelo Lee-Carter.

En cuanto la mejora en la difusión de los errores, se tiene:

Tabla 3.7. Diferencias en los residuos por edades (modelo extendido)

| | Mujeres | | Hombres | |
|---------------------------------|-----------|----------|-----------|----------|
| | ≤ 40 años | >40 años | ≤ 40 años | >40 años |
| MAPE promedio | 10,64 % | 3,12 % | 8,94 % | 2,81 % |
| ↔ Variación respecto Lee-Carter | -12,53 % | -9,47 % | -16,05 % | -6,23 % |
| MSE promedio | 0,00005 | 0,00697 | 0,00009 | 0,01053 |
| ↔ Variación respecto Lee-Carter | -22,63 % | -58,00 % | 41,29 % | -36,55 % |
| Elaboración propia. | | | | |

Los datos corroboran las observaciones previas, ya que se mantiene pero reduce la diferencia entre los residuos para edades inferiores y superiores a los 40 años y los valores de MAPE y MSE muestran importantes descensos a nivel global.

Por último, para completar la comparativa, se observan las diferencias entre las tasas reales y modeladas para las edades $x = 30$ y $x = 65$.

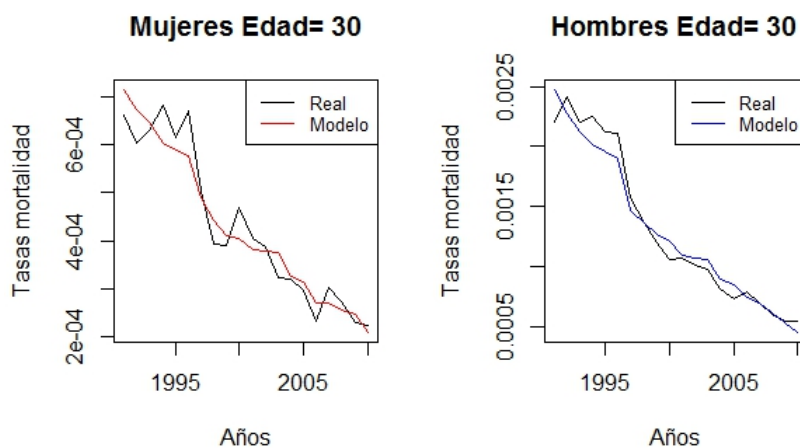


Figura 3.22. Ajuste modelo extendido ($x = 30$). Elaboración propia.

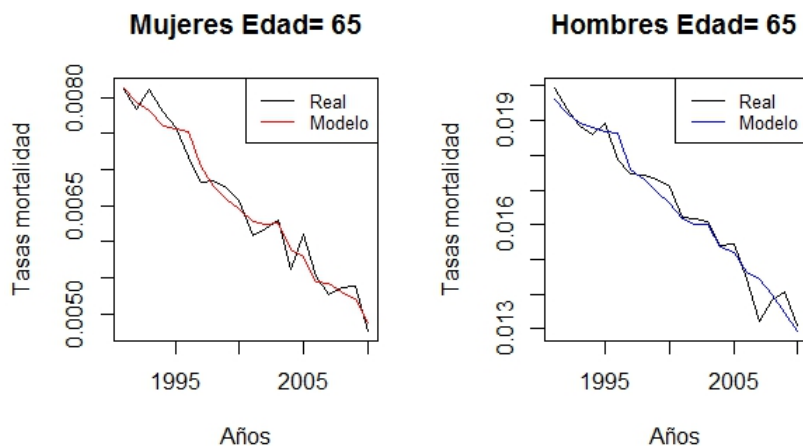


Figura 3.23. Ajuste modelo extendido ($x = 65$). Elaboración propia.

La mejora en el ajuste para personas de edad $x = 30$ respecto a las vistas en la imagen 3.8 es evidente, tanto en hombres como en mujeres. Esta es consecuencia de los resultados expuestos en la tabla 3.7 donde se refleja cómo los residuos descienden tanto para el rango de edades inferior como superior a los 40 años, pero con mayor fuerza para el primero de ellos.

Proyección

Proyectamos los valores k_t^1 y k_t^2 , puesto que son aquellos que recogen el efecto del paso del tiempo e incluimos un intervalo de confianza del 95 %, esperando que la mejoría en el ajuste respecto al modelo anterior también se vea reflejada en la proyección.

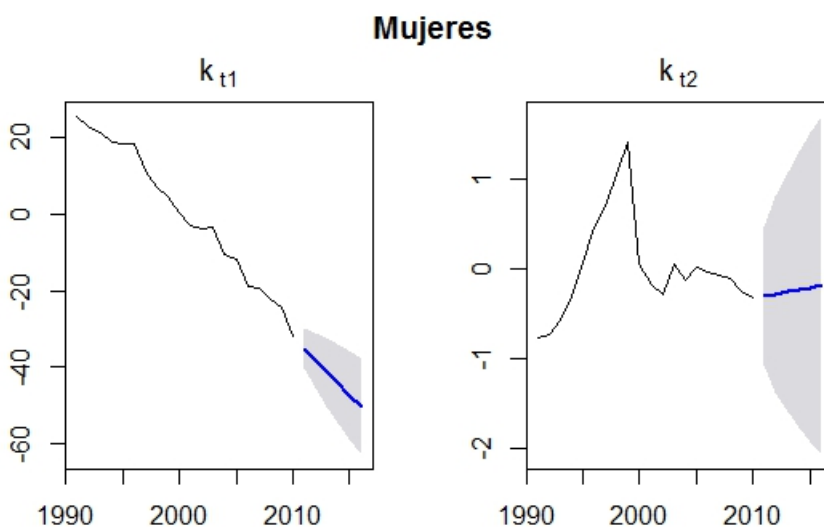


Figura 3.24. Proyección k_t^1 y k_t^2 (mujeres). Elaboración propia.

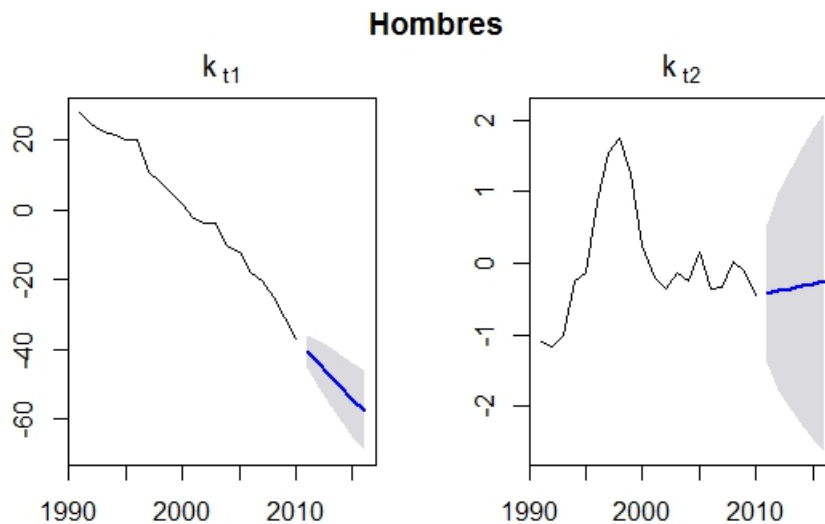


Figura 3.25. Proyección k_t^1 y k_t^2 (hombres). Elaboración propia.

Los valores estimados de las derivas \hat{d}_1 y \hat{d}_2 son los siguientes

$$\hat{d}_1^{Mujeres} = \frac{-32,0994 - 25,7304}{19} = -3,0437$$

$$\hat{d}_2^{Mujeres} = \frac{-0,3303 + 0,7783}{19} = 0,0236$$

$$\hat{d}_1^{Hombres} = \frac{-37,0208 - 28,1548}{19} = -3,4303$$

$$\hat{d}_2^{Hombres} = \frac{-0,4583 + 1,0979}{19} = 0,0337,$$

si bien es importante destacar el amplio intervalo de confianza de k_t^2 en proporción al propio parámetro.

De nuevo resulta que las pendientes de los parámetros que recogen el efecto del tiempo, es más pronunciada en el caso de los hombres, apuntando por lo tanto a una sensibilidad mayor de las tasas de mortalidad al paso del tiempo.

Si, al igual que antes, se fijan ciertas edades y se contrastan las estimaciones y proyecciones con las tasas observadas, se tiene lo siguiente:

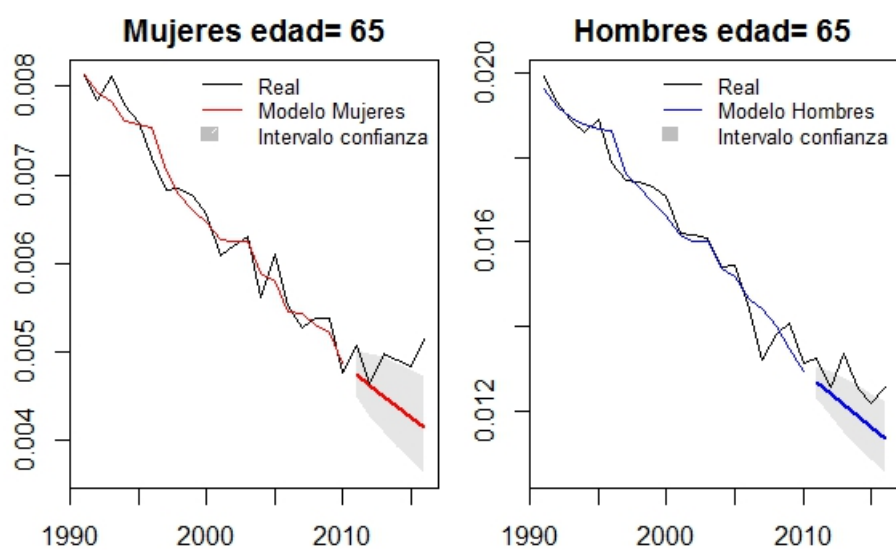


Figura 3.26. Proyección $m_{(65,t)}$ (hombres y mujeres) modelo extendido.
Elaboración propia.

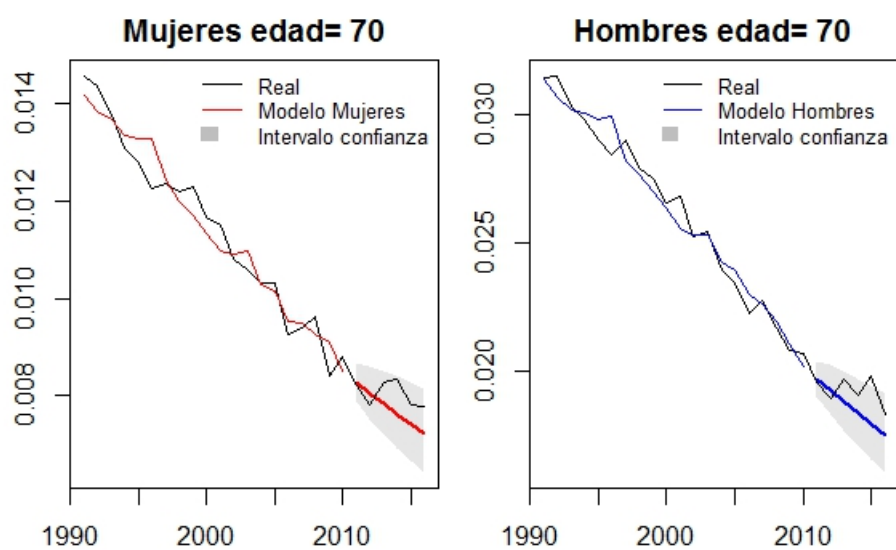


Figura 3.27. Proyección $m_{(70,t)}$ (hombres y mujeres) modelo extendido.
Elaboración propia.

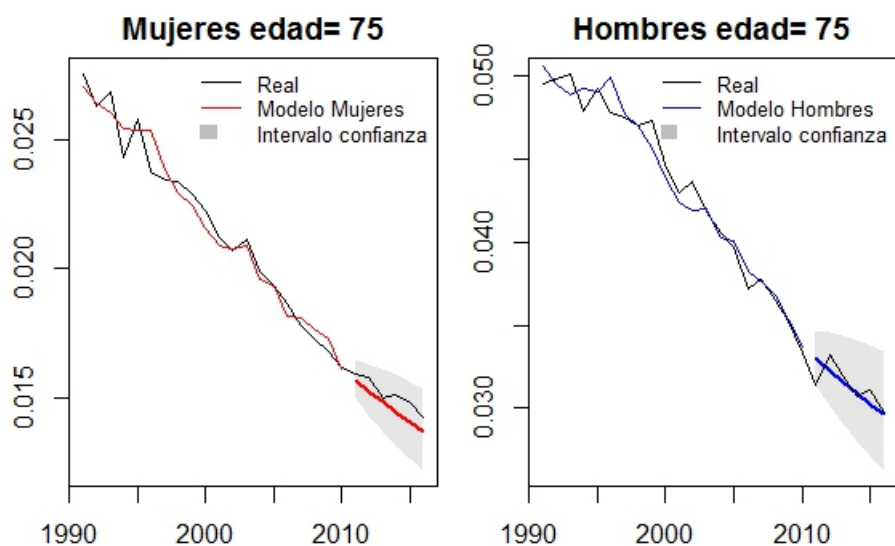


Figura 3.28. Proyección $m_{(75,t)}$ (hombres y mujeres) modelo extendido.
Elaboración propia.

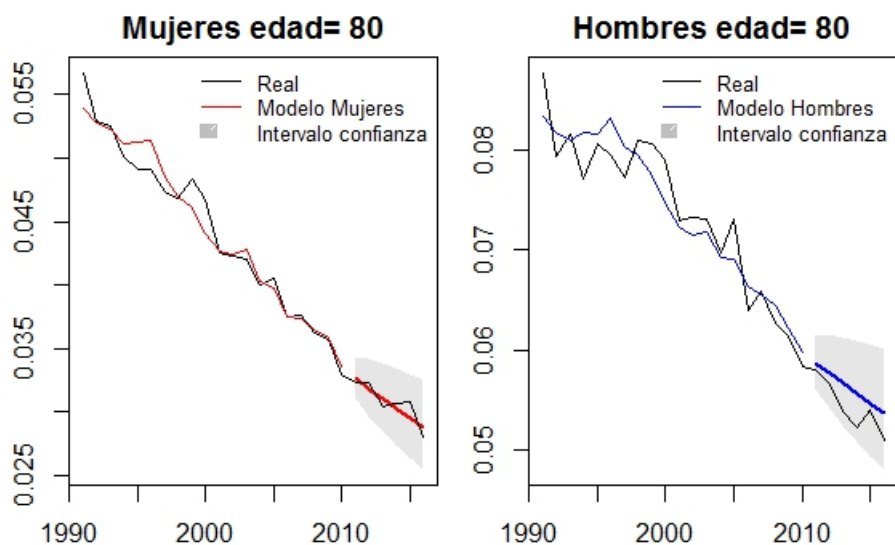


Figura 3.29. Proyección $m_{(80,t)}$ (hombres y mujeres) modelo extendido.
Elaboración propia.

Se aprecia el mejor ajuste de este modelo respecto al anterior, pero las proyecciones se comportan de manera muy similar: para edades entorno a los 65 años la proyección está lejos de los valores observados, quedando incluso fuera del intervalo de confianza, aunque estas diferencias se reducen según aumenta la edad.

Cambiando de perspectiva, si se contrasta la proyección con los datos del INE para el año $t = 2016$ se comprueba que las tasas observadas siguen siendo próximas al intervalo de confianza, pero para determinadas edades queda fuera del mismo.

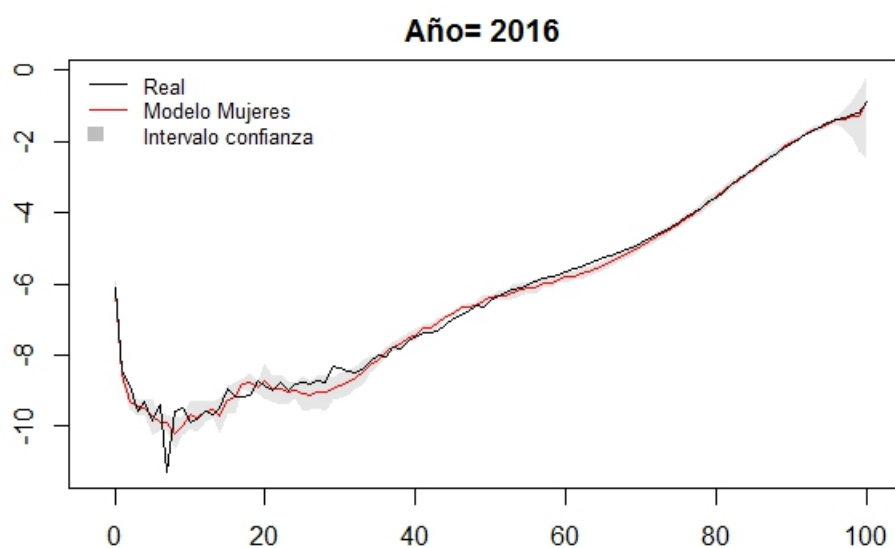


Figura 3.30. Proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ (mujeres) modelo extendido.
Elaboración propia.

