1

Probabilidad de muerte y supervivencia

1.1 Introducción

Dada una persona de edad x (o *cabeza de edad* x, en terminología actuarial), que a partir de ahora representaremos por (x), no cabe duda de que los sucesos *"fallecer antes de cumplir la edad $x + t$"* o *"sobrevivir a la edad $x + t$"*son aleatorios. La determinación de las probabilidades de estos y de otros sucesos relativos a la vida humana debe constituir el punto de partida de la construcción de la matemática de los seguros de vida.

1.2 Principales variables aleatorias

Para realizar un estudio riguroso de las probabilidades de muerte y supervivencia hemos de referirnos a algunas variables aleatorias y a su distribución de probabilidad. Este es el objetivo del siguiente apartado.

1.2.1 Edad de muerte de un recién nacido

Denotamos por X a la variable aleatoria "*edad de muerte de un recién nacido*", que suponemos continua. Representando por F a su función de distribución, tendremos

$$F(x) = P(X \leq x) \tag{1.1}$$

donde $x \geq 0$ y $F(0) = 0$.

Conocida F pueden determinarse fácilmente las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que un recién nacido fallezca entre las edades x y $x + t$,

$$P(x < X \leq x + t) = F(x + t) - F(x). \tag{1.2}$$

b) Probabilidad de que un recién nacido sobreviva a la edad x,

$$P(X > x) = 1 - F(x) \tag{1.3}$$

c) Probabilidad de que una persona de edad x fallezca entre las edades x y $x+t$,

$$P(x < X \leq x+t \;/\; X > x) = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \tag{1.4}$$

1.2.2 Edad de muerte de una persona de edad x

Representando por Y_x a la citada variable aleatoria y por F_x a su función de distribución, tenemos que

$$F_x(y) = P(Y_x \leq y) = \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)}, \quad y \geq x \tag{1.5}$$

Evidentemente $F_x(y) = 0$ cuando $y < x$.

Notemos que

$$F_x(x+t) = P(x < X \leq x+t \;/\; X > x)$$

por lo que basta disponer de la función de distribución de la edad de muerte de un recién nacido para obtener, a partir de ella, la función de distribución F_x cualquiera que sea el valor de x.

1.2.3 Función de supervivencia

La función de supervivencia es aquella que para cada edad x nos proporciona la probabilidad de que un recién nacido alcance con vida dicha edad, esto es,

$$s(x) = P(X > x) = 1 - F(x) \quad x \geq 0, \tag{1.6}$$

Ciertamente $s(0) = 1$.

Mediante la función de supervivencia es fácil expresar las siguientes probabilidades

$$P(x < X \leq x+t) = s(x) - s(x+t) \tag{1.7}$$

$$P(x < X \leq x+t/X > x) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \quad t \geq 0 \tag{1.8}$$

Además, supuesto que X sea una variable aleatoria continua, su función de densidad vendrá dada por

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{ds(x)}{dx} = -s'(x) \tag{1.9}$$

1.2.4 Vida residual

Dada una persona de edad x, su *vida residual* o bien su *tiempo de vida hasta la muerte* es otra variable aleatoria que representaremos por T_x. Siendo G_x su función de distribución, tendremos que

$$G_x(t) = P(T_x \leq t) \quad t \geq 0 \tag{1.10}$$

es la probabilidad de que una persona viva a la edad x fallezca en el transcurso de t años, esto es, antes de cumplir la edad $x + t$.

Es claro que $T_x = Y_x - x$ y que $T_0 = X$. Además,

$$G_x(t) = F_x(x+t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \tag{1.11}$$

y

$$G_0(t) = F(t)$$

Siendo T_x una variable aleatoria continua, su función de densidad es

$$g_x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}\right) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} \tag{1.12}$$

1.2.5 Número de años completos de vida hasta la muerte

Definamos ahora la variable aleatoria discreta *número de años completos de vida hasta la muerte de una persona de edad x*, que representaremos por K_x.

$$P(K_x = k) = P(k < T_x \leq k+1) \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{1.13}$$

Por ser T_x continua, no importa el carácter estricto o no estricto de las desigualdades anteriores. Ciertamente

$$P(K_x = k) = G_x(k+1) - G_x(k) \tag{1.14}$$

y, empleando la función de supervivencia,

$$P(K_x = k) = \frac{s(x) - s(x+k+1)}{s(x)} - \frac{s(x) - s(x+k)}{s(x)} = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} \tag{1.15}$$

para k entero no negativo.