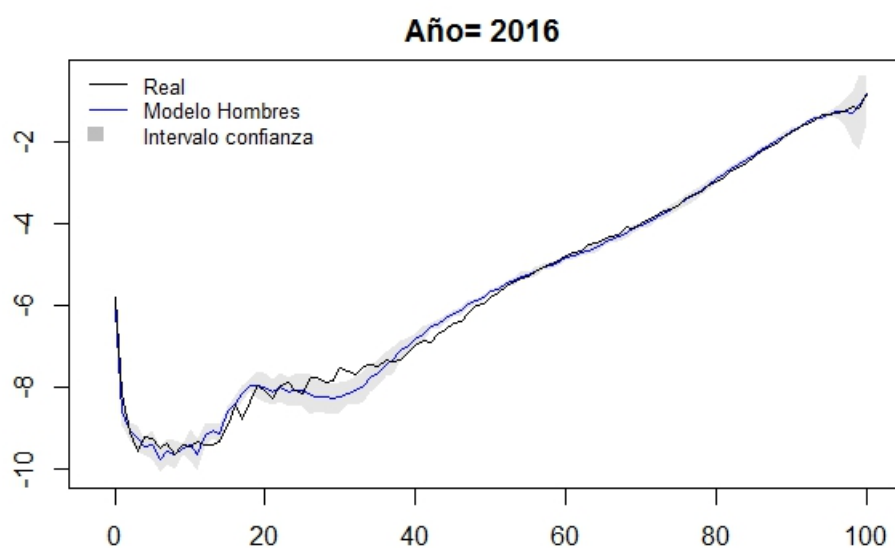
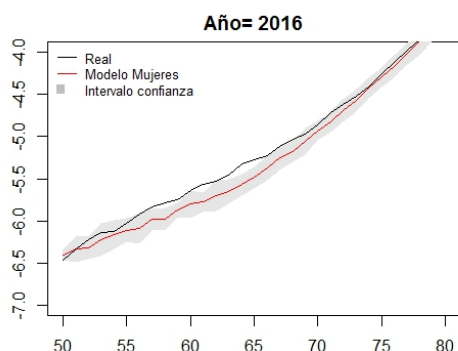


Figura 3.31. Proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ (hombres) modelo extendido.
Elaboración propia.

Para percibir la tendencia de infraestimación de la mortalidad y como ésta va disminuyendo hasta desaparecer para edades avanzadas, es necesario ampliar los gráficos anteriores:

(a) Mujeres



(b) Hombres

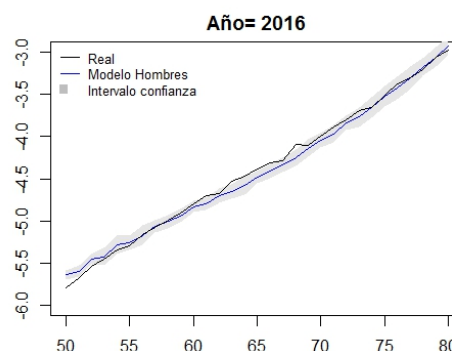


Figura 3.32. Ampliación de la proyección $\ln(m_{(x,2016)})$ modelo extendido. Elaboración propia.

En concreto, viendo las diferencias para cada una de las 101 tasas (edades), se comprueba que se dan 29 y 32 casos, para mujeres y hombres respectivamente, en los que las tasas reales están fuera del intervalo de confianza (IC), lo cual supera con creces el margen de error del 5% e indica que la proyección no es precisa.

No se trata de un error puntual de la proyección para el año 2016 (sexto año proyectado), sino que el desajuste de las tasas proyectadas se produce en todos los años del periodo de proyección, como se puede ver a continuación:

Tabla 3.8. Errores en la proyección (modelo extendido)

| | Mujeres | | Hombres | |
|------|-----------------------|------------|-----------------------|------------|
| | Tasa real \notin IC | Porcentaje | Tasa real \notin IC | Porcentaje |
| 2011 | 38 | 37,62 % | 48 | 47,52 % |
| 2012 | 37 | 36,63 % | 31 | 30,69 % |
| 2013 | 25 | 24,75 % | 35 | 34,65 % |
| 2014 | 28 | 27,72 % | 40 | 39,60 % |
| 2015 | 33 | 32,67 % | 32 | 31,68 % |
| 2016 | 29 | 28,71 % | 32 | 31,68 % |

Elaboración propia.

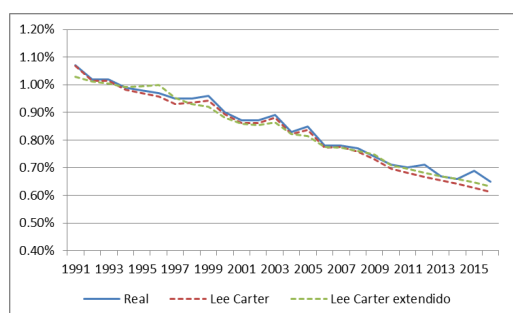
Nuevamente, y pese a la clara mejoría que introduce la versión extendida del modelo Lee-Carter, la proyección que ofrece no puede considerarse válida por razones evidentes.

4. RESULTADOS

Del apartado anterior se deduce que si bien ambos modelos presentan un ajuste aceptable al periodo de observación (1991-2010), especialmente el modelo extendido, la proyección de las tasas de mortalidad no puede considerarse satisfactoria.

Calculando tasas estandarizadas¹⁰ para las estimaciones y proyecciones de ambos modelos, se tiene lo siguiente:

(a) Mujeres



(b) Hombres

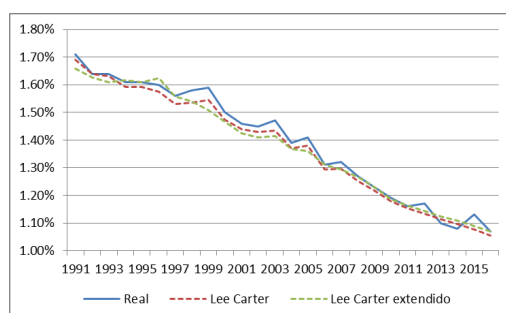


Figura 4.1. Ajuste de las SMR modelizadas. Fuente: INE; Elaboración propia.

Se aprecia mejor ajuste para mujeres que para hombres y, en ambos casos, para los años inmediatamente anteriores a la proyección.

Sin embargo, en términos generales la proyección sobreestima la mejora de las tasas de mortalidad entre 2011 y 2016.

La pregunta que cabe plantearse en este punto es si este desajuste se debe a una inadecuada aplicación del modelo o realmente se ha producido recientemente un cambio de tendencia que no se puede predecir en base a información histórica.

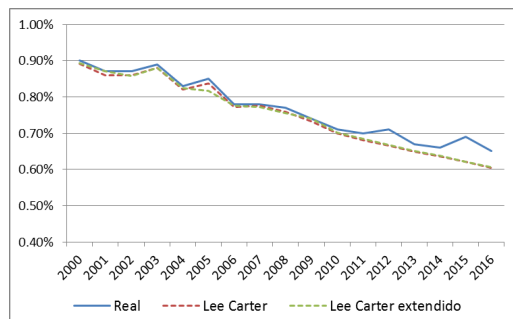
Con el objetivo de descartar posibles errores en la modelización, se ha optado por probar las siguientes variantes:

- **Reducción del periodo de observación**, considerando la posibilidad de que la inclusión de años más alejados en el tiempo esté distorsionando las tendencias más recientes
- **Aumento del número de componentes principales** de (7), ya que la variabilidad recogida por el modelo extendido no alcanza el 90% recomendado y esto podría estar causando desajustes tanto en la estimación como en la proyección

¹⁰En base a la población europea estándar propuesta por Eurostat (2013).

Aplicando estos cambios, sin embargo, no se corrige el error en la proyección o incluso se acentúa, como se puede ver a continuación:

(a) Mujeres



(b) Hombres

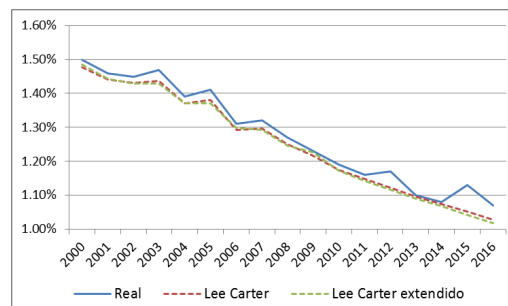
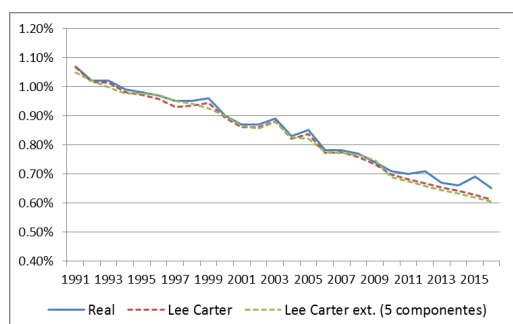


Figura 4.2. Ajuste de las SMR para periodo de observación reducido (2000-2010). Fuente: INE; Elaboración propia.

(a) Mujeres



(b) Hombres

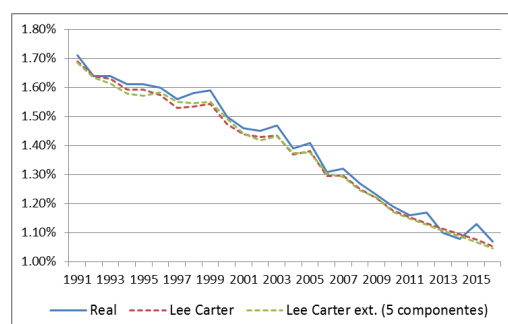


Figura 4.3. Ajuste de las SMR para modelo extendido a 5 componentes principales. Fuente: INE; Elaboración propia.

Se ve que ninguna de estas opciones mejora el ajuste visto en la imagen 4.1 y se concluye que la falta de acierto en la proyección se debe a un reciente cambio de tendencia en la mortalidad, el cual no es posible reflejar mediante una proyección basada en datos históricos.

Llegados a este punto, cabe plantearse dos cuestiones: por un lado los posibles desencadenantes de esta desaceleración de la longevidad y por otro lado, la existencia de análisis o modelos alternativos para su predicción.

Si bien, ambos aspectos son muy complejos de analizar debido a la gran diversidad de factores a tener en cuenta, a continuación se detallan algunos elementos que, sin duda, han influido en la disminución de las mejoras en la mortalidad y que, por tanto, conviene considerar de cara a proyecciones más precisas.

4.1. Desencadenantes de la desaceleración

Evolución de las causas de muerte

En primer lugar, y como ya se adelantaba en secciones anteriores, en las últimas décadas se han producido cambios relevantes en la distribución de defunciones por causas.

Como se muestra en la imagen 3.5, las tasas de mortalidad por enfermedades del sistema circulatorio mostraban una disminución importante entre los años 1999 y 2010 para todas las edades comprendidas entre los 60 y 79 años, concretamente la mejora acumulada en ese periodo para todas las edades está entorno a un 21-22%. De acuerdo a Farmaindustria (2018) dicha reducción se debe a mejoras en “el tratamiento farmacológico de la hipertensión arterial y la hipercolesterolemia, una opción que ha logrado resultados muy positivos,[...], sin producir un aumento de hemorragias, asociada al uso de estatinas”.

Sin embargo, esta mejora, que queda recogida en el modelo al pertenecer al periodo de estimación, se frena en los años posteriores, es decir, en los años de proyección, como se puede observar a continuación:

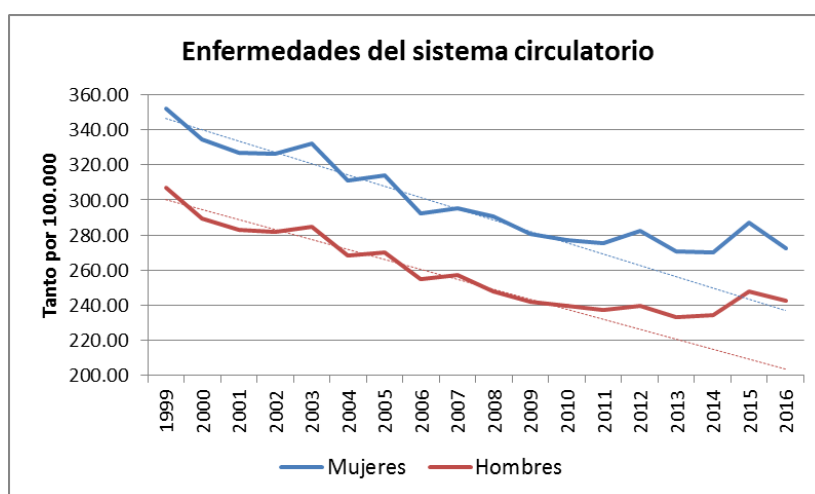


Figura 4.4. Tasas de mortalidad por enfermedades del sistema circulatorio. Fuente: INE; Elaboración propia.

La imagen pone de manifiesto un claro cambio de tendencia entre ambos periodos, puesto que las tasas de mortalidad posteriores a 2010 quedan claramente por encima de la tendencia de los años anteriores (líneas punteadas) y los datos así lo demuestran:

Tabla 4.1. Mejoras relativas de las tasas de mortalidad por enfermedades del sistema circulatorio

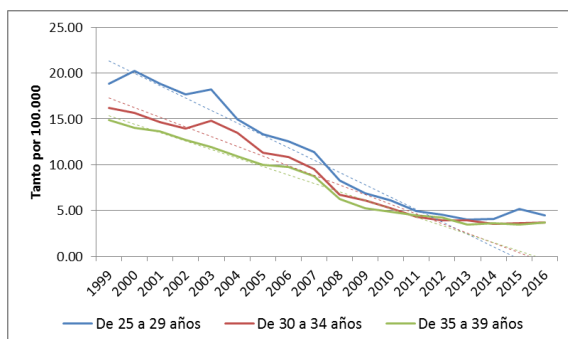
| | Mejora acumulada | | Mejora anual (media) | |
|----------------|------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | 1999-2010 | 2010-2016 | 1999-2010 | 2010-2016 |
| Mujeres | 21,40 % | 1,52 % | 1,95 % | 0,25 % |
| Hombres | 21,89 % | -1,18 % | 1,99 % | -0,20 % |

Fuente: INE; Elaboración propia.

Teniendo en cuenta que las enfermedades del sistema circulatorio han sido históricamente la primera causa de muerte en España, es evidente que la desaceleración de la mejora en sus tasas de mortalidad afecte notoriamente a las tasas de mortalidad globales.

Considerando que este fenómeno tiene un menor impacto entre la población más joven y recordando que, las mejoras en la mortalidad entre personas menores de 40 años se debían a la reducción de muertes accidentales, se analiza también la evolución de las mismas a partir de 2010. Cabe destacar que, dado el descenso de la población en esos años, a diferencia de la imagen 3.2, se opta por representar las tasas de mortalidad:

(a) Accidentes de tráfico



(b) Psicofármacos y drogas

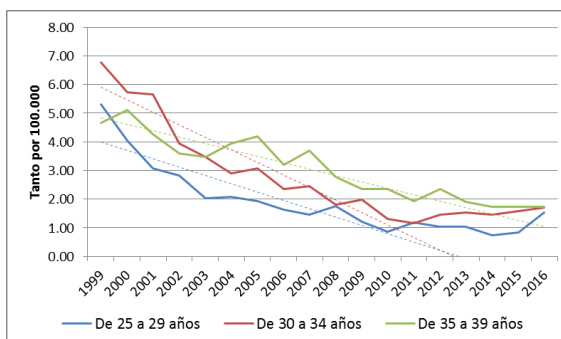


Figura 4.5. Evolución de las principales causas de muerte accidental. Fuente: INE; Elaboración propia.

De manera similar al caso de las enfermedades del sistema circulatorio, se puede ver claramente como a partir de 2010 las tasas de mortalidad para estas causas de muerte apenas disminuyen, frenando así la tendencia de mejora vista en los años anteriores (líneas punteadas).

Adicionalmente, este estancamiento de la mejora en las principales causas de muerte (global y menores de 40 años), no se ve compensado por una gran mejora en las tasas de mortalidad de otras enfermedades mayoritarias, de hecho, observando la evolución de las tasas de mortalidad por cáncer, segunda causa de muerte en España, se aprecia incluso un aumento en las tasas de mortalidad.

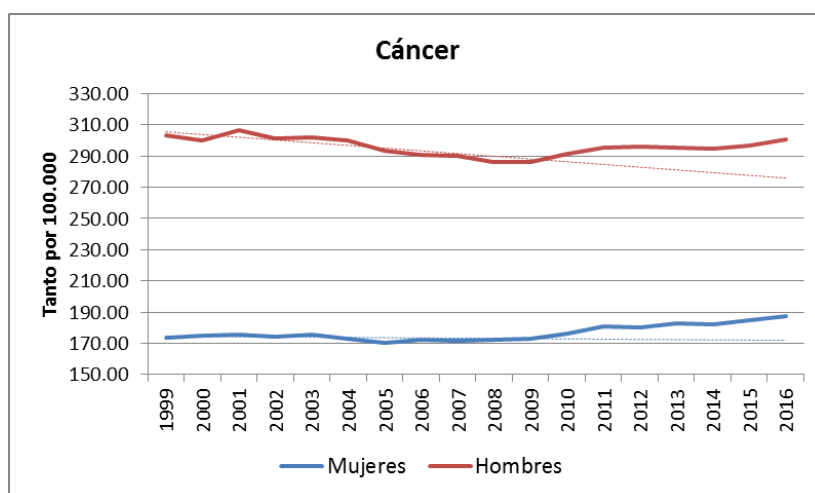


Figura 4.6. Tasas de mortalidad por cáncer. Fuente: INE; Elaboración propia.

En general, entre las 9 principales causas de muerte, que suponen entorno a un 95 % del total de muertes tanto en mujeres como en hombres, ninguna muestra una mejora relativa mayor en los años posteriores a 2010 que en los anteriores.

Por el contrario, cabe destacar el claro aumento de las tasas de mortalidad por enfermedades del sistema nervioso y de los órganos de los sentidos y por trastornos mentales y del comportamiento, lideradas por el Alzheimer y trastornos mentales orgánicos, senil y presenil respectivamente, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4.2. Cambios destacados en las principales causas de muerte

| Causa | Porcentaje de muertes por causa | | | | | |
|--|---------------------------------|------|-----------|---------|------|-----------|
| | Mujeres | | | Hombres | | |
| | 1999 | 2016 | Variación | 1999 | 2016 | Variación |
| Enfermedades del sistema nervioso y de los órganos de los sentidos | 3 % | 8 % | 130 % | 2 % | 5 % | 105 % |
| ↔ Alzheimer | 2 % | 5 % | 170 % | 1 % | 2 % | 141 % |
| Trastornos mentales y del comportamiento | 4 % | 7 % | 60 % | 2 % | 3 % | 69 % |
| ↔ Trastornos mentales orgánicos, senil y presenil | 4 % | 7 % | 60 % | 2 % | 3 % | 80 % |

Fuente: INE; Elaboración propia.

De hecho, las enfermedades del sistema nervioso y de los órganos de los sentidos pasaron de ser la séptima causa de muerte en mujeres en el año 1999 a ser la cuarta en 2016 y, en el caso de los hombres los trastornos mentales pasaron de un noveno a un séptimo puesto en el mismo intervalo de tiempo.

La evolución de este tipo de enfermedades, queda claramente plasmada en los siguientes gráficos:

- (a) Enfermedades del sistema nervioso y de los órganos de los sentidos
- (b) Trastornos mentales y del comportamiento

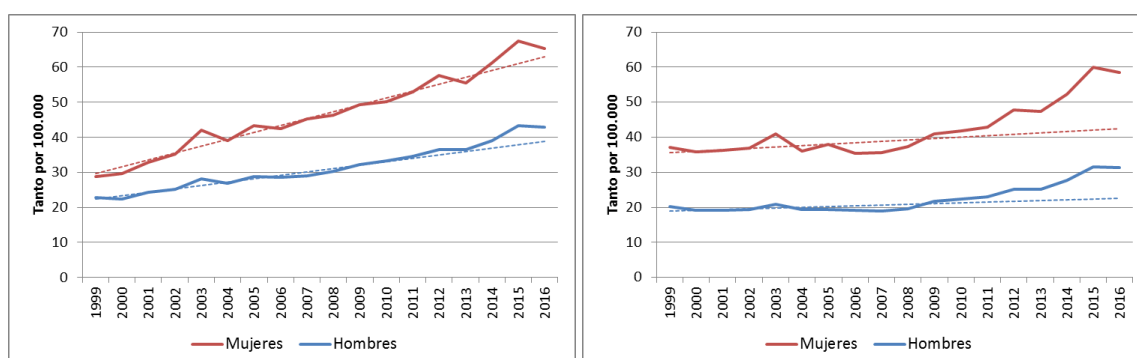


Figura 4.7. Evolución de las tasas de mortalidad (causas al alza). Fuente: INE; Elaboración propia.

De todo lo expuesto anteriormente, se deduce que se ha producido un cierto estancamiento en los avances médicos, entendiéndose que el efecto de los tratamientos para enfermedades cardiovasculares se ha ido estabilizando en los últimos años, mientras que la cura del cáncer, “que en realidad constituye un amplio conjunto de patologías muy diferentes entre sí” Farmaindustria (2018), se consolida como uno de los principales retos a los que se enfrenta la investigación médica.

Evidentemente, en las últimas décadas se han implantado mejoras notables tanto para la detección temprana como en los tratamientos de la enfermedad y el conocimiento de la enfermedad es cada vez mayor, sin embargo se han observado también aumentos en la incidencia del cáncer que contrarrestan los factores positivos.

Por otra parte, el aumento de enfermedades minoritarias visto en la imagen 4.2, induce a una reflexión más profunda acerca de la evolución de causas de muerte, puesto que no parece explicarse únicamente por los avances médicos (como podría ser el caso de las enfermedades cardiovasculares) sino que también se percibe el aumento de la incidencia de enfermedades claramente asociadas a edades avanzadas como el Alzheimer o la demencia senil.

Situación socio-económica

El impacto de la situación socio-económica en la mortalidad es un tema delicado y extremadamente complejo por todos los ámbitos que abarca (poder adquisitivo, nivel de educación, salud,...etc.), sin embargo existen evidencias suficientes que apuntan a una relación directa entre indicadores socio-económicos y tasas de mortalidad, como concluyen diversos estudios tales como Marí-Dell’Olmo et al. (2016), Regidor et al. (2015) y Reques et al. (2015).

A continuación se estudiará una serie de indicadores socio-económicos, con el objetivo de determinar cómo y en qué medida afectan éstos a la inequidad de la

longevidad en España.

En primer lugar, desde una perspectiva económica, un factor que podría explicar en parte la desaceleración de la longevidad en España es el deterioro de la situación económica del país, principalmente debida a la crisis financiera desencadenada en 2008.

Para evitar recurrir a información de otros países, se incluye a continuación un gráfico que muestra la relación entre la mortalidad/esperanza de vida y el producto interior bruto per cápita de las Comunidades Autónomas ¹¹ en 2016:

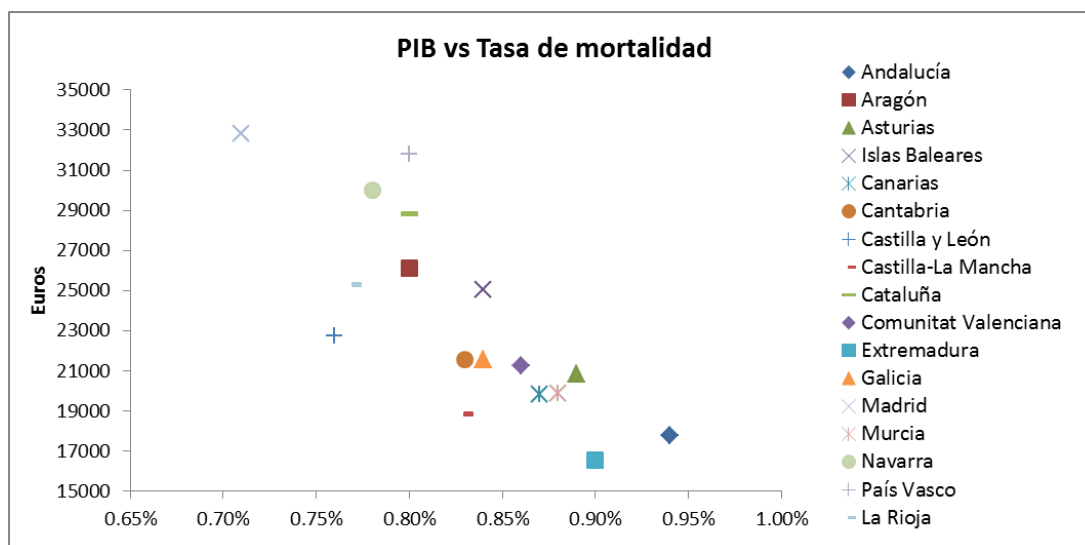


Figura 4.8. Relación entre PIB y tasas de mortalidad por CCAA. Fuente: INE; Elaboración propia.

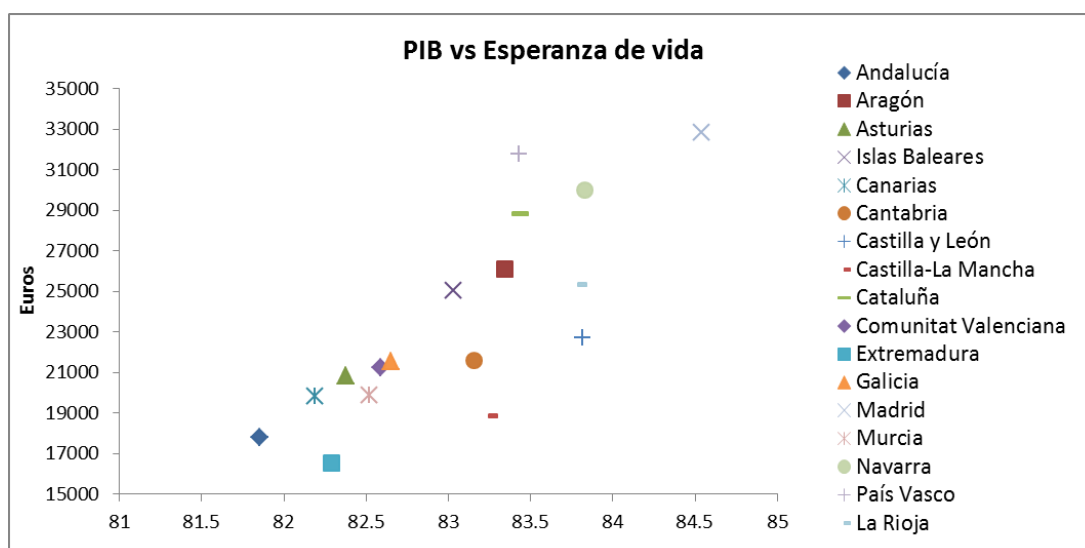


Figura 4.9. Relación entre PIB y esperanza de vida por CCAA. Fuente: INE; Elaboración propia.

¹¹Se excluyen las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla, puesto que al ser el volumen de población claramente inferior, podría alterar los resultados.

Los gráficos 4.8 y 4.9 hablan por sí mismos y demuestran la evidente relación entre el producto interior bruto de una región y su tasa de mortalidad/esperanza de vida: a mayor PIB, menor tasa de mortalidad y por tanto mayor esperanza de vida. En concreto, los coeficientes de correlación alcanzan 80 %, con distinto signo. En este caso, se han mostrado a modo de ejemplo los resultados del año 2016, pero los resultados son idénticos para años anteriores, como se puede corroborar en el Anexo D.

En vista de estos resultados, podría deducirse que una desaceleración del PIB per cápita nacional, como la que se percibe a partir de 2008, podría explicar al menos parcialmente el cambio de tendencia en las tasas de mortalidad a nivel nacional.

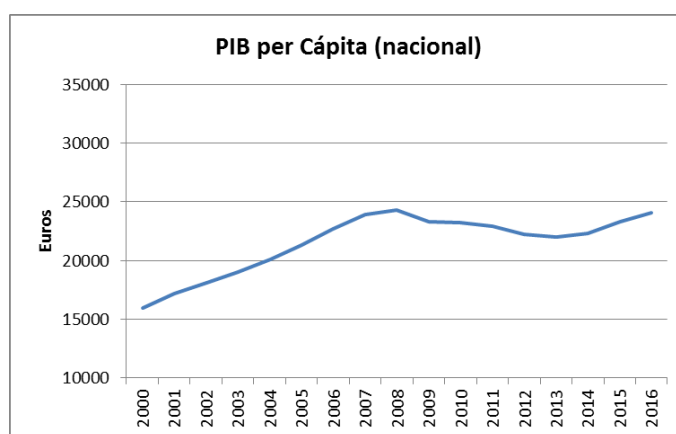


Figura 4.10. Evolución del PIB per cápita a nivel nacional. Fuente: INE; Elaboración propia.

Además, cabe destacar que, si bien el PIB desacelera a nivel nacional, no lo hace de igual manera para todas las regiones, veáse a continuación el contraste entre la Comunidad de Madrid (PIB regional más alto) con el de Andalucía (segundo PIB regional más bajo después de Extremadura):

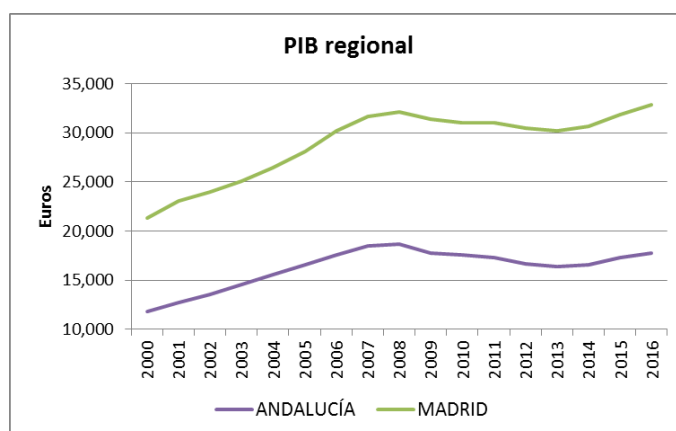


Figura 4.11. Evolución del PIB per cápita a nivel regional. Fuente: INE; Elaboración propia.

La trayectoria parece idéntica, a su vez análoga a la del PIB nacional vista en la imagen 4.10, sin embargo se puede percibir como la distancia entre ambas líneas va aumentando a medida que avanza el tiempo, de hecho el descenso que se produce entre los años 2008 y 2013 es claramente mayor en el caso de Andalucía que en el de Madrid, tanto en términos relativos como absolutos: 12 % (2.246€) y 6 % (1.967€) respectivamente.

No obstante, este fenómeno no obedece únicamente a la recesión que se vivió en el país en esos años, puesto que el distanciamiento entre las curvas de la imagen 4.11 se viene produciendo desde el año 2000. Mientras que el PIB per cápita de Madrid aumentó de media en 1.353€ al año entre 2000 y 2008, en Andalucía el aumento medio fue de 850€ anuales en el mismo periodo. A su vez, como cabía suponer de lo visto en la imagen 4.9, este efecto se traslada a las esperanzas de vida de ambas regiones:

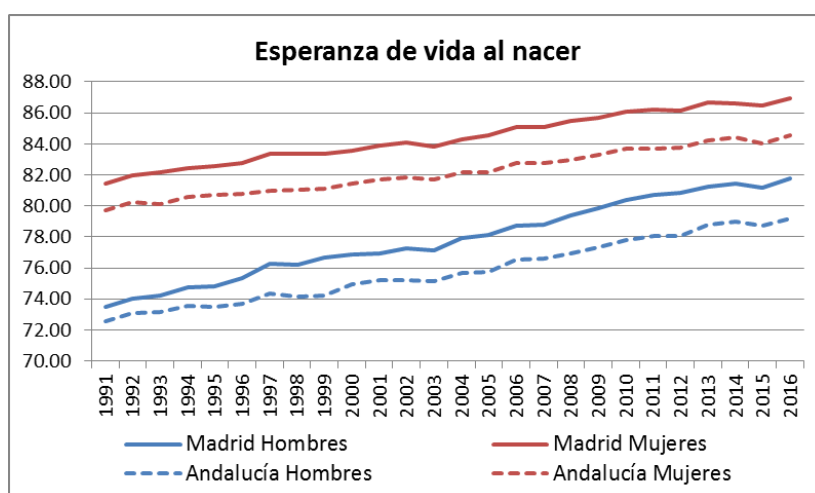


Figura 4.12. Evolución de la esperanza de vida al nacer a nivel regional. Fuente: INE; Elaboración propia.

Por lo tanto esta inequidad en la mortalidad no parece explicarse únicamente por cambios en el ciclo económico, sino que subyacen otros factores de índole estructural, perceptibles a nivel territorial.

En esta línea, se analizarán otros indicadores relevantes en la determinación de la clase socio-económica como son el nivel de estudios, la renta, la tasa de paro o la tipología y las condiciones de trabajo.

En lo que respecta al trabajo, se muestran a continuación dos mapas que representen la distribución territorial del salario medio por hora y el número de afiliados a la Seguridad Social, captando implícitamente tanto los ingresos medios como la tasa de paro y el peso de la economía sumergida.

- (a) Salario medio por hora trabajada (IGN) (b) Trabajadores afiliados a la Seguridad Social (IGN)

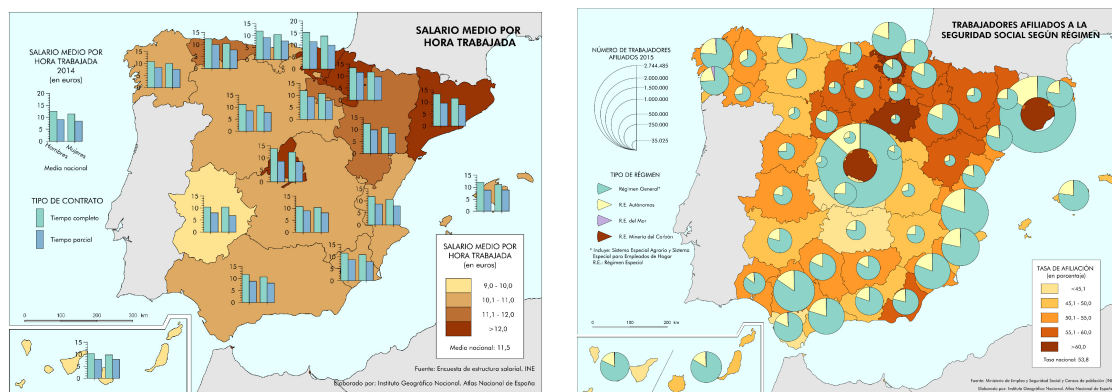


Figura 4.13. Indicadores socio-económicos a nivel regional (IGN Web)

Resulta evidente, a pesar del distinto nivel de desglose (CCAA/provincias), que ambos mapas son coincidentes, mostrando que aquellas regiones con menor salario medio por hora suelen presentar menores tasas de afiliación a la Seguridad Social.

Esta desigualdad laboral entre Comunidades Autónomas, podría a su vez asociarse en cierta medida con la educación, puesto que una persona con mayor nivel de estudios generalmente opta a puestos más estables con salarios más elevados (administración, dirección,...etc.) que personas con un nivel de estudios inferior (construcción, transporte, albañilería,...etc.), como se muestra a continuación:

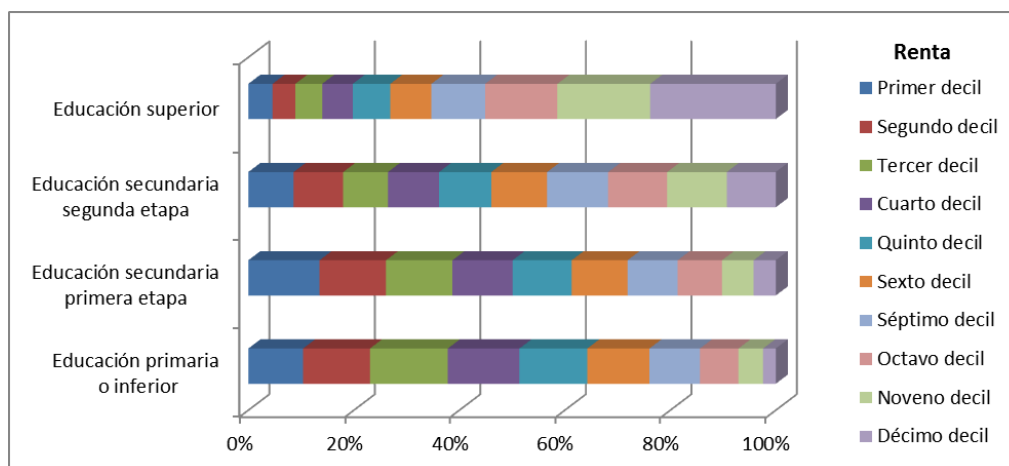


Figura 4.14. Distribución de personas (edades 16+) por decil de renta según nivel de formación (2016). Fuente: MECD; Elaboración propia.

Retomando la perspectiva regional, es difícil concluir si es el nivel de formación del entorno el que condiciona las expectativas laborales o por el contrario el nivel de ingresos el que determina el acceso a educación superior. Lo que queda de manifiesto es que ambas variables están inequívocamente relacionadas.