1.3 Probabilidades básicas de muerte y supervivencia

En este apartado nos referiremos de nuevo a algunas de las probabilidades básicas de muerte y supervivencia que ya hemos establecido anteriormente, pero empleando la notación actuarial internacional. Partiremos de la variable aleatoria vida residual, cuya función de distribución supondremos conocida.

a) ${}_tp_x$: probabilidad de que una cabeza de edad x alcance con vida la edad $x+t$:

$$ {}_tp_x = P(T_x > t) = 1 - G_x(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} \tag{1.16} $$

Para $t = 1$ tenemos la probabilidad de que una cabeza de edad x alcance con vida la edad $x+1$. Esta probabilidad se representa por p_x, omitiendo el valor de t, y se denomina *tanto de supervivencia a la edad x.*

b) ${}_tq_x$: probabilidad de que una cabeza de edad x fallezca antes de alcanzar la edad $x+t$:

$$ {}_tq_x = P(T_x \leq t) = G_x(t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \tag{1.17} $$

Cuando t=1 tenemos la probabilidad de que una cabeza de edad x fallezca antes de la edad x+1, que se representa mediante q_x y se denomina *tanto de mortalidad a la edad x.* Es claro que

$$ {}_tp_x + {}_tq_x = 1 $$

c) ${}_{s/t}q_x$: probabilidad de que una persona de edad x fallezca entre las edades $x+s$ y $x+s+t$.

$$ {}_{s/t}q_x = P(s < T_x \leq s+t) = G_x(s+t) - G_x(s) = \frac{s(x+s) - s(x+s+t)}{s(x)} \tag{1.18} $$

Para $t = 1$ tenemos la probabilidad de que una persona de edad x fallezca entre las edades $x+s$ y $x+s+1$, que se representa por ${}_{s/}q_x$.

Obtendremos a continuación algunas sencillas propiedades de las anteriores probabilidades:

1.

$$ {}_{s+t}p_x = \frac{s(x+s+t)}{s(x)} = \frac{s(x+s).s(x+s+t)}{s(x).s(x+s)} = {}_sp_x \ {}_tp_{x+s} \tag{1.19} $$

esto es, la probabilidad de que una cabeza de edad x alcance con vida la edad $x+s+t$ es igual a la probabilidad de que (x) alcance la edad $x+s$ por la de que $(x+s)$ alcance con vida la edad $x+s+t$. Ciertamente para t entero y positivo

$$ {}_tp_x = p_x \; p_{x+1} ...... p_{x+t-1} \tag{1.20} $$

2.

$$ {}_{s/t}q_x = \frac{s(x+s) - s(x+s+t)}{s(x)} = \frac{(s(x+s) - s(x+s+t))\; s(x+s)}{s(x).s(x+s)} = $$

$$ = \frac{s(x+s)}{s(x)} \frac{s(x+s) - s(x+s+t)}{s(x+s)} = {}_sp_x \; {}_tq_{x+s} \tag{1.21} $$

esto es, la probabilidad de que (x) fallezca entre las edades $x+s$, $x+s+t$ es igual a la probabilidad de que (x) alcance con vida la edad $x+s$ por la probabilidad de que $(x+s)$ fallezca antes de alcanzar la edad $x+s+t$.

3. Recordando ahora la variable aleatoria K_x, número de años completos de vida hasta la muerte de una persona de edad x, tenemos (siempre para valores no negativos y enteros de k):

$$ P(K_x = k) = G_x(k+1) - G_x(k) = {}_{k/}q_x = {}_kp_x \; q_{x+k} \tag{1.22} $$

1.4 Tanto instantáneo de mortalidad

Definiremos a continuación uno de los elementos clave de la matemática de los seguros de vida: el *tanto instantáneo de mortalidad* o *fuerza de mortalidad.*

Sabemos que la probabilidad de que una persona de edad x fallezca entre las edades x y x' es

$$ P(x < X \leq x' \;/\; X > x) = \frac{F(x') - F(x)}{1 - F(x)} $$

Puesto que X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, y suponiendo que x' es una edad muy cercana a x, esta probabilidad puede aproximarse por

$$ \frac{f(x)\; (x' - x)}{1 - F(x)} $$

El *tanto instantáneo de mortalidad* a la edad x (o *fuerza de mortalidad* a la edad x), que se representa por μ_x, se define como

$$ \mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \tag{1.23} $$

Ciertamente $\mu_x \geq 0$.

Teniendo en cuenta que $f(x) = -s'(x)$, es claro que

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{dLn(s(x))}{dx} \tag{1.24}$$

Observación 1 *De la definición anterior podría deducirse que μ_x representa la probabilidad de que una persona de edad x fallezca entre las edades x, $x+1$ (esto es, cuando $x' = x+1$). Es importante hacer notar que esto no es cierto, basta tener en cuenta que en muchas ocasiones $\mu_x > 1$. Es importante insistir en que sólo cabe, para Δx suficientemente cercano a cero, interpretar $\mu_x\, \Delta x$ como la probabilidad de que una persona de edad x fallezca entre las edades x y $x + \Delta x$.*

Observación 2 *El tanto instantáneo de mortalidad a la edad $x+t$ es igual a*

$$\mu_{x+t} = \frac{f(x+t)}{s(x+t)}$$

Basta dividir por $s(x)$ el numerador y denominador para obtener

$$\mu_{x+t} = \frac{g_x(t)}{1 - G_x(t)} \tag{1.25}$$

expresión que se puede interpretar también como la fuerza de mortalidad de (x) a la edad $x+t$. Asimismo resulta claro que (véase ejercicio 1.3)

$$\mu_{x+t} = -\frac{dLn({}_tp_x)}{dt} \tag{1.26}$$

Conocido el tanto instantáneo de mortalidad es posible expresar las probabilidades definidas en los epígrafes anteriores en función de éste. Veamos algunos casos.

1. Expresemos ${}_tp_x$ y ${}_tq_x$ en función del tanto instantáneo de mortalidad:Ya que

$$\mu_z = -\frac{dLn(s(z))}{dz}$$

integrando

$$\int_x^{x+t} \mu_z dz = -\int_x^{x+t} \frac{dLn(s(z))}{dz} dz$$

así

$$-\int_x^{x+t} \mu_z dz = Ln(s(x+t)) - Ln(s(x)) = Ln\frac{s(x+t)}{s(x)} = Ln(\ {}_tp_x)$$

por lo que

$$_tp_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_z dz} \tag{1.27}$$

asimismo

$$_tq_x = 1 - e^{-\int_x^{x+t} \mu_z dz} \tag{1.28}$$

y haciendo en esta expresión el cambio de variable $s = z - x$, se obtiene con facilidad

$$_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \tag{1.29}$$

y

$$_tq_x = 1 - e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \tag{1.30}$$

2. Expresemos ahora la función de densidad de T_x (vida residual de (x)) en función del tanto instantáneo. Sabemos que

$$g_x(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)}$$

multiplicando y dividiendo por s(x+t) tenemos,

$$g_x(t) = -\frac{s(x+t)}{s(x)}\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \, _tp_x \, \mu_{x+t} \tag{1.31}$$

Tasa central de mortalidad

En relación con el tanto instantáneo de mortalidad se define la *tasa central de mortalidad* a la edad x (o entre las edades x , $x+1$), que representaremos mediante m_x, como la media de μ_x ponderada por la función de supervivencia en dicho intervalo, esto es,

$$m_x = \frac{\int_x^{x+1} \mu_z \; s(z) \; dz}{\int_x^{x+1} s(z) \; dz} \tag{1.32}$$

Realizando el cambio de variable $s = z - x$, y posteriormente dividiendo el numerador y denominador por $s(x)$, tenemos elementalmente

$$m_x = \frac{\int_0^1 \mu_{x+s} \; s(x+s) \; ds}{\int_0^1 s(x+s) \; ds} = \frac{\int_0^1 \mu_{x+s} \; \frac{s(x+s)}{s(x)} \; ds}{\int_0^1 \frac{s(x+s)}{s(x)} ds} = \frac{\int_0^1 \; _sp_x \; \mu_{x+s} \; ds}{\int_0^1 \; _sp_x ds} \tag{1.33}$$