Si bien ya se ha expuesto anteriormente que la situación económica incide en la mortalidad, a continuación se intentará verificar si sucede lo mismo con el nivel de formación.

Con este fin, se muestra la correlación entre el porcentaje de población de 24 a 65 años ¹² con educación inferior a la 2ª etapa de secundaria y las tasas de mortalidad, que es de un 70 % en 2016 .

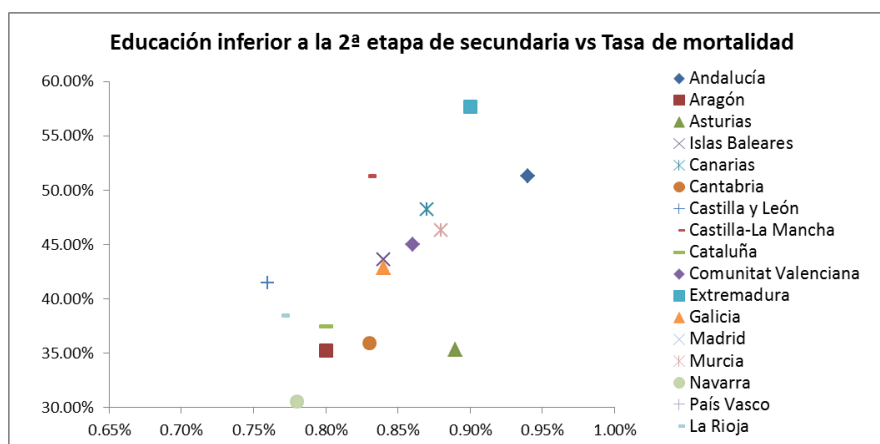


Figura 4.15. Relación entre el nivel de educación y tasas de mortalidad por CCAA (2016). Fuente: MECD; Elaboración propia.

Más evidente aún resulta la comparativa entre las tasas de mortalidad estandarizadas por causas de muerte ¹³ a nivel individual, donde, a excepción de los casos de cáncer, las tasas son claramente más elevadas para las personas con menor nivel de estudios.

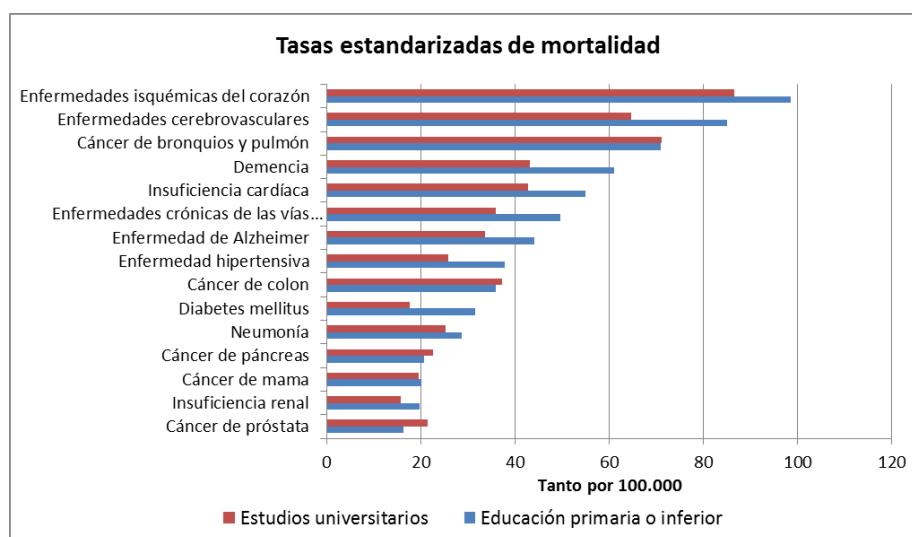


Figura 4.16. Tasas de mortalidad según nivel de estudios (2016). Fuente: INE; Elaboración propia.

¹²Se excluyen personas menores a 24 años, ya que se considera que éstas no han tenido la oportunidad de alcanzar su máximo nivel de estudios.

¹³Datos obtenidos del INE, incluye personas a partir de los 30 años.

De igual manera, cabría pensar que el nivel de formación también condiciona la salud, siendo ésta un aspecto clave con impacto directo en la mortalidad. Los datos acerca del estado de salud no resultan fáciles de analizar, puesto que son muchos y variados los aspectos que entran en juego, así como la interacción entre los mismos. Por ello, se simplifica en la medida de lo posible comparando dos indicadores bien conocidos como son el consumo de tabaco y la obesidad¹⁴.

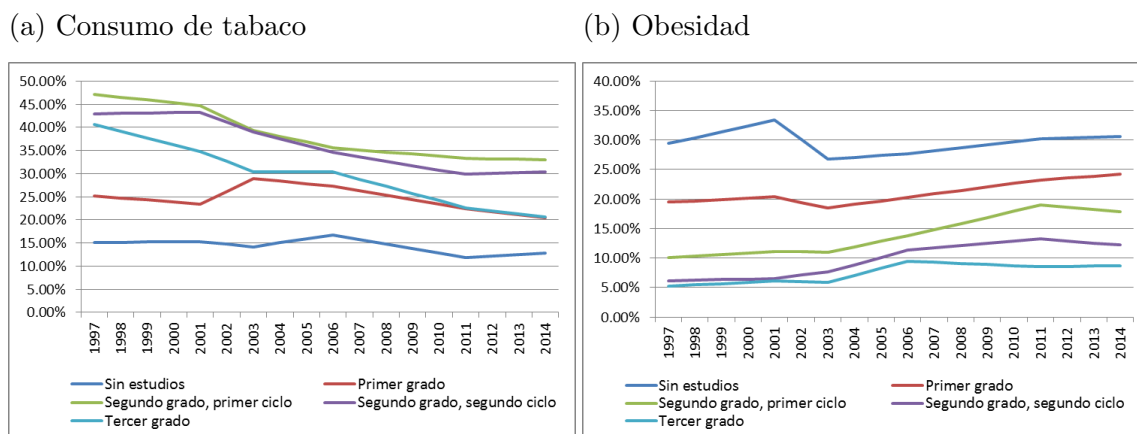


Figura 4.17. Contraste evolución del consumo del tabaco y la obesidad. Fuente: MSSSI; Elaboración propia.

El porcentaje de consumidores de tabaco no parece responder directamente al nivel de estudios (aunque podría cambiar de considerar también el poder adquisitivo), pero la evolución en el tiempo del número de consumidores sí parece depender del nivel de estudios de éstos. Es decir, el descenso generalizado del consumo de tabaco es más pronunciado entre personas con mayor nivel de estudios (línea celeste) que entre personas sin estudios (línea azul), en concreto, en el primer caso el porcentaje de fumadores se reduce entre 1997 y 2014 prácticamente a la mitad (-49 %) mientras que en el segundo caso la reducción no supone ni una quinta parte (-15 %).

Por el contrario, la obesidad sí sigue un claro patrón en relación a la educación, en tanto que a menor nivel de estudios, mayor es el porcentaje de personas con obesidad. Tal es la evidencia que las líneas que se muestran en la imagen 4.17b) no llegan a cruzarse en ningún punto. En este caso, a diferencia del consumo de tabaco, la tendencia es al alza tanto globalmente como para cada segmento, de manera que de continuar en esta línea las personas con menor nivel de formación seguirían encabezando el ranking de incidencia de la obesidad.

En cualquier caso, la salud no sólo es una cuestión de morbilidad y consumo de sustancias perjudiciales, como el tabaco y el alcohol, sino que también esta condicionada por la calidad de vida y el bienestar de las personas. Como se puede apreciar

¹⁴Datos procedentes de la Encuesta Nacional de Salud de España (1997, 2001, 2003, 2006, 2011) y Encuesta Europea de la Salud (2014). Se aplica interpolación lineal para el resto de años.;Fuente: Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad.

a continuación, la educación, muy probablemente por su peso en la renta, también implica importantes diferencias en este aspecto:

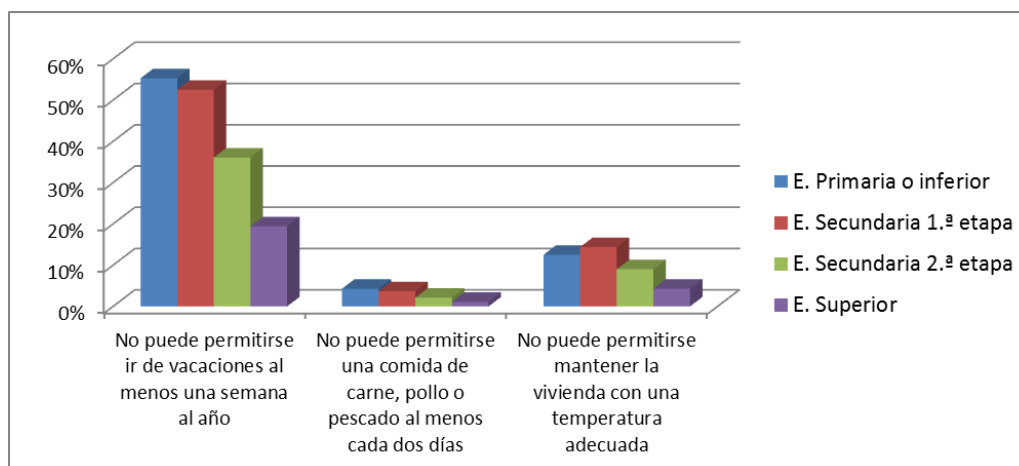


Figura 4.18. Carencia material por nivel de formación alcanzado (2016). Fuente: MECD; Elaboración propia.

Finalmente, para intentar identificar un vínculo entre el nivel de estudios, y sus implicaciones socio-económicas, y la desigualdad territorial vista anteriormente, se incluye a continuación un gráfico que muestra la distribución de la población (entre 25 y 64 años de edad) en cada Comunidad Autónoma según el nivel de formación alcanzado, ordenados a su vez en orden descendente según el PIB per cápita regional:

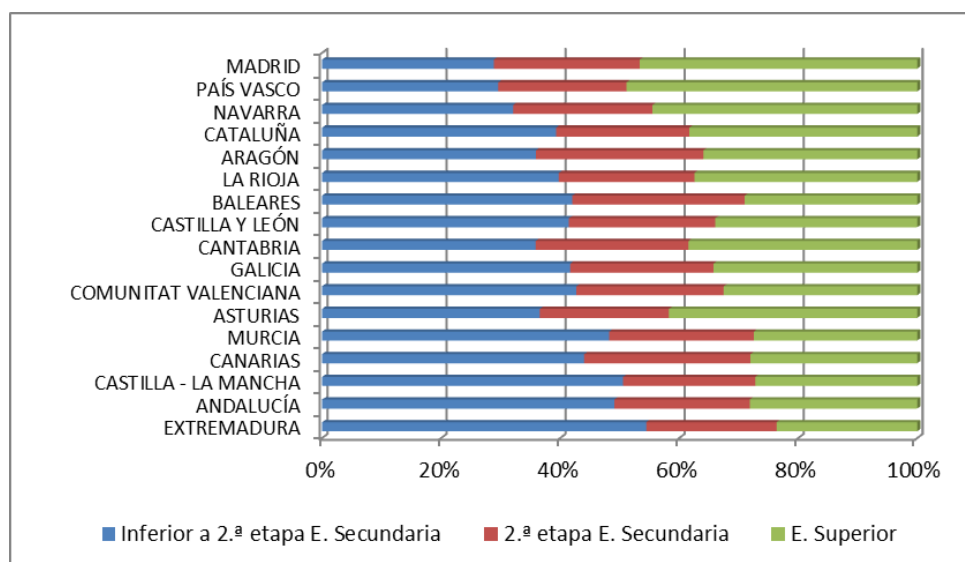


Figura 4.19. Distribución de la población por nivel de estudios según CCAA (2016). Fuentes: INE, MECD; Elaboración propia.

Se perciben diferencias notables entre Comunidades Autónomas, especialmente en ambos segmentos extremos, observando en términos generales un nivel de formación medio más elevado en aquellas Comunidades Autónomas con mayor PIB.

Por lo tanto, englobando todos los factores socio-económicos vistos, parece más que evidente que todos ellos presentan impactos directos o indirectos en la mortalidad y, yendo más allá, se intuye que están relacionados entre sí. Esta intuición tiene una base racional, en tanto que por un lado, las personas con menor nivel de estudios optan a salarios más bajos, desempeñan en mayor medida trabajos físicos con el consecuente desgaste para la salud y parecen tener hábitos de vida menos saludables. Por otra parte, en entornos con menor nivel de renta, las posibilidades de acceder a nivel de estudios superiores son menores, limitando a su vez las oportunidades de proyección laboral.

En definitiva, la desigualdad juega un papel relevante en lo que respecta a la longevidad y esas inequidades, que en este trabajo se han presentado a nivel de Comunidades Autónomas, se pueden percibir a todos los niveles. Incluso, según apunta Regidor et al. (2015), cuanto más pormenorizada es la segmentación territorial, mayor es el gradiente socio-económico observado.

Si bien las principales fuentes de datos utilizadas (INE, Ministerio de Educación, Cultura y Deportes y Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad) no publican datos con un alto nivel de desglose, se han encontrado dos estudios independientes que estudian la desigualdad intraurbana Sanz, Bustos, Villalaín y Solla (2015) y la salud en la ciudad de Madrid Díaz-Olalla y Benítez-Robredo (2015) respectivamente.

El primero de ellos crea, en base a una serie de variables variadas, que recogen diversos factores socio-económicos como el nivel de ocupación, nivel de estudios, inmigración o envejecimiento de la población, un índice sintético mediante análisis factorial.

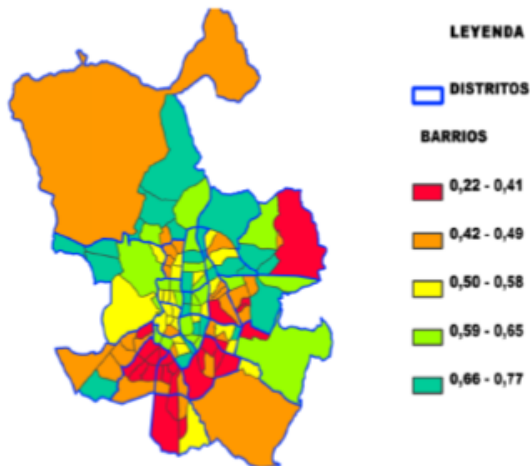
Éste índice se calcula a nivel barrio para 2007 y 2014, los cuales se analizan por separado y en conjunto, concluyendo por un lado que “la distribución territorial de los barrios más desfavorecidos sigue una pauta espacial evidente, las periferias sur y este de la Ciudad concentran la mayoría de los barrios desfavorecidos” y por otro lado que “la tendencia de los últimos años [...] ha venido a reforzar el proceso de segregación territorial de los barrios más desfavorecidos, pues los barrios más desfavorecidos en el 2007, son los que han sufrido un mayor retroceso durante el periodo de la crisis” (Sanz et al. 2015).

El segundo estudio, consiste en un informe de Madrid Salud, Organismo Autónomo del Ayuntamiento de Madrid, que profundiza en aspectos relevantes de la salud pública como son los hábitos y estilos de vida, la morbilidad, la mortalidad y la esperanza de vida, entre otros. Es un informe muy completo que ahonda en la evolución de los indicadores de salud, por ejemplo, en el caso de la mortalidad se incluyen análisis por causa y territorial.

Si bien los estudios tienen enfoques diferentes, nos permiten realizar un contraste definitivo: la coincidencia de los distritos más desfavorecidos y las tasas de

mortalidad más altas.

(a) Mapa de desigualdad urbana 2014 (Sanz et al. 2015)



(b) Tasa Ajustada de Mortalidad general de los distritos de la ciudad de Madrid para el quinquenio 2009-2013. Hombres (Díaz-Olalla y Benítez-Robredo 2015)

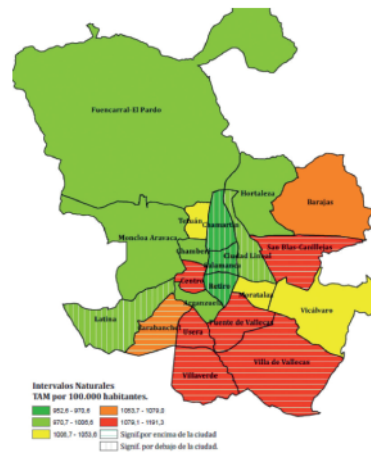
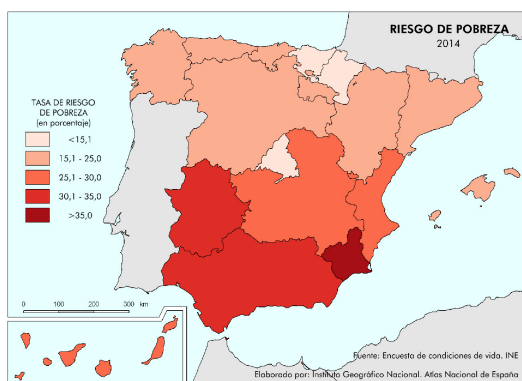


Figura 4.20. Comparativa entre índice socio-económico y mortalidad (Madrid).

La comparativa requiere una observación detallada, puesto que el nivel de segmentación no es el mismo entre ambas imágenes (barrios y distritos), pero en cualquier caso es evidente que a grandes rasgos las coincidencias son abrumadoras.

En cualquier caso, buscando el contraste equivalente nacional al de la imagen 4.20 por Comunidades Autónomas, las conclusiones son idénticas:

(a) Tasa de riesgo de pobreza (2014)



(b) Esperanza de vida al nacer (2013)

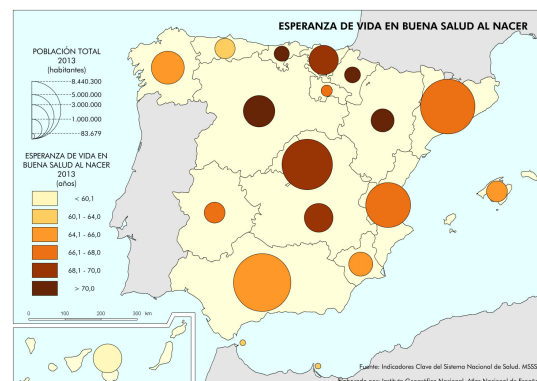


Figura 4.21. Comparativa entre tasa de riesgo de pobreza y esperanza de vida (IGN).

Por último, resaltar que no sólo debe preocupar la más que evidente existencia de desigualdades en la mortalidad entre clases socio-económicas, en este caso reducida a nivel regional, sino su evolución futura. Como se ha visto en este trabajo la brecha

existente entre algunos de los factores analizados (esperanza de vida, PIB y salud) tiende a aumentar y podría continuar en esa línea si no se toman medidas para impedirlo, sin olvidar además la mayor vulnerabilidad de las clases más desfavorecidas ante situaciones económicas adversas (Sanz et al. 2015).

4.2. Métodos alternativos

Una vez analizados dos aspectos relevantes para las tendencias de la mortalidad, cabe plantearse cómo incorporarlos en un modelo predictivo.

Evidentemente no es tarea fácil, puesto que abarcan factores de distinta índole y no siempre son fácilmente medibles. La definición y el desarrollo de un modelo concreto, excede el perímetro del presente trabajo, sin embargo se realizan algunas propuestas de mejora en base al análisis previo.

Una primera opción a tener en cuenta, es la aplicación de un modelo de manera separada para cada causa o bien la incorporación de un parámetro de calibración para las distintas causas de muerte, lo cual se está aplicando en algunos estudios, como es el caso de los modelos propuestos por Alai, Arnold, Bajekal y Villegas (2017) y Giordano, Haberman y Russolillo (2018). En este sentido habría que estudiar las opciones de incluir de una u otra manera un componente de valoración experta, es decir, recoger las expectativas de aumento/disminución de la mortalidad de enfermedades puntuales en base a publicaciones recientes e investigaciones en curso.

En esta línea cabe destacar el estudio de Alai et al. (2017), en el que se desarrolla un modelo que permite obtener el gradiente de inequidad entre clases socio-económicas por causa de muerte y proyectar dichas tasas de mortalidad aplicando *shocks* de manera individual, de tal manera que se podría anticipar el impacto de epidemias o nuevos fármacos tanto a nivel global como por clase socio-económica.

Por otro lado, se podría aprovechar la estrecha relación entre la mortalidad e indicadores macroeconómicos y socio-económicos para incorporarlos en la proyección, considerando además que se suele disponer de proyecciones de los indicadores macroeconómicos, generalmente realizados por organismos oficiales como el Banco de España, el Fondo Monetario Internacional o el Banco Central Europeo.

Adicionalmente, sería interesante observar si la correlación de dichas variables aumenta al introducir un desfase temporal, ya que los ciclos económicos pueden tener cierto efecto retardado, especialmente en lo que respecta a la salud.

Por último, se ha corroborado que las proyecciones son muy sensibles a estos cambios de tendencia, especialmente las proyecciones a medio-largo plazo, por lo que habría que valorar con mayor cautela todas que proyecciones que excedan los 2 ó 3 años.

5. CONCLUSIONES

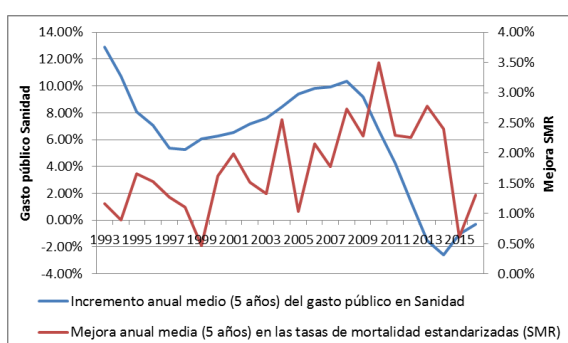
Las principales conclusiones de este trabajo son la constatación de una incipiente desaceleración de la longevidad en España y la identificación de un gradiente socio-económico en la mortalidad.

La propia naturaleza de la desaceleración, la cual se achaca principalmente a una disminución del impacto de los avances médicos y a desigualdades socio-económicas estructurales, hace pensar que se trata de una tendencia a futuro, al menos en el corto-medio plazo, si bien la comercialización de nuevos medicamentos que traten enfermedades muy extendidas como el cáncer o enfermedades del sistema respiratorio, tendría un efecto inmediato y positivo en las tasas de mortalidad.

Más difícil se plantea un descenso inminente y pronunciado en la mortalidad producido por mejoras en el aspecto socio-económico, en tanto que, como se viene mencionando a lo largo del trabajo, las desigualdades existentes están muy enraizadas en la sociedad. No bastaría solo con una reducción de la brecha económica entre clases/territorios, ya complicadas de por sí, sino que es necesario un esfuerzo para la equiparación de oportunidades de acceso a educación superior y fomentar la adopción de hábitos de vida más saludables.

Está claro que la clase política podría tomar ciertas medidas para evitar, hasta cierto punto, los desencadenantes de la desaceleración mencionados, tales como una mayor inversión en investigación y en educación. La relación entre estas inversiones y la mortalidad requeriría un estudio aparte, sin embargo sí se pueden apreciar indicios de causalidad con un ligero desfase temporal:

(a) Gasto en Sanidad vs Mortalidad
(MSSSI)



(b) Gasto en I+D vs Mortalidad (INE)

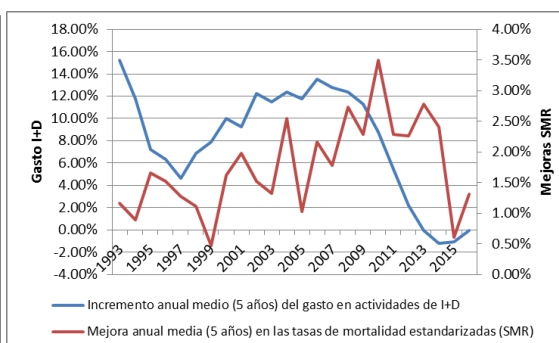


Figura 5.1. Indicios de causalidad entre gasto público y mortalidad. Fuentes: (INE web, Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad); Elaboración propia.

Pero ¿y los actuarios? ¿Pueden de alguna manera colaborar en la mitigación de estas tendencias?

Los actuarios difícilmente pueden de por sí intervenir en desarrollo de nuevos fármacos o erradicar la desigualdad social, pero como principales analistas de la mortalidad deberían dar la voz de alarma al detectar indicios de desigualdad tan evidentes.

Como bien indican Marí-Dell'Olmo et al. (2016), el gradiente de inequidad en la longevidad es un problema de salud pública, por lo que su erradicación depende en gran medida de la intervención de las administraciones públicas y los gobiernos. Y para que ésta se produzca, es necesario aportar evidencias de la existencia y el impacto de dichas desigualdades, siendo por lo tanto importante su cuantificación, la determinación de los patrones geográficos y su seguimiento.

Es cierto que la población asegurada, por motivos obvios, pertenece mayoritariamente a un sector socio-económico medio-alto y por lo tanto las desigualdades que se perciban al estudiar la cartera de clientes no son tan pronunciadas. Sin embargo la propia distribución territorial puede ser un buen indicio.

También el estudio de la mortalidad por causas, como los propuestos en Giordano et al. (2018) y Alai et al. (2017), aporta información relevante en lo que se refiere a la desigualdad socio-económica de la mortalidad. Especialmente el segundo informe, al permitir proyectar la mortalidad por edad, causa de muerte y clase socio-económica, ofrece la oportunidad de evaluar las posibles consecuencias de la aplicación de determinadas políticas públicas. En concreto permite escoger las políticas más adecuadas en función de los objetivos que se persigan, ya sean la reducción de la mortalidad global o la reducción del gradiente socio-económico de la mortalidad. Adicionalmente, se menciona (Alai et al. 2017) que se está trabajando en ampliar el modelo para poder incluir restricciones presupuestarias, lo cual lo convertiría en una herramienta tremendamente útil.

De hecho, a través del modelo, el grupo de investigación ha podido llevar a cabo un análisis del escenario resultante de conseguir el denominado “Objetivo 25x25” impulsado por la Organización Mundial de la Salud (OMS), por el cual los países miembros de Naciones Unidas se proponen reducir las muertes prematuras (30 a 70 años) debidas a las cuatro principales enfermedades no transmisibles (cardiovasculares, respiratorias, cancer y diabetes) en un 25 % (respecto a las cifras de 2010) para el año 2025. De acuerdo a las aproximaciones de Alai et al. (2017), las consecuencias en caso de alcanzar este objetivo serían por un lado un aumento generalizado de la esperanza de vida y por otro un aumento de las desigualdades para ciertos rangos de edades.

El desarrollo de los modelos actuariales actuales deben aspirar por lo tanto a alinearse con estas nuevas líneas de investigación, que prometen ser de gran ayuda para la correcta toma de decisiones por parte de los entes públicos y podrían serlo

también para el sector privado.

Adicionalmente, como bien señala Billing (2017) la profesión del actuario ha consistido tradicionalmente en ofrecer soluciones que permitan mitigar los riesgos individuales en favor del bienestar social a través de la compensación y distribución de los riesgos. Por ello, en lo que respecta a las desigualdades sociales, se debería evitar que las inequidades socio-económicas se trasladen a los precios de los seguros. En este sentido, aunque la tendencia a día de hoy sea la individualización de los riesgos, en lo que respecta a la mortalidad no se debería beneficiar a las personas de nivel socio-económico más alto o gravar a las clases más desfavorecidas, puesto que ello agravaría la desigualdad.

Tampoco se trata solo de un tema ético, sino que la desaceleración de la longevidad podría tener un gran impacto en los cálculos actuariales, ya que, en vista de lo anterior, estarían sobreestimando la longevidad de los asegurados. En concreto, tendría dos efectos inmediatos, a saber:

- **Subestimación de primas para productos de vida-riesgo.** Sin entrar en cálculos específicos, resulta evidente que una mayor longevidad se refleja en menor riesgo para la aseguradora y por lo tanto en una prima menor.
- **Subestimación de prestaciones para productos de vida-ahorro.** Por el contrario, al aumentar la longevidad, disminuyen las prestaciones para productos de vida-ahorro, como es el caso de las rentas.

Por lo tanto, es necesario que las propias las compañías aseguradoras lleven a cabo un seguimiento de las tendencias de la mortalidad y lo reflejen de la mejor manera posible en sus modelos actuariales.

Incluso desde un punto de vista comercial, la Encuesta de Competencias Financieras más reciente (Bover 2016) pone de relieve que el nivel socio-económico, marca en gran medida la adquisición de productos financieros.

Nótese por ejemplo, que únicamente un 10% de las personas con educación primaria tiene un seguro médico, frente al 34% de los encuestados con estudios universitarios, y de manera similar se aprecian diferencias en la contratación de seguros de vida o planes de pensiones.

En resumen, los potenciales futuros clientes de las compañías aseguradoras se encuentran en mayor medida entre clases socio-económicas bajas, lo cual no debe interpretarse únicamente como una oportunidad de negocio para las empresas sino como una oportunidad de mejorar la calidad de vida de personas más desfavorecidas y reducir en cierta medida las inequidades en la mortalidad.

Para que esto pueda ocurrir, es muy importante que se informe adecuadamente al cliente sobre los servicios que contrata y las condiciones de los mismos, puesto que la propia encuesta también pone de manifiesto la desigualdad en el nivel de

conocimientos financieros básicos entre las distintas clases socio-económicas, y de lo contrario se podría incurrir en situaciones de abuso por falta de conocimiento de los potenciales clientes.

BIBLIOGRAFÍA

- Alai, D.H., Arnold, S., Bajekal, M. y Villegas, A.M. (enero, 2017). *Causal Mortality by Socioeconomic Circumstances: A Model to Assess the Impact of Policy Options on Inequalities in Life Expectancy*. Comunicación presentada en Living to 100 Symposium, Orlando. Recuperado de <https://www.soa.org/essays-monographs/2017-living-to-100/2017-living-100-monograph-alai-arnold-bajekal-villegas-paper.pdf>.
- Albarrán, I., Ariza, F., Cóbrecas, V.M., Durbán, M.L y Rodríguez-Pardo, J.M. (2014). *El Riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II : modelos actuariales avanzados para su gestión*. Madrid: Fundación MAPFRE.
- Billing, A. (abril, 2017). *Actuarial Perspectives on Inequality*. Comunicación presentada en IAA Council and Committee Meetings, Budapest. Recuperado de https://www.actuaries.org/CTTEES_TFM/presentations.pdf.
- Bover, O., Hospido, L. y Villanueva, E. (2016) Encuesta de Competencias Financieras. Recuperado de https://www.bde.es/bde/es/areas/estadis/Otras_estadistic/encuesta-de-comp/Encuesta_de_Com_bee50d4c672e451.html
- Cairns, A., Blake, D. y Dowd, K. (2008). Modelling and Management of Mortality Risk: A Review. *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol.2-3, pp.79-113.
- Debón Aucejo, A., Martínez Ruiz, F. y Montes Suay, F. (enero, 2007). *Modelo Lee-Carter extendido*. Comunicación presentada en XV Jornadas de ASEPUMA y III Encuentro Nacional, Palma de Mallorca. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/26458812_Modelo_Lee-Carter_extendido
- Díaz-Olalla, J.M. y Benítez-Robredo, T. (2015). Estudio de Salud de la Ciudad de Madrid 2014. Madrid: Madrid Salud, Ayuntamiento de Madrid. Recuperado de http://www.madridsalud.es/publicaciones/OtrasPublicaciones/estudio_salud_madrid_2014.pdf.
- Eurostat (2013). Revision of the European Standard Population. *Eurostat Methodologies and Working Papers* Recuperado de <http://ec.europa.eu/eurostat/documents/3859598/5926869/KS-RA-13-028-EN.PDF/e713fa79-1add-44e8-b23d-5e8fa09b3f8f>

- Farmaindustria. (2018). *Medicamentos innovadores: Historia de una revolución*. Recuperado de <http://www.farmaindustria.es/web/reportaje/medicamentos-innovadores-historia-una-revolucion/>.
- Fenton, J. , Kelley, C. y Steiner, K. (28 junio, 2016). New mortality data show declining longevity improvements - how should life insurers prepare? Recuperado de <https://www.willistowerswatson.com/en/insights/2016/06/new-mortality-data-show-declining-longevity-improvements>
- Fenton, J. y Kelley, C. (2 febrero, 2018). New mortality data show longevity improvements continue to decline. Recuperado de <https://www.willistowerswatson.com/en/insights/2018/02/mortality-data-show-declining-longevity-improvements>
- Giordano, G., Haberman, S. y Russolillo, M. (2018). Three-Way Data Analysis Applied to Cause Specific Mortality Trends. En *Demography and Health Issues: Population Aging, Mortality and Data Analysis* (pp.121-130). Cham: Springer International Publishing.
- Giroi, F. y King, G. (2007). Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method. Recuperado de <https://gking.harvard.edu/files/abs/lc-abs.shtml>.
- Institute and Faculty of Actuaries (2018). Continuous Mortality Investigation Working Paper 105. *The CMI Mortality Projections Model*. Recuperado de <https://www.actuaries.org.uk/documents/briefing-note-working-paper-105>
- Instituto Geográfico Nacional (IGN). Ministerio de Fomento. Recuperado de <http://www.ign.es/web/ign/portal/espana-en-mapas>
- Instituto Nacional de Estadística. Página web. Recuperado de www.ine.es
- Instituto Nacional de Estadística. *Tablas de mortalidad. Metodología*. Recuperado de http://www.ine.es/daco/daco42/mortalidad/metodo_9111.pdf
- Marí-Dell'Olmo, M., Gotsens, M., Palència, L., Rodríguez-Sanz, M., Martínez-Beneito, M.A., Ballesta, M., ... Borrell, C. (2016). Trends in socioeconomic inequalities in mortality in small areas of 33 Spanish cities. *BMC Public Health*, Vol.16, pp.663.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD). Página web. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/estadisticas/educacion/indicadores-publicaciones-sintesis/cifras-educacion-espana/2015-16.html>

- Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad (MSSSI). Página web. Recuperado de <http://pestadistico.inteligenciadegestion.msssi.es/publicoSNS/Comun/ArbolNodos.aspx?idNodo=15371>
- Palin, J. (10 agosto, 2017). Mortality improvements in decline. Recuperado de <http://www.theactuary.com/features/2017/08/mortality-improvements-in-decline/>
- Regidor, E., Vallejo, F., Reques, L., Cea, L., Miqueleiz, E. y Barrio, G. (2015). Area-level socioeconomic context, total mortality and cause-specific mortality in Spain: Heterogeneous findings depending on the level of geographic aggregation. *Social Science & Medicine*, Vol.141, pp.142-150.
- Reques, L., Miqueleiz, E., Giráldez-García, C., Santos, J.M, Martínez, D. y Regidor, E. (2015). Patrones geográficos de la mortalidad y de las desigualdades socioeconómicas en mortalidad en España. *Revista Española de Salud Pública*, Vol.89(2), pp.137-147.
- Ridsdale, B. (abril, 2017). *Is longevity still improving?*. Comunicación presentada en IAA Council and Committee Meetings, Budapest. Recuperado de https://www.actuaries.org/CTTEES_TFM/presentations.pdf.
- Sanz Berzal, B., Bustos Tapetado, D., Villalaín García C. y Solla Navarro, D. (2015). La desigualdad intraurbana en la ciudad de Madrid. *Barómetro de Economía de la ciudad de Madrid*, 46, pp.87-107 .Recuperado de <http://www.madrid.es/UnidadesDescentralizadas/UDCObservEconomico/BarometroEconomia/2015/Cuarto%20trimestre/Ficheros/BAROMETRO%2046.pdf>
- Spedicato, G.A. y Clemente, G.P. (2008). Mortality projection with demography and lifecontingencies packages. Recuperado de https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/vignettes/mortality_projection.pdf.