Asimismo la tasa central de mortalidad entre las edades x y $x+n$ es

$$_nm_x = \frac{\int_x^{x+n} \mu_z \; s(z) \; dz}{\int_x^{x+n} s(z) \; dz} = \frac{\int_0^n \; _sp_x \; \mu_{x+s} \; ds}{\int_0^n \; _sp_x ds} \tag{1.34}$$

1.5 Esperanza de vida

Obtendremos a continuación los primeros momentos de las variables aleatorias T_x y K_x. De ahora en adelante aceptaremos la existencia de una *edad límite* ω tal que $s(x) = 0$ para $x \geq \omega$, lo que nos facilitará el cálculo de los citados momentos, cuya existencia depende de la convergencia de integrales impropias y de series numéricas.

1.5.1 Esperanza de vida completa

La esperanza matemática de T_x se denomina *esperanza de vida* (o *vida media*) *completa* y se representa por $\overset{o}{e}_x$.

$$\overset{o}{e}_x = E(T_x) = \int_0^{+\infty} t\ g_x(t)\ dt$$

integrando por partes, tomando

$$u = t \quad y \quad v = -(1 - G_x(t)),$$

tenemos

$$du = dt \quad y \quad dv = g_x(t)\ dt$$

por lo que

$$\overset{o}{e}_x = E(T_x) = \int_0^{+\infty} t\ g_x(t)dt = -t(1 - G_x(t))]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (1 - G_x(t))\ dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} {}_tp_x dt \tag{1.35}$$

ya que

$$1 - G_x(t) = {}_tp_x \quad y \quad \lim_{t \to +\infty} t\ (1 - G_x(t)) = 0$$

Notemos que para $t \geq \omega - x$, $G_x(t) = 1$.

Procediendo de forma análoga se calcula la varianza de T_x. Es fácil comprobar que

$$E(T_x^2) = \int_0^{+\infty} t^2\ g_x(t)dt = 2\int_0^{+\infty} t\ {}_tp_x\ dt$$

por lo que

$$Var(T_x) = E(T_x^2) - (E(T_x))^2 = 2\int_0^{+\infty} t\ {}_tp_x dt - \left(\int_0^{+\infty} {}_tp_x\ dt\right)^2 \tag{1.36}$$

Obsérvese que la existencia de una edad límite garantiza la convergencia de todas las integrales anteriores.

1.5.2 Esperanza de vida abreviada

Calculemos ahora la esperanza matemática de K_x (número de años completos de vida hasta la muerte). Se denomina *esperanza de vida abreviada* y se representa por e_x.

$$e_x = E(K_x) = \sum_{k=0}^{\infty} k\ P(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\ \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} =$$

$$= \frac{(s(x+1) - s(x+2)) + 2\ (s(x+2) - s(x+3)) + 3\ (s(x+3) - s(x+4)) + ..}{s(x)} =$$

$$= \frac{s(x+1) + s(x+2) + s(x+3) + \cdots}{s(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\ {}_{k+1}p_x \tag{1.37}$$

De nuevo la existencia de la edad límite asegura la convergencia de estas series.

Procediendo de forma análoga tenemos que

$$E(K_x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\ P(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\ \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\ {}_{k+1}p_x$$

Por lo que

$$Var(K_x) = E(K_x^2) - E(K_x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\ {}_{k+1}p_x - \left(\sum_{k=0}^{\infty}\ {}_{k+1}p_x\right)^2 \tag{1.38}$$

1.6 Modelos de supervivencia

Hemos visto en apartados anteriores que las probabilidades básicas de muerte y supervivencia pueden calcularse con facilidad a partir de la ley de mortalidad (o tanto instantáneo de mortalidad) μ_x. Este hecho ha provocado que los estadísticos y demógrafos hayan dedicado grandes esfuerzos a la búsqueda de una ley de mortalidad que sea válida para cualquier población humana, quizás motivados por el éxito de las leyes físicas en la explicación de los fenómenos naturales. Este esfuerzo ha resultado vano, y no ha sido posible encontrar esa ley universal de mortalidad, que probablemente no existe.