ANEXO A

| Age Group (years) | Standard Population |
|--------------------------|----------------------------|
| 0,0 | 1 000 |
| 1-4 | 4 000 |
| 5-9 | 5 500 |
| 10-14 | 5 500 |
| 15-19 | 5 500 |
| 20-24 | 6 000 |
| 25-29 | 6 000 |
| 30-34 | 6 500 |
| 35-39 | 7 000 |
| 40-44 | 7 000 |
| 45-49 | 7 000 |
| 50-54 | 7 000 |
| 55-59 | 6 500 |
| 60-64 | 6 000 |
| 65-69 | 5 500 |
| 70-74 | 5 000 |
| 75-79 | 4 000 |
| 80-84 | 2 500 |
| 85-89 | 1 500 |
| 90-94 | 800 |
| 95+ | 200 |
| Total | 100 000 |

Figura A.1. Población estándar europea (Eurostat 2013)

ANEXO B

Script: "R_leecarter_INE_1991_2016.R"

```
##### Descargar e instalar paquetes

install.packages("https://cran.rstudio.com/bin/windows/
                 contrib/3.4/demography_1.20.zip", repos=NULL)
install.packages("https://cran.rstudio.com/bin/windows/
                 contrib/3.4/forecast_8.3.zip", repos=NULL)

library("demography")
library("forecast")

##### CARGAR DATOS HMD para conseguir estructura demogdata
data_HMD<-hmd.mx(country="ESP", username="xxx@gmail.com",
                 password="xxxxx", label="Spain")
# Ver los rangos que maneja HMD (para comparar con los que se
# utilizarán del INE)
min_age_HMD<-min(data_HMD$age)      #0
max_age_HMD<-max(data_HMD$age)      #110
min_year_HMD<-min(data_HMD$year)    #1908
max_year_HMD<-max(data_HMD$year)    #2014

# Completar valores, escogidos en base a la información
# del INE
min_age_INE<-0
max_age_INE<-100      #A partir de 1991, por eso corte de año
min_year_INE<-1991
max_year_INE<-2016   #MAYOR que HMD

data_HMD_ages<-extract.ages(data_HMD,min_age_INE:max_age_INE,
                             combine.upper = TRUE)
data_HMD_year<-extract.years(data_HMD_ages,
                              min_year_INE:max_year_HMD)

#Comprobar que todos los datos informados
View(data_HMD_year$rate$female)
View(data_HMD_year$rate$male)
```

```

#Se incluyen los años 2015 y 2016
v<-as.integer(c(min_year_INE:max_year_INE))

data_HMD_year$year<-v

##### Cambiar directorio
setwd("D:/Bibliotecas/Documentos/Máster C.Actuariales/2. Curso/
      2. TFM/Desaceleración longevidad/R data")

##### Volcamos datos INE
mx_mujeres<-read.csv(file="INE_mx_female_1991_2016.csv",
                     header = TRUE, sep = ";",
                     dec = ".", fill = TRUE)[,2:(length(v)+1)]

mx_hombres<-read.csv(file="INE_mx_male_1991_2016.csv",
                     header = TRUE, sep = ";",
                     dec = ".", fill = TRUE)[,2:(length(v)+1)]

mx_total<-read.csv(file="INE_mx_total_1991_2016.csv",
                   header = TRUE, sep = ";",
                   dec = ".", fill = TRUE)[,2:(length(v)+1)]

#### POBLACIÓN expuesta (INE), equivalente a  $d(x,t)/m(x,t)$ 
#### De acuerdo al código fuente de "hmd.mx", que recurre
#### a http://www.mortality.org/hmd/ESP/STATS/Exposures\_1x1.txt
pop_mujeres<-read.csv(file="INE_pop_exp_female_1991_2016.csv",
                      header = TRUE, sep = ";",
                      dec = ".", fill = TRUE)[,2:(length(v)+1)]

pop_hombres<-read.csv(file="INE_pop_exp_male_1991_2016.csv",
                      header = TRUE, sep = ";",
                      dec = ".", fill = TRUE)[,2:(length(v)+1)]

pop_total<-read.csv(file="INE_pop_exp_total_1991_2016.csv",
                    header = TRUE, sep = ";",
                    dec = ".", fill = TRUE)[,2:(length(v)+1)]

# Convertir en matrices
matriz_mx_M<-data.matrix(mx_mujeres)
matriz_mx_H<-data.matrix(mx_hombres)
matriz_mx_T<-data.matrix(mx_total)

```



```

matriz_pop_M<-data.matrix(pop_mujeres)
matriz_pop_H<-data.matrix(pop_hombres)
matriz_pop_T<-data.matrix(pop_total)

colnames(matriz_mx_M) <- data_HMD_year$year
rownames(matriz_mx_M) <- data_HMD_year$age
colnames(matriz_mx_H) <- data_HMD_year$year
rownames(matriz_mx_H) <- data_HMD_year$age
colnames(matriz_mx_T) <- data_HMD_year$year
rownames(matriz_mx_T) <- data_HMD_year$age

colnames(matriz_pop_M) <- data_HMD_year$year
rownames(matriz_pop_M) <- data_HMD_year$age
colnames(matriz_pop_H) <- data_HMD_year$year
rownames(matriz_pop_H) <- data_HMD_year$age
colnames(matriz_pop_T) <- data_HMD_year$year
rownames(matriz_pop_T) <- data_HMD_year$age

### Crear copia para sustituir los datos
data_INE_MHT<-data_HMD_year

### Sustituir
data_INE_MHT$rate$female<-matriz_mx_M
data_INE_MHT$rate$male<-matriz_mx_H
data_INE_MHT$rate$total<-matriz_mx_T

data_INE_MHT$pop$female<-matriz_pop_M
data_INE_MHT$pop$male<-matriz_pop_H
data_INE_MHT$pop$total<-matriz_pop_T

##### Reducir periodo observación

anno_ini_obs<-1991

# Definir cuántos años se dejan para proyectar
anno_proy<-6
anno_fin_obs<-max_year_INE-anno_proy

data_INE_MHT_obs<-extract.years(data_INE_MHT,
                               anno_ini_obs:anno_fin_obs)

# Dibujar 2 gráficos juntos, mujeres y hombres

```

```

# (eje x -> edad, eje y -> log(mx))
# Importante ajustar tamaño para incluir leyenda
layout(matrix(c(1,1,2,2,3),nrow=1,ncol=5,byrow=TRUE))
plot(data_INE_MHT_obs, series="male", datatype="rate",
      main="Tasas hombres", xlab="Edad",
      ylab="Log tasa mortalidad")
plot(data_INE_MHT_obs, series="female", datatype="rate",
      main="Tasas mujeres", xlab="Edad",
      ylab="Log tasa mortalidad")
plot(0,0,xaxt="n",yaxt="n",ann=FALSE)
legend("right", legend=unique(data_INE_MHT_obs$year),
      col=rainbow(length(data_INE_MHT_obs$year)*1.25),ncol=1,
      pch=19, title="Año",cex=0.9)

# Dibujar 2 gráficos juntos, mujeres y hombres
# (eje x -> año, eje y -> log(mx))
# Importante ajustar tamaño para incluir leyenda
par(mfrow=c(1,3))
plot(data_INE_MHT_obs, series="male", datatype="rate",
      plot.type="time", main="Tasas hombres", xlab="Años",
      ylab="Log tasa mortalidad")
plot(data_INE_MHT_obs, series="female", datatype="rate",
      plot.type="time", main="Tasas mujeres", xlab="Años",
      ylab="Log tasa mortalidad")
plot(0,0,xaxt="n",yaxt="n",ann=FALSE,frame.plot = FALSE)
legend("right", legend=unique(data_INE_MHT_obs$age),
      col=rainbow(length(data_INE_MHT_obs$age)*1.25),ncol=4,
      pch=19, title="Edad",cex=0.72)

##### APLICAR LEE-CARTER #####
spainLca_M<-lca(data_INE_MHT_obs, series="female")
spainLca_H<-lca(data_INE_MHT_obs, series="male")
spainLca_T<-lca(data_INE_MHT_obs, series="total")

# Ver resultados ax, bx, kt gráficamente
# Es necesario determinar mínimo y máximo para definir eje
ymin_bx=min(spainLca_M$bx,spainLca_H$bx)
ymax_bx=max(spainLca_M$bx,spainLca_H$bx)

par(mfrow=c(1,3))

#graf ax

```

```

plot(spainLca_M$ax,main=expression(alpha['x']),xlab="Edad",
     ylab=expression(alpha['x']), type="l",col="red")
lines(x=spainLca_H$age, y=spainLca_H$ax,
      main=expression(alpha['x']), col="blue")
legend("topleft",c("Mujeres","Hombres"), cex=0.8,
      col=c("red","blue"),lty=1)

#bx
plot(spainLca_M$bx,main=expression(beta['x']),xlab="Edad",
     ylab=expression(beta['x']), type="l",col="red",
     ylim=c(ymin_bx,ymax_bx))
lines(x=spainLca_H$age, y=spainLca_H$bx,
      main=expression(beta['x']), col="blue")
legend("topright",c("Mujeres","Hombres"), cex=0.8,
      col=c("red","blue"),lty=1)

#kt
plot(spainLca_M$kt,main=expression('k'['t']),xlab="Año",
     ylab=expression('k'['t']), type="l",col="red")
lines(x=spainLca_H$year, y=spainLca_H$kt,
      main=expression('k'['t']), col="blue")
legend("topright",c("Mujeres","Hombres"), cex=0.8,
      col=c("red","blue"),lty=1)

# Residuos (mapa de calor)
par(mfrow=c(1,1))
plot(residuals(spainLca_M),type="filled.contour",
     xlab="Año",ylab="Edad")
plot(residuals(spainLca_H),type="filled.contour",
     xlab="Año",ylab="Edad")

##### Ver comparación real vs estimado (ejemplo edad fija)
edad_ej<-30 #65
pos_ej<-match(edad_ej,data_INE_MHT_obs$age)

min_y_M<-min(data_INE_MHT_obs$rate$female[pos_ej,],
             exp(spainLca_M$fitted$y[pos_ej,]))
max_y_M<-max(data_INE_MHT_obs$rate$female[pos_ej,],
             exp(spainLca_M$fitted$y[pos_ej,]))

min_y_H<-min(data_INE_MHT_obs$rate$male[pos_ej,],
             exp(spainLca_H$fitted$y[pos_ej,]))

```

```

max_y_H<-max(data_INE_MHT_obs$rate$male[pos_ej,],
             exp(spainLca_H$fitted$y[pos_ej,]))

par(mfrow=c(1,2))
plot(seq(min_year_INE, anno_fin_obs), ylim=c(min_y_M, max_y_M),
     data_INE_MHT_obs$rate$female[pos_ej,],
     col="black", xlab="Años", ylab="Tasas mortalidad", type="l",
     main=paste("Mujeres Edad=", edad_ej))
lines(seq(min_year_INE, anno_fin_obs),
      exp(spainLca_M$fitted$y[pos_ej,]), col="red", xlab="Años",
      ylab="Tasas mortalidad")
legend("topright", c("Real", "Modelo"), cex=0.8,
      col=c("black", "red"), lty=1)

plot(seq(min_year_INE, anno_fin_obs), ylim=c(min_y_H, max_y_H),
     data_INE_MHT_obs$rate$male[pos_ej,],
     col="black", xlab="Años", ylab="Tasas mortalidad", type="l",
     main=paste("Hombres Edad=", edad_ej))
lines(seq(min_year_INE, anno_fin_obs),
      exp(spainLca_H$fitted$y[pos_ej,]), col="blue", xlab="Años",
      ylab="Tasas mortalidad")

legend("topright", c("Real", "Modelo"), cex=0.8,
      col=c("black", "blue"), lty=1)

##### PROYECCIÓN #####

#Intervalos de confianza =95%
forecast_lca_M<-forecast(spainLca_M, h=anno_proy, level = 95)
forecast_lca_H<-forecast(spainLca_H, h=anno_proy, level = 95)

#Gráficamente
par(mfrow=c(1,2))
plot(forecast_lca_M$kt.f, main="Mujeres", xlab="Años",
     ylab=expression("k"[" t"]))
plot(forecast_lca_H$kt.f, main="Hombres", xlab="Años",
     ylab=expression("k"[" t"]))

##### JUNTAR TASA REALES Y PROYECTADAS #####

```

```

#Gráficamente para edad fija

edad<-65
pos<-match(edad,data_INE_MHT$age)

### Para dibujar con intervalo de confianza se define
### la siguiente función

### Para dibujar con intervalo de confianza
### -> ejecutar "R_funcion_dibujar_forecast_IC"
estr_forecast <- function(serie_original, serie_fitted,
                          proy_mean, proy_upper,
                          proy_lower,anno_ini, anno_fin,ic)
{
  serie_original<-ts(serie_original, start=c(anno_ini, 1),
                    end=c(anno_fin, 1), frequency=1)
  serie_fitted<-ts(serie_fitted, start=c(anno_ini, 1),
                  end=c(anno_fin, 1), frequency=1)
  proy_mean<-ts(proy_mean, start=c((anno_fin+1), 1),
                end=c((anno_fin+length(proy_mean)), 1),
                frequency=1)
  proy_upper<-ts(proy_upper, start=c((anno_fin+1), 1),
                 end=c((anno_fin+length(proy_upper)), 1),
                 frequency=1)
  proy_lower<-ts(proy_lower, start=c((anno_fin+1), 1),
                 end=c((anno_fin+length(proy_lower)), 1),
                 frequency=1)
  # Residuos
  residuos=serie_original-serie_fitted
  # Construir lista con datos de salida
  output <- list(level=ic,mean=proy_mean, lower=proy_lower,
                 upper=proy_upper,x=serie_original,
                 fitted=serie_fitted,
                 residuals=residuos)
  # Valores función con formato forecast

```

```

    return(structure(output, class='forecast'))
}

model_IC_M<-estr_forecast (
  serie_original=data_INE_MHT_obs$rate$female[pos,],
  serie_fitted = exp(spainLca_M$fitted$y[pos,]),
  proy_mean = forecast_lca_M$rate$female[pos,],
  proy_upper = forecast_lca_M$rate$upper[pos,],
  proy_lower = forecast_lca_M$rate$lower[pos,],1991,2010,95)

model_IC_H<-estr_forecast (
  serie_original=data_INE_MHT_obs$rate$male[pos,],
  serie_fitted = exp(spainLca_H$fitted$y[pos,]),
  proy_mean = forecast_lca_H$rate$male[pos,],
  proy_upper = forecast_lca_H$rate$upper[pos,],
  proy_lower = forecast_lca_H$rate$lower[pos,],1991,2010,95)

par(mfrow=c(1,2))
par(oma=c(1,1,1,1))
par(mar=c(1,2,2,1) )
plot(model_IC_M, col="black", fcol="red", shadecols=gray((9:1)/10),
      main=paste("Mujeres edad=",edad))
lines(x=seq(min_year_INE,max_year_INE),
      y=data_INE_MHT$rate$female[pos,], xlab="Años",
      ylab="Tasas mortalidad", col="black",type="l",
      main=paste("Mujeres edad=",edad))
lines(x=seq(min_year_INE,anno_fin_obs),
      y=exp(spainLca_M$fitted$y[pos,]), xlab="Años",
      ylab="Tasas mortalidad",col="red")

legend("topright", c("Real","Modelo Mujeres","Intervalo confianza"),
      cex=0.8,bty = "n",col=c("black","red",NA), lty=c(1,1,NA),
      density=c(0,0,200),fill=c("black","red","gray"),
      border = c(NA,NA,"gray"),merge = TRUE)

plot(model_IC_H, col="black", fcol="blue", shadecols=gray((9:1)/10),
      main=paste("Hombres edad=",edad))
lines(x=seq(min_year_INE,max_year_INE),
      y=data_INE_MHT$rate$male[pos,], xlab="Años",
      ylab="Tasas mortalidad", col="black",type="l",
      main=paste("Hombres edad=",edad))
lines(x=seq(min_year_INE,anno_fin_obs),

```

```

y=exp(spainLca_H$fitted$y[pos,]), xlab="Años",
ylab="Tasas mortalidad",col="blue")

legend("topright", c("Real", "Modelo Hombres", "Intervalo confianza"),
      cex=0.8,bty = "n",col=c("black", "blue", NA), lty=c(1,1,NA),
      density=c(0,0,200),fill=c("black", "red", "gray"),
      border = c(NA,NA, "gray"),merge = TRUE)

#Gráficamente para año fijo

anno_graf<-2016

pos_anno<-match(anno_graf,data_INE_MHT$year)
n<-length(data_INE_MHT_obs$year)

kt_M_mean<-c(spainLca_M$kt, (rep(spainLca_M$kt [n], anno_proy)
      +forecast_lca_M$kt.f$mean))
kt_M_up<-c(spainLca_M$kt, (rep(spainLca_M$kt [n], anno_proy)
      +forecast_lca_M$kt.f$upper))
kt_M_low<-c(spainLca_M$kt, (rep(spainLca_M$kt [n], anno_proy)
      +forecast_lca_M$kt.f$lower))

mean_M<-exp(spainLca_M$ax+spainLca_M$bx%*%t(kt_M_mean))
up_M<-exp(spainLca_M$ax+spainLca_M$bx%*%t(kt_M_up))
low_M<-exp(spainLca_M$ax+spainLca_M$bx%*%t(kt_M_low))

kt_H_mean<-c(spainLca_H$kt, (rep(spainLca_H$kt [n], anno_proy)
      +forecast_lca_H$kt.f$mean))
kt_H_up<-c(spainLca_H$kt, (rep(spainLca_H$kt [n], anno_proy)
      +forecast_lca_H$kt.f$upper))
kt_H_low<-c(spainLca_H$kt, (rep(spainLca_H$kt [n], anno_proy)
      +forecast_lca_H$kt.f$lower))

mean_H<-exp(spainLca_H$ax+spainLca_H$bx%*%t(kt_H_mean))
up_H<-exp(spainLca_H$ax+spainLca_H$bx%*%t(kt_H_up))
low_H<-exp(spainLca_H$ax+spainLca_H$bx%*%t(kt_H_low))

model_IC_M_anno<-estr_forecast (
  serie_original= 0,
  serie_fitted = 0,
  proy_mean = log(mean_M[,pos_anno]),
  proy_upper = log(up_M[,pos_anno]),