Por otra parte, los modernos ordenadores hacen posible calcular con facilidad las citadas probabilidades básicas sin necesidad de contar con dicha ley. Sin embargo, *a veces es posible el ajuste de alguna ley teórica (típicamente, la ley de Makeham) en algunas poblaciones y para ciertos tramos de edad*, lo que hace interesante su estudio. A continuación comentamos dicha ley de Makeham, así como otras leyes de más difícil aplicación pero interesantes por su simplicidad o por su importancia histórica (*leyes Exponencial, de De Moivre y de Gompertz*). La exposición de las leyes de mortalidad clásicas no pretende ser exhaustiva, ya que existen muchas más leyes teóricas de mortalidad, de las que sólo mencionaremos dos (*leyes de Pareto y Weibull*) en los problemas del final del capítulo.

1.6.1 Ley exponencial

Esta ley supone que el tanto instantáneo de mortalidad es constante, esto es,

$$\mu_x = \mu \qquad x \geq 0 \tag{1.39}$$

Intuitivamente es claro que la fuerza de mortalidad debe aumentar con la edad, lo que implica la imposibilidad de ajustar una ley exponencial a una población real, salvo quizás en periodos de tiempo muy cortos. Sin embargo, la simplicidad de la ley exponencial y la facilidad de los cálculos, así como su importancia histórica (véase el siguiente capítulo), nos lleva a comentarla en primer lugar.

Obtengamos su función de supervivencia:

$$s(x) = \ _xp_0 = e^{-\int_0^x \mu\, dz} = e^{-\mu . x} \tag{1.40}$$

Como sabemos, a partir de la función de supervivencia es posible obtener todas las distribuciones y probabilidades básicas. Así:

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{e^{-\mu\ (x+t)}}{e^{-\mu x}} = e^{-\mu\ t} \tag{1.41}$$

$$_tq_x = 1 - e^{-\mu\ t}$$

Obsérvese que la probabilidad de supervivencia durante t años (o de muerte antes de dicha edad) sólo depende de t y no de la edad x del individuo, lo que obviamente no se verifica en la realidad.

La función de distribución de la variable vida residual es, obviamente,

$$G_x(t) = \ _tq_x = 1 - e^{-\mu\ t} \tag{1.42}$$

y la correspondiente función de densidad,

$$g_x(t) = \frac{d}{dt}G_x(t) = \mu\ e^{-\mu\ t} \tag{1.43}$$

Obsérvese que la vida residual resulta ser una variable aleatoria exponencial, lo que justifica que esta ley de mortalidad sea conocida como ley exponencial.

La función de cuantía de la variable número de años completos de vida hasta la muerte es:

$$P(K_x = k) = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = \frac{e^{-\mu\ (x+k)} - e^{-\mu\ (x+k+1)}}{e^{-\mu.x}} =$$

$$= e^{-\mu.k}\ (1 - e^{-\mu}) \tag{1.44}$$

La esperanza de vida completa:

$$\overset{o}{e}_x = E(T_x) = \int_0^\infty t\ g_x(t)\ dt = \int_0^\infty t\ \mu.e^{-\mu t}\ dt = \frac{1}{\mu} \tag{1.45}$$

Y la esperanza de vida abreviada:

$$e_x = E(K_x) = \sum_{k=0}^{\infty} k\ P(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\infty}\ {}_{k+1}p_x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\mu})^{(k+1)} = \frac{e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}} \tag{1.46}$$

Obsérvese que la esperanza de vida de los individuos no depende de su edad, lo que claramente no es cierto en la realidad.

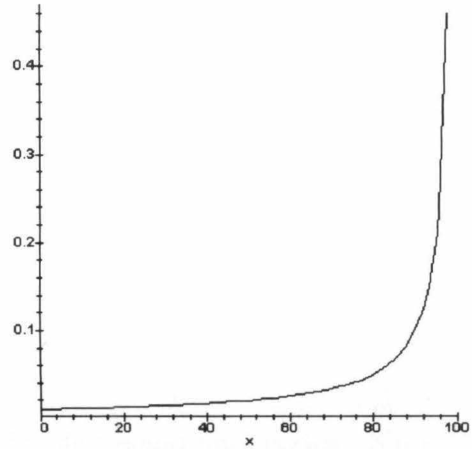
1.6.2 Ley de De Moivre

Como hemos comentado anteriormente, intuitivamente resulta claro que la fuerza de mortalidad debe aumentar con la edad. La ley de De Moivre incorpora este efecto mediante una fórmula matemática sencilla.

El tanto instantáneo de mortalidad es, para esta ley,

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x} \qquad x \geq 0 \tag{1.47}$$

en la que ω es la edad límite. Es claro que la fuerza de mortalidad tiende a infinito conforme la edad tiende a la edad límite.Por ejemplo, para $\omega = 100$ la representación gráfica de la función es:



Ley de De Moivre.

Obtengamos, en primer lugar la función de supervivencia. Es claro que

$$s(x) = {}_xp_0 = e^{-\int_0^x \mu_z dz} = e^{-\int_0^x \frac{1}{\omega-z}dz} = e^{Ln(\omega-z)]_0^x} = \frac{\omega-x}{\omega} = 1-\frac{x}{\omega}$$

A partir de la función de supervivencia es posible obtener todas las distribuciones y probabilidades básicas. Así:

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{\frac{\omega-x-t}{\omega}}{\frac{\omega-x}{\omega}} = \frac{\omega-x-t}{\omega-x} = 1-\frac{t}{\omega-x}$$

La función de distribución de la variable vida residual resulta ser:

$$G_x(t) = {}_tq_x = \frac{t}{\omega-x} \tag{1.48}$$

y la correspondiente función de densidad:

$$g_x(t) = \frac{d}{dt}G_x(t) = \frac{1}{\omega-x} \tag{1.49}$$

La función de cuantía de la variable número de años completos de vida hasta la muerte:

$$P(K_x=k) = \frac{s(x+k)-s(x+k+1)}{s(x)} = \frac{\frac{\omega-x-k}{\omega}-\frac{\omega-x-k-1}{\omega}}{\frac{\omega-x}{\omega}} = \frac{1}{\omega-x} \tag{1.50}$$

La esperanza de vida completa:

$$\overset{o}{e}_x = E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t\ g_x(t)\ dt = \int_0^{\omega-x} \frac{t}{\omega-x} dt = \frac{t^2}{2(\omega-x)}]_0^{\omega-x} = \frac{\omega-x}{2} \quad (1.51)$$

Y la esperanza de vida abreviada:

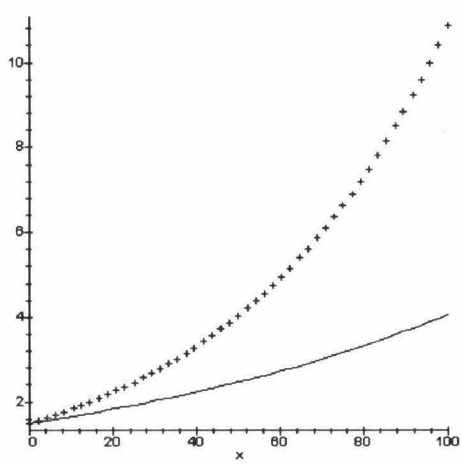
$$e_x = E(K_x) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k\ P(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k\ \frac{1}{\omega-x} = \frac{\omega-x-1}{2} \quad (1.52)$$

Como vemos, la ley de De Moivre resulta más adecuada que la exponencial para la representación de la mortalidad real, ya que en las fórmulas anteriores aparecen las dos variables t y x. Sin embargo, la vida residual asociada con esta ley resulta ser una variable aleatoria uniforme, lo que claramente no se verifica en la realidad. Por esta razón son escasas las posibles aplicaciones prácticas de esta ley (salvo para periodos cortos de tiempo), que sin embargo tiene gran importancia histórica, como veremos en el siguiente capítulo.

1.6.3 Ley de Gompertz

Esta ley asume que cada individuo presenta una resistencia a las enfermedades que resulta decreciente con la edad, por lo cual la fuerza de mortalidad crece con la edad. Se asume asimismo que el crecimiento relativo de la fuerza de mortalidad (es decir, $\frac{\mu'_x}{\mu_x}$) es constante, de donde se deduce que dicha fuerza de mortalidad crece exponencialmente, es decir, viene dada por la expresión

$$\mu_x = B.c^x \quad x \geq 0,\ B > 0,\ c > 1 \quad (1.53)$$



Leyes de Gompertz para $B = 1.5$, y dos valores $c = 1.01$ (++), $c = 1.02$ (—).