```

```

proy_lower = log(low_M[,pos_anno]),-1,-1,95)

model_IC_H_anno<-estr_forecast (
  serie_original= 0,
  serie_fitted = 0,
  proy_mean = log(mean_H[,pos_anno]),
  proy_upper = log(up_H[,pos_anno]),
  proy_lower = log(low_H[,pos_anno]),-1,-1,95)

par(mfrow=c(1,1))
plot(model_IC_M_anno,include=0,col="black",fcol="red",
      flwd=1.5,shadecols=gray((9:1)/10),
      main=paste("Año=",anno_graf),ylab="Log tasas mortalidad")
lines(x=seq(0,100),y=log(data_INE_MHT$rate$female[,pos_anno]),
      xlab="Años",ylab="Log tasas mortalidad", col="black",
      type="l", main=paste("Año=",anno_graf))

legend("topleft", c("Real","Modelo Mujeres", "Intervalo confianza"),
      cex=0.8,bty = "n",col=c("black","red",NA), lty=c(1,1,NA),
      density=c(0,0,200),fill=c("black","red","gray"),
      border = c(NA,NA,"gray"),merge = TRUE)

plot(model_IC_H_anno,include=0,col="black",fcol="blue",flwd=1.5,
      shadecols=gray((9:1)/10), main=paste("Año=",anno_graf),
      ylab="Log tasas mortalidad")
lines(x=seq(0,100),y=log(data_INE_MHT$rate$male[,pos_anno]),
      xlab="Años",ylab="Log tasas mortalidad", col="black",
      type="l", main=paste("Año=",anno_graf))

legend("topleft", c("Real","Modelo Hombres", "Intervalo confianza"),
      cex=0.8,bty = "n",col=c("black","blue",NA), lty=c(1,1,NA),
      density=c(0,0,200),fill=c("black","red","gray"),
      border = c(NA,NA,"gray"),merge = TRUE)

```


ANEXO C

Script: "R_lca2_manual.R"

```
#####  
### Primero ejecutar "R_leecarter_INE_1991_2016.R" hasta ###  
### obtener 'data_INE_MHT_obs' (fila 111). ###  
#####  
  
### Modelo logit  
logit_mx_M<-log(data_INE_MHT_obs$rate$female/  
(1-data_INE_MHT_obs$rate$female))  
logit_mx_H<-log(data_INE_MHT_obs$rate$male/  
(1-data_INE_MHT_obs$rate$male))  
logit_mx_T<-log(data_INE_MHT_obs$rate$total/  
(1-data_INE_MHT_obs$rate$total))  
  
#### Determinar dimensiones (igual para mujeres, hombres y total)  
n<-NCOL(logit_mx_M) # (n=número de años del periodo)  
m<-NROW(logit_mx_M) # (m=número de edades)  
  
### Obtener ax manual y restar  
ax_manual_M<-as.matrix(rowMeans(logit_mx_M))  
ax_manual_H<-as.matrix(rowMeans(logit_mx_H))  
ax_manual_T<-as.matrix(rowMeans(logit_mx_T))  
  
ax_M_rep<-matrix(rep(ax_manual_M,each=n), ncol=n, byrow=TRUE)  
ax_H_rep<-matrix(rep(ax_manual_H,each=n), ncol=n, byrow=TRUE)  
ax_T_rep<-matrix(rep(ax_manual_T,each=n), ncol=n, byrow=TRUE)  
  
matriz_pre_SVD_M<-logit_mx_M-ax_M_rep  
matriz_pre_SVD_H<-logit_mx_H-ax_H_rep  
matriz_pre_SVD_T<-logit_mx_T-ax_T_rep  
  
### Descomposición  
svd_M<-svd(matriz_pre_SVD_M)  
svd_H<-svd(matriz_pre_SVD_H)  
svd_T<-svd(matriz_pre_SVD_T)  
  
### Obtención bx y kt (sin ajuste) manualmente
```

```

### --> DOS componentes principales
sum_col_bx_M<-colSums(svd_M$u)
sum_col_bx_H<-colSums(svd_H$u)
sum_col_bx_T<-colSums(svd_T$u)

# Mujeres
bx1_M <- svd_M$u[,1]/sum_col_bx_M[1]
bx2_M <- svd_M$u[,2]/sum_col_bx_M[2]
kt1_M<- svd_M$d[1] * svd_M$v[,1] * sum_col_bx_M[1]
kt2_M<- svd_M$d[2] * svd_M$v[,2] * sum_col_bx_M[2]

# Hombres
bx1_H <- svd_H$u[,1]/sum_col_bx_H[1]
bx2_H <- svd_H$u[,2]/sum_col_bx_H[2]
kt1_H<- svd_H$d[1] * svd_H$v[,1] * sum_col_bx_H[1]
kt2_H<- svd_H$d[2] * svd_H$v[,2] * sum_col_bx_H[2]

# Total
bx1_T <- svd_T$u[,1]/sum_col_bx_T[1]
bx2_T <- svd_T$u[,2]/sum_col_bx_T[2]
kt1_T<- svd_T$d[1] * svd_T$v[,1] * sum_col_bx_T[1]
kt2_T<- svd_T$d[2] * svd_T$v[,2] * sum_col_bx_T[2]

##### Gráfico parámetros
ymin_bx1=min(bx1_M,bx1_H)
ymax_bx1=max(bx1_M,bx1_H)

ymin_bx2=min(bx2_M,bx2_H)
ymax_bx2=max(bx2_M,bx2_H)

ymin_kt1=min(kt1_M,kt1_H)
ymax_kt1=max(kt1_M,kt1_H)

ymin_kt2=min(kt2_M,kt2_H)
ymax_kt2=max(kt2_M,kt2_H)

par(mfrow=c(1,3))

#graf ax
plot(ax_manual_M,main=expression(alpha[' x' ]),xlab="Edad",
      ylab=expression(alpha[' x' ]), type="l",col="red")

```

```

lines(x=data_INE_MHT_obs$age, y=ax_manual_H,
      main=expression(alpha[' x' ]), col="blue")
legend("topleft",c("Mujeres","Hombres"), cex=0.8,
      col=c("red","blue"),lty=1)

#bx1
plot(bx1_M,main=expression(beta[' x' ]^1),xlab="Edad",
     ylab=expression(beta[' x' ]^1), type="l",col="red",
     ylim=c(ymin_bx1,ymax_bx1))
lines(x=data_INE_MHT_obs$age, y=bx1_H,
      main=expression(beta[' x' ]^1),col="blue")
legend("topright",c("Mujeres","Hombres"), cex=0.8,
      col=c("red","blue"),lty=1)

#kt1
plot(x=data_INE_MHT_obs$year, y=kt1_M,
     main=expression('k' [' t' ]^1),xlab="Año",
     ylab=expression('k' [' t' ]^1), type="l",col="red",
     ylim=c(ymin_kt1,ymax_kt1))
lines(x=data_INE_MHT_obs$year, y=kt1_H,
      main=expression('k' [' t' ]^1), col="blue")
legend("topright",c("Mujeres","Hombres"), cex=0.8,
      col=c("red","blue"),lty=1)

par(mfrow=c(1,2))

#bx2
plot(bx2_M,main=expression(beta[' x' ]^2),xlab="Edad",
     ylab=expression(beta[' x' ]^2), type="l",col="red",
     ylim=c(ymin_bx2,ymax_bx2))
lines(x=data_INE_MHT_obs$age, y=bx2_H,
      main=expression(beta[' x' ]^2), col="blue")
legend("topright",c("Mujeres","Hombres"), cex=0.8,
      col=c("red","blue"),lty=1)

#kt2
plot(x=data_INE_MHT_obs$year, y=kt2_M,
     main=expression('k' [' t' ]^2),xlab="Año",
     ylab=expression('k' [' t' ]^2), type="l",col="red",
     ylim=c(ymin_kt2,ymax_kt2))
lines(x=data_INE_MHT_obs$year, y=kt2_H,
      main=expression('k' [' t' ]^2), col="blue")

```

```

legend("topright",c("Mujeres","Hombres"), cex=0.8,
      col=c("red","blue"),lty=1)

#Obtener estimación con kt sin ajustar

##### MUJERES #####
matriz_bx_M<-matrix(c(bx1_M,bx2_M),nrow=m,ncol=2)
matriz_kt_M<-matrix(c(kt1_M,kt2_M),nrow=2,ncol=n,byrow=TRUE)

estimacion_logit_M<-(ax_M_rep+matriz_bx_M%*%matriz_kt_M)
estimacion_M<-exp(estimacion_logit_M)/(1+exp(estimacion_logit_M))

#Residuos como diferencia de logit
residuos_M<-logit_mx_M-estimacion_logit_M

##### HOMBRES #####
matriz_bx_H<-matrix(c(bx1_H,bx2_H),nrow=m,ncol=2)
matriz_kt_H<-matrix(c(kt1_H,kt2_H),nrow=2,ncol=n,byrow=TRUE)

estimacion_logit_H<-(ax_H_rep+matriz_bx_H%*%matriz_kt_H)
estimacion_H<-exp(estimacion_logit_H)/(1+exp(estimacion_logit_H))

#Residuos como diferencia de logit
residuos_H<-logit_mx_H-estimacion_logit_H

##### TOTAL #####
matriz_bx_T<-matrix(c(bx1_T,bx2_T),nrow=m,ncol=2)
matriz_kt_T<-matrix(c(kt1_T,kt2_T),nrow=2,ncol=n,byrow=TRUE)

estimacion_logit_T<-(ax_T_rep+matriz_bx_T%*%matriz_kt_T)
estimacion_T<-exp(estimacion_logit_T)/(1+exp(estimacion_logit_T))

#Residuos como diferencia de logit
residuos_T<-logit_mx_T-estimacion_logit_T

#### Gráfico residuos
matrix.axes <- function(data,h) {
  data<-t(data)
  # Do the rows, las=2 for text perpendicular to the axis
  x <- (1:dim(data)[1] - 1) / (dim(data)[1] - 1)

```

```

axis(side=1, at=x, labels=rownames(data), las=2)
# Do the columns
y <- (1:((dim(data)[2] - 1)/h)) / ((dim(data)[2] - 1)/h)
axis(side=2, at=y, labels=seq(h,100,h), las=2)
}

filled.contour(t(residuos_M),plot.axes=matrix.axes(residuos_M,10),
               main="Residuos LCA2 - Mujeres")
filled.contour(t(residuos_H),plot.axes=matrix.axes(residuos_H,10),
               main="Residuos LCA2 - Hombres")
filled.contour(t(residuos_T),plot.axes=matrix.axes(residuos_T,10),
               main="Residuos LCA2 - Mujeres")

##### Ver comparación real vs estimado (ejemplo edad fija)
edad_ej<-30 #65
pos_ej<-match(edad_ej,data_INE_MHT_obs$age)

min_y_M<-min(data_INE_MHT_obs$rate$female[pos_ej,],
             estimacion_M[pos_ej,])
max_y_M<-max(data_INE_MHT_obs$rate$female[pos_ej,],
             estimacion_M[pos_ej,])

min_y_H<-min(data_INE_MHT_obs$rate$male[pos_ej,],
             estimacion_H[pos_ej,])
max_y_H<-max(data_INE_MHT_obs$rate$male[pos_ej,],
             estimacion_H[pos_ej,])

par(mfrow=c(1,2))
plot(seq(min_year_INE,anno_fin_obs),ylim=c(min_y_M,max_y_M),
     data_INE_MHT_obs$rate$female[pos_ej,],
     col="black",xlab="Años",ylab="Tasas mortalidad",type="l",
     main=paste("Mujeres Edad=",edad_ej))
lines(seq(min_year_INE,anno_fin_obs),estimacion_M[pos_ej,],
      col="red",xlab="Años",ylab="Tasas mortalidad")
legend("topright", c("Real","Modelo"),cex=0.8,
      col=c("black","red"), lty=1)

plot(seq(min_year_INE,anno_fin_obs),ylim=c(min_y_H,max_y_H),
     data_INE_MHT_obs$rate$male[pos_ej,],
     col="black",xlab="Años",ylab="Tasas mortalidad",type="l",
     main=paste("Hombres Edad=",edad_ej))

```

```

lines (seq(min_year_INE, anno_fin_obs), estimacion_H[pos_ej, ],
      col="blue", xlab="Años", ylab="Tasas mortalidad")

legend("topright", c("Real", "Modelo"), cex=0.8,
      col=c("black", "blue"), lty=1)

#Convertir kt's en series temporales para proyectar
kt1_M<-ts(kt1_M, start=c(anno_ini_obs, 1),
         end=c(anno_fin_obs, 1), frequency=1)
kt2_M<-ts(kt2_M, start=c(anno_ini_obs, 1),
         end=c(anno_fin_obs, 1), frequency=1)

kt1_H<-ts(kt1_H, start=c(anno_ini_obs, 1),
         end=c(anno_fin_obs, 1), frequency=1)
kt2_H<-ts(kt2_H, start=c(anno_ini_obs, 1),
         end=c(anno_fin_obs, 1), frequency=1)

kt1_T<-ts(kt1_T, start=c(anno_ini_obs, 1),
         end=c(anno_fin_obs, 1), frequency=1)
kt2_T<-ts(kt2_T, start=c(anno_ini_obs, 1),
         end=c(anno_fin_obs, 1), frequency=1)

#kt se proyecta como arima(0,1,0) con drift

forecast_kt1_M<-forecast(Arima(kt1_M, order=c(0,1,0),
                             include.drift=TRUE), h=anno_proy, level=95)
forecast_kt2_M<-forecast(Arima(kt2_M, order=c(0,1,0),
                             include.drift=TRUE), h=anno_proy, level=95)

forecast_kt1_H<-forecast(Arima(kt1_H, order=c(0,1,0),
                             include.drift=TRUE), h=anno_proy, level=95)
forecast_kt2_H<-forecast(Arima(kt2_H, order=c(0,1,0),
                             include.drift=TRUE), h=anno_proy, level=95)

forecast_kt1_T<-forecast(Arima(kt1_T, order=c(0,1,0),
                             include.drift=TRUE), h=anno_proy, level=95)
forecast_kt2_T<-forecast(Arima(kt2_T, order=c(0,1,0),
                             include.drift=TRUE), h=anno_proy, level=95)

### Gráficos forecast

```

```

par(oma=c(1,1,1,1),mar=c(3,3,2,2),par(mfrow=c(1,2)))
plot(forecast_kt1_M,main=expression("k"[" t1"]), xlab="Años",
     ylab=expression("k"[" t1"]))
plot(forecast_kt2_M,main=expression("k"[" t2"]), xlab="Años",
     ylab=expression("k"[" t2"]))
title("Mujeres", outer=TRUE)

```

```

par(oma=c(1,1,1,1),mar=c(3,3,2,2),par(mfrow=c(1,2)))
plot(forecast_kt1_H,main=expression("k"[" t1"]), xlab="Años",
     ylab=expression("k"[" t1"]))
plot(forecast_kt2_H,main=expression("k"[" t2"]), xlab="Años",
     ylab=expression("k"[" t2"]))
title("Hombres", outer=TRUE)

```

```

#####
##### PROYECCIÓN #####
#####

```

```

##### Series Mujeres (mean, upper, lower)
### Estimación
matriz_kt_M_proy<-matrix(c(c(kt1_M, forecast_kt1_M$mean),
                          c(kt2_M, forecast_kt2_M$mean)),
                       nrow=2, ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
proy_logit_M<- (matrix(rep(ax_manual_M, each=n+anno_proy),
                      ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
               +matriz_bx_M%*%matriz_kt_M_proy)
proy_M<- (exp(proy_logit_M) / (1+exp(proy_logit_M)))

```

```

## IC upper and lower

```

```

kt_M_IC_v1<-matrix(c(c(kt1_M, forecast_kt1_M$upper),
                    c(kt2_M, forecast_kt2_M$upper)),
                  nrow=2, ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
kt_M_IC_v2<-matrix(c(c(kt1_M, forecast_kt1_M$upper),
                    c(kt2_M, forecast_kt2_M$lower)),
                  nrow=2, ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
kt_M_IC_v3<-matrix(c(c(kt1_M, forecast_kt1_M$lower),
                    c(kt2_M, forecast_kt2_M$upper)),
                  nrow=2, ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
kt_M_IC_v4<-matrix(c(c(kt1_M, forecast_kt1_M$lower),
                    c(kt2_M, forecast_kt2_M$lower)),

```

```

nrow=2, ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)

proy_logit_M_v1<- (matrix(rep(ax_manual_M, each=n+anno_proy),
                          ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
                  +matriz_bx_M%*%kt_M_IC_v1)
proy_logit_M_v2<- (matrix(rep(ax_manual_M, each=n+anno_proy),
                          ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
                  +matriz_bx_M%*%kt_M_IC_v2)
proy_logit_M_v3<- (matrix(rep(ax_manual_M, each=n+anno_proy),
                          ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
                  +matriz_bx_M%*%kt_M_IC_v3)
proy_logit_M_v4<- (matrix(rep(ax_manual_M, each=n+anno_proy),
                          ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
                  +matriz_bx_M%*%kt_M_IC_v4)

proy_logit_M_upper<-matrix(rep(0, each=m*(n+anno_proy)),
                          nrow=m, ncol=(n+anno_proy))
proy_logit_M_lower<-matrix(rep(0, each=m*(n+anno_proy)),
                          nrow=m, ncol=(n+anno_proy))

for (i in 1:m)
{
  for (j in 1:(n+anno_proy))
  {
    proy_logit_M_upper[i, j]=max(proy_logit_M_v1[i, j],
                                proy_logit_M_v2[i, j],
                                proy_logit_M_v3[i, j],
                                proy_logit_M_v4[i, j])
    proy_logit_M_lower[i, j]=min(proy_logit_M_v1[i, j],
                                proy_logit_M_v2[i, j],
                                proy_logit_M_v3[i, j],
                                proy_logit_M_v4[i, j])
  }
}

proy_M_upper<- (exp(proy_logit_M_upper) /
               (1+exp(proy_logit_M_upper)))

proy_M_lower<- (exp(proy_logit_M_lower) /
               (1+exp(proy_logit_M_lower)))