Su función de supervivencia es

$$s(x) = {}_xp_0 = e^{-\int_0^x B.c^z\, dz} = e^{\frac{B}{Lnc}(1-c^x)} = g^{c^x-1} \tag{1.54}$$

donde

$$g = e^{-\frac{B}{Lnc}}$$

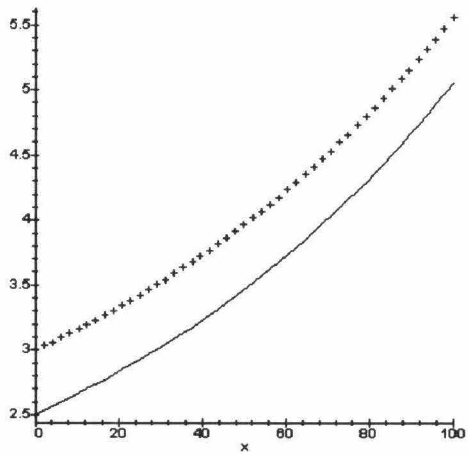
luego obtenemos que

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{g^{c^{(x+t)}-1}}{g^{c^x-1}} = g^{c^x(c^t-1)} \tag{1.55}$$

1.6.4 Ley de Makeham

Como hemos comentado anteriormente, a menudo se obtienen buenos ajustes de la ley de Makeham (o de leyes parecidas, "tipo Makeham") en ciertos tramos de edad. El tanto instantáneo de mortalidad de una ley de Makeham añade simplemente una constante arbitraria (que representa la mortalidad accidental, independiente de la edad) al tanto instantáneo de Gompertz:

$$\mu_x = A + B.c^x \quad x \geq 0,\ B > 0,\ c > 1,\ A > -B \tag{1.56}$$



Leyes de Makeham $B = 1.5, c = 1.01$, para $A = 1$ (—), $A = 1.5$ (++).

Su función de supervivencia es

$$s(x) = {}_xp_0 = e^{-\int_0^x A+B\ c^z\, dz} = e^{-Ax+\frac{B}{Lnc}(1-c^x)} = s^x\ g^{c^x-1} \tag{1.57}$$

siendo

$$s = e^{-A} \quad y \quad g = e^{-\frac{B}{Lnc}}$$

y, evidentemente,

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{s^{x+t} g^{c^{(x+t)}-1}}{s^x g^{c^x - 1}} = s^t \; g^{c^x (c^t - 1)} \tag{1.58}$$

Es claro que la ley de Makeham solamente resulta adecuada para edades adultas, ya que en las edades infantiles la mortalidad es decrececiente.

1.7 Ejercicios

1.- a) Razone las condiciones que debe cumplir una función para que pueda ser considerada como una función de supervivencia.

b) Indique si las funciones propuestas pueden representar una función de supervivencia:

b.1)

$$s(x) = e^{-x^3}, \quad x \geq 0$$

b.2)

$$s(x) = 1 - \frac{x^2}{10000}, \quad 0 \leq x \leq 100$$

b.3)

$$s(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^4, \quad x \geq 0$$

Solución:

a)

Recordemos que la función de supervivencia se define como

$$s(x) = 1 - F(x)$$

siendo $F(x)$ la función de distribución de la variable aleatoria X, edad de muerte de un recién nacido. Como toda función de distribución, $F(x)$ debe cumplir tres propiedades:

* $F(x)$ debe ser no decreciente.

* $F(x)$ debe ser continua por la derecha.

* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Puesto que la variable X solamente toma valores positivos, la condición $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ debe sustituirse por $F(0) = 0$.

En consecuencia, la función de supervivencia $s(x)$ deberá cumplir las siguientes propiedades:

* $s(x)$ debe ser no creciente.

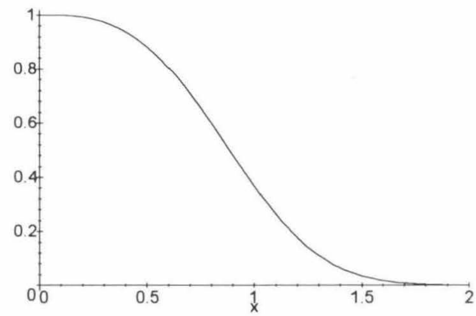
* $s(x)$ debe ser continua por la derecha.