```



```

        nrow=2, ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
kt_T_IC_v4<-matrix(c(c(kt1_T, forecast_kt1_T$lower),
        c(kt2_T, forecast_kt2_T$lower)),
        nrow=2, ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)

proy_logit_T_v1<-(matrix(rep(ax_manual_T, each=n+anno_proy),
        ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
        +matriz_bx_T**%kt_T_IC_v1)
proy_logit_T_v2<-(matrix(rep(ax_manual_T, each=n+anno_proy),
        ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
        +matriz_bx_T**%kt_T_IC_v2)
proy_logit_T_v3<-(matrix(rep(ax_manual_T, each=n+anno_proy),
        ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
        +matriz_bx_T**%kt_T_IC_v3)
proy_logit_T_v4<-(matrix(rep(ax_manual_T, each=n+anno_proy),
        ncol=n+anno_proy, byrow=TRUE)
        +matriz_bx_T**%kt_T_IC_v4)

proy_logit_T_upper<-matrix(rep(0, each=m*(n+anno_proy)),
        nrow=m, ncol=(n+anno_proy))
proy_logit_T_lower<-matrix(rep(0, each=m*(n+anno_proy)),
        nrow=m, ncol=(n+anno_proy))

for (i in 1:m)
{
  for (j in 1:(n+anno_proy))
  {
    proy_logit_T_upper[i, j]=max(proy_logit_T_v1[i, j],
        proy_logit_T_v2[i, j],
        proy_logit_T_v3[i, j],
        proy_logit_T_v4[i, j])
    proy_logit_T_lower[i, j]=min(proy_logit_T_v1[i, j],
        proy_logit_T_v2[i, j],
        proy_logit_T_v3[i, j],
        proy_logit_T_v4[i, j])
  }
}

proy_T_upper<-(exp(proy_logit_T_upper)/(1+exp(proy_logit_T_upper)))
proy_T_lower<-(exp(proy_logit_T_lower)/(1+exp(proy_logit_T_lower)))

```

```

##### Gráficos real vs modelo+proyección --> EDAD
edad<-65
pos<-match(edad,data_INE_MHT$age)

M_ymin<-min(data_INE_MHT$rate$female[pos,],estimacion_M[pos,],
            proy_M[pos,],proy_M_upper[pos,],proy_M_lower[pos,])
M_ymax<-max(data_INE_MHT$rate$female[pos,],estimacion_M[pos,],
            proy_M[pos,],proy_M_upper[pos,],proy_M_lower[pos,])

H_ymin<-min(data_INE_MHT$rate$male[pos,],estimacion_H[pos,],
            proy_H[pos,],proy_H_upper[pos,],proy_H_lower[pos,])
H_ymax<-max(data_INE_MHT$rate$male[pos,],estimacion_H[pos,],
            proy_H[pos,],proy_H_upper[pos,],proy_H_lower[pos,])

### Para dibujar con intervalo de confianza
### -> ejecutar "R_funcion_dibujar_forecast_IC"
estr_forecast <- function(serie_original, serie_fitted,
                          proy_mean, proy_upper,
                          proy_lower,anno_ini, anno_fin,ic)
{
  serie_original<-ts(serie_original, start=c(anno_ini, 1),
                    end=c(anno_fin, 1), frequency=1)
  serie_fitted<-ts(serie_fitted, start=c(anno_ini, 1),
                  end=c(anno_fin, 1), frequency=1)
  proy_mean<-ts(proy_mean, start=c((anno_fin+1), 1),
                end=c((anno_fin+length(proy_mean)), 1),
                frequency=1)
  proy_upper<-ts(proy_upper, start=c((anno_fin+1), 1),
                 end=c((anno_fin+length(proy_upper)), 1),
                 frequency=1)
  proy_lower<-ts(proy_lower, start=c((anno_fin+1), 1),
                 end=c((anno_fin+length(proy_lower)), 1),
                 frequency=1)
  proy_upper<-ts(proy_upper, start=c((anno_fin+1), 1),
                 end=c((anno_fin+length(proy_upper)), 1),
                 frequency=1)
  proy_lower<-ts(proy_lower, start=c((anno_fin+1), 1),
                 end=c((anno_fin+length(proy_lower)), 1),
                 frequency=1)

  # Residuos
  residuos=serie_original-serie_fitted

```

```

# Construir lista con datos de salida
output <- list(level=ic,mean=proy_mean, lower=proy_lower,
              upper=proy_upper,x=serie_original,
              fitted=serie_fitted,
              residuals=residuos)
# Valores función con formato forecast
return(structure(output, class='forecast'))
}

model_IC_M<-estr_forecast (
  serie_original=data_INE_MHT_obs$rate$female[pos,],
  serie_fitted = estimacion_M[pos,],
  proy_mean = proy_M[pos, (n+1):(n+anno_proy)],
  proy_upper = proy_M_upper[pos, (n+1):(n+anno_proy)],
  proy_lower = proy_M_lower[pos, (n+1):(n+anno_proy)],1991,2010,95)

model_IC_H<-estr_forecast (
  serie_original=data_INE_MHT_obs$rate$male[pos,],
  serie_fitted = estimacion_H[pos,],
  proy_mean = proy_H[pos, (n+1):(n+anno_proy)],
  proy_upper = proy_H_upper[pos, (n+1):(n+anno_proy)],
  proy_lower = proy_H_lower[pos, (n+1):(n+anno_proy)],1991,2010,95)

par(mfrow=c(1,2))
par(oma=c(1,1,1,1))
par(mar=c(1,2,2,1) )
plot(model_IC_M,col="black",fcol="red",shadecols=gray((9:1)/10),
      main=paste("Mujeres edad=",edad))
lines(x=seq(min_year_INE,max_year_INE),
      y=data_INE_MHT$rate$female[pos,],
      xlab="Años",ylab="Tasas mortalidad", col="black",type="l",
      main=paste("Mujeres edad=",edad),ylim=c(M_ymin,M_ymin))
lines(x=seq(min_year_INE,anno_fin_obs),y=estimacion_M[pos,],
      xlab="Años",ylab="Tasas mortalidad",col="red")

legend("topright", c("Real","Modelo Mujeres", "Intervalo confianza"),
      cex=0.8,bty = "n",col=c("black","red",NA), lty=c(1,1,NA),
      density=c(0,0,200),fill=c("black","red","gray"),
      border = c(NA,NA,"gray"),merge = TRUE)

plot(model_IC_H,col="black",fcol="blue",shadecols=gray((9:1)/10),
      main=paste("Hombres edad=",edad))

```

```

lines(x=seq(min_year_INE,max_year_INE),
      y=data_INE_MHT$rate$male[pos,],
      xlab="Años",ylab="Tasas mortalidad", col="black",type="l",
      main=paste("Hombres edad=",edad),ylim=c(H_ymin,H_ymin))
lines(x=seq(min_year_INE,anno_fin_obs),y=estimacion_H[pos,],
      xlab="Años",ylab="Tasas mortalidad",col="blue")

legend("topright", c("Real","Modelo Hombres", "Intervalo confianza"),
      cex=0.8,bty = "n",col=c("black","blue",NA), lty=c(1,1,NA),
      density=c(0,0,200),fill=c("black","red","gray"),
      border = c(NA,NA,"gray"),merge = TRUE)

```

```

##### Gráficos real vs modelo+proyección --> AÑO
anno_graf<-2016

```

```

pos_anno<-match(anno_graf,data_INE_MHT$year)

```

```

M_ymin<-min(log(data_INE_MHT$rate$female[,pos_anno]),
            log(proy_M[,pos_anno]),log(proy_M_upper[,pos_anno]),
            log(proy_M_lower[,pos_anno]))

```

```

M_ymax<-max(log(data_INE_MHT$rate$female[,pos_anno]),
            log(proy_M[,pos_anno]),log(proy_M_upper[,pos_anno]),
            log(proy_M_lower[,pos_anno]))

```

```

H_ymin<-min(log(data_INE_MHT$rate$male[,pos_anno]),
            log(proy_H[,pos_anno]),log(proy_H_upper[,pos_anno]),
            log(proy_H_lower[,pos_anno]))

```

```

H_ymax<-max(log(data_INE_MHT$rate$male[,pos_anno]),
            log(proy_H[,pos_anno]),log(proy_H_upper[,pos_anno]),
            log(proy_H_lower[,pos_anno]))

```

```

### Para dibujar con intervalo de confianza
#-> ejecutar "R_funcion_dibujar_forecast_IC"

```

```

model_IC_M_anno<-estr_forecast(
  serie_original= 0,#data_INE_MHT_obs$rate$female[,anno_graf],
  serie_fitted = 0, #estimacion_M[,anno_graf],
  proy_mean = log(proy_M[,pos_anno]),
  proy_lower = log(proy_M_lower[,pos_anno]),-1,-1,95)

```

```

model_IC_H_anno<-estr_forecast(

```

```

serie_original=0,#data_INE_MHT_obs$rate$male[pos,],
serie_fitted = 0,#estimacion_H[pos,],
proy_mean = log(proy_H[,pos_anno]),
proy_upper = log(proy_H_upper[,pos_anno]),
proy_lower = log(proy_H_lower[,pos_anno]),-1,-1,95)

par(mfrow=c(1,1))
plot(model_IC_M_anno,include=0,col="black",fcol="red",flwd=1.5,
      shadecols=gray((9:1)/10), main=paste("Año=",anno_graf),
      ylim=c(M_ymin,M_ymax))
lines(x=seq(0,100),y=log(data_INE_MHT$rate$female[,pos_anno]),
      xlab="Años",ylab="Log tasas mortalidad", col="black",
      type="l", main=paste("Año=",anno_graf),ylim=c(M_ymin,M_ymax))

legend("topleft", c("Real","Modelo Mujeres","Intervalo confianza"),
      cex=0.8,bty = "n",col=c("black","red",NA), lty=c(1,1,NA),
      density=c(0,0,200),fill=c("black","red","gray"),
      border = c(NA,NA,"gray"),merge = TRUE)

plot(model_IC_H_anno,include=0,col="black",fcol="blue",flwd=1.5,
      shadecols=gray((9:1)/10), main=paste("Año=",anno_graf),
      ylim=c(H_ymin,H_ymax))
lines(x=seq(0,100),y=log(data_INE_MHT$rate$male[,pos_anno]),
      xlab="Años",ylab="Log tasas mortalidad", col="black",type="l",
      main=paste("Año=",anno_graf),ylim=c(H_ymin,H_ymax))

legend("topleft", c("Real","Modelo Hombres","Intervalo confianza"),
      cex=0.8,bty = "n",col=c("black","blue",NA), lty=c(1,1,NA),
      density=c(0,0,200),fill=c("black","blue","gray"),
      border = c(NA,NA,"gray"),merge = TRUE)

```

ANEXO D

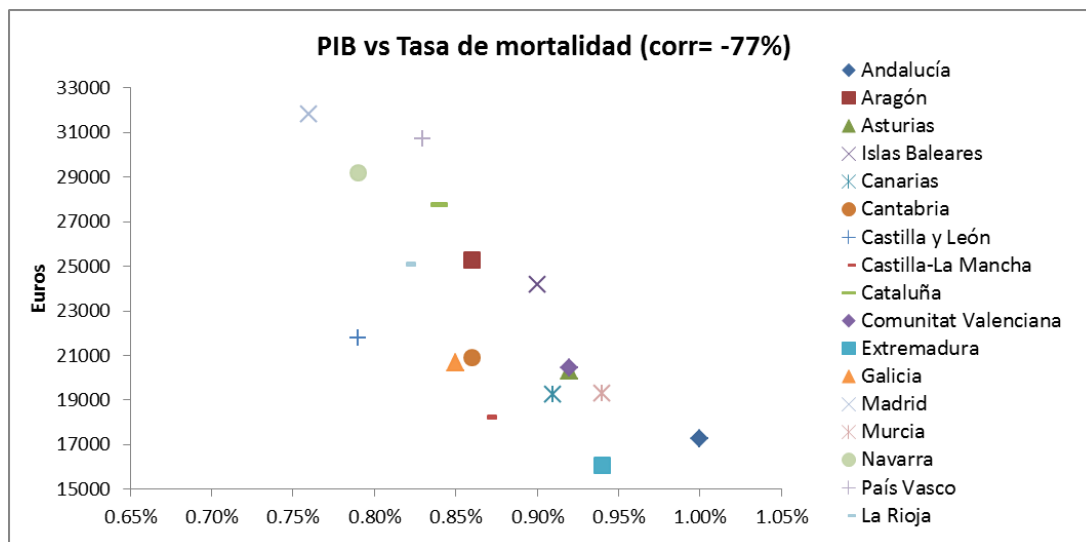


Figura D.1. Relación entre PIB y tasas de mortalidad por CCAA (2015) Fuente: INE; Elaboración propia.

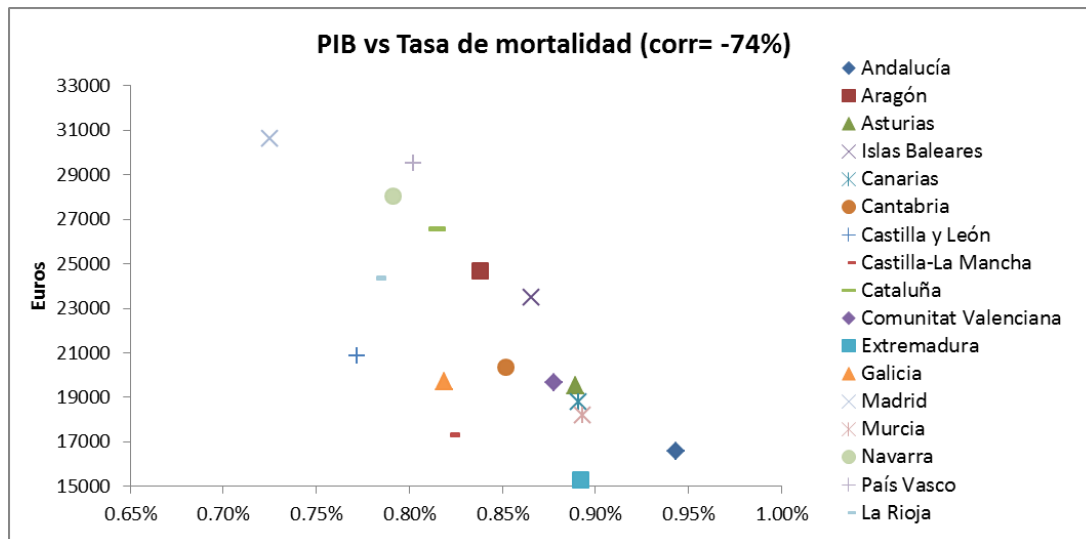


Figura D.2. Relación entre PIB y tasas de mortalidad por CCAA (2014) Fuente: INE; Elaboración propia.

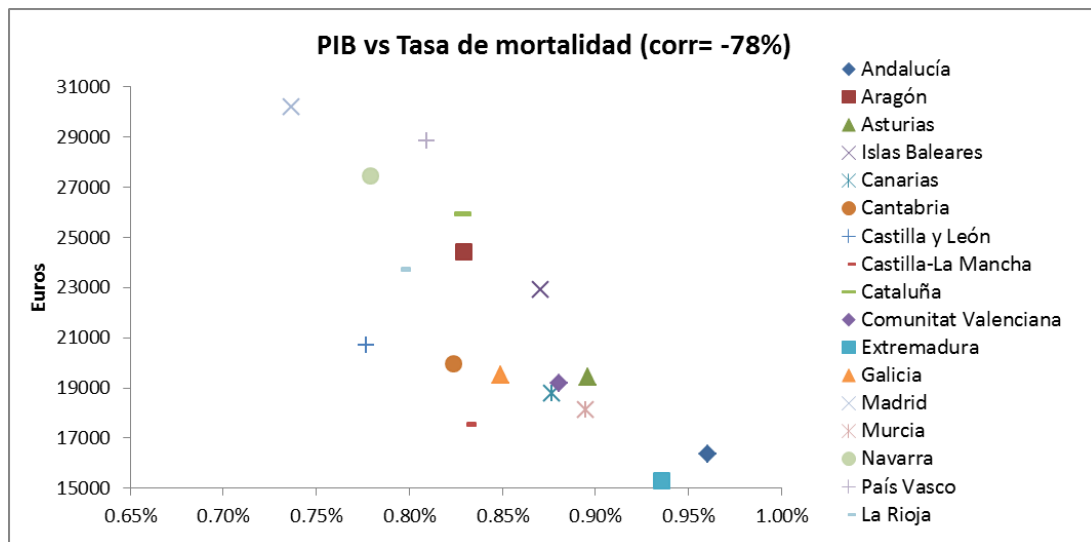


Figura D.3. Relación entre PIB y tasas de mortalidad por CCAA (2013) Fuente: INE; Elaboración propia.

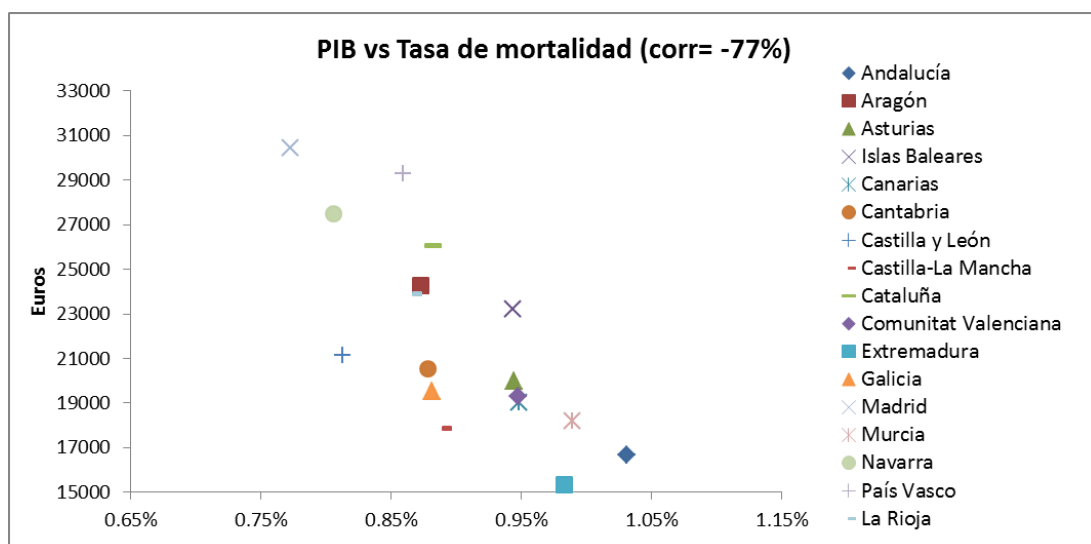


Figura D.4. Relación entre PIB y tasas de mortalidad por CCAA (2013) Fuente: INE; Elaboración propia.