* $s(0) = 1$ y $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

b)

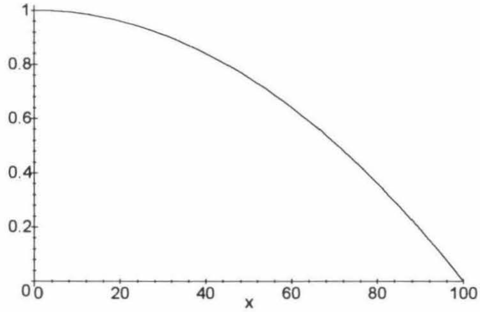
Representemos las gráficas de las tres funciones:

b.1)



$s(x) = e^{-x^3}$

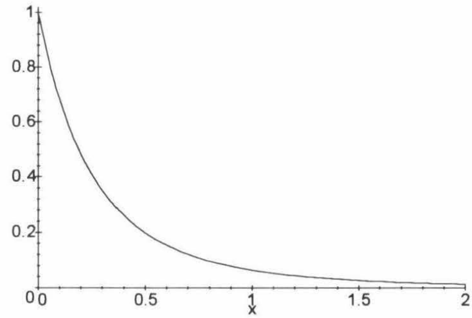
b.2)



$s(x) = 1 - \frac{x^2}{10000}$

b.3)

$s(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^4$



Es evidente que las tres funciones anteriores cumplen las propiedades exigidas en el apartado anterior, por lo que pueden representar funciones de supervivencia.

2.- Dada la función de supervivencia

$$s(x) = (1 - \frac{x}{100})^3 \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Calcule las funciones de densidad y distribución de la edad de muerte de un recien nacido, f(x) y F(x) respectivamente, así como el tanto instantáneo de mortalidad μ_x y las probabilidades ${}_tq_x$.

Solución:

Es claro que

$$_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{(1 - \frac{x+t}{100})^3}{(1 - \frac{x}{100})^3}$$

luego

$$F(x) = {}_xq_0 = 1 - (1 - \frac{x}{100})^3$$

(resultado que también podríamos haber obtenido teniendo en cuenta que $F(x) = 1 - s(x)$). En consecuencia,

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[1 - (1 - \frac{x}{100})^3\right] = \frac{3}{100}\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2$$

Por otro lado,

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{3}{100}\,\frac{(1 - \frac{x}{100})^2}{(1 - \frac{x}{100})^3} = \frac{3}{100\,(1 - \frac{x}{100})}$$

3.- Pruebe que

$$\mu_{x+t} = -\frac{dLn({}_tp_x)}{dt}$$

Solución:

$$\mu_{x+t} = \frac{g_x(t)}{1-G_x(t)} = \frac{\frac{d}{dt}(\ {}_tq_x)}{{}_tp_x} = \frac{\frac{d}{dt}(1-\ {}_tp_x)}{{}_tp_x} =$$

$$= -\frac{\frac{d}{dt}\ {}_tp_x}{{}_tp_x} = -\frac{dLn(\ {}_tp_x)}{dt}$$

4.- Demuestre que las derivadas parciales respecto a x y n de la función ${}_np_x$ son

$$\frac{\partial}{\partial x}(\ {}_np_x) = \ {}_np_x\ (\mu_x - \mu_{x+n})$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\ {}_np_x) = -\ {}_np_x . \mu_{x+n}$$

Solución:

$$\frac{\partial\ {}_np_x}{\partial x} = e^{-\int_x^{x+n}\mu_t\ dt}\ \frac{\partial}{\partial x}\left[-\int_x^{x+n}\mu_t\ dt\right] =$$

$$= e^{-\int_x^{x+n}\mu_t\ dt}\ (\mu_x - \mu_{x+n}) = \ {}_np_x\ (\mu_x - \mu_{x+n})$$

$$\frac{\partial\ {}_np_x}{\partial n} = e^{-\int_x^{x+n}\mu_t\ dt}\ \frac{\partial}{\partial n}\left[-\int_x^{x+n}\mu_t\ dt\right] =$$

$$= e^{-\int_x^{x+n}\mu_t\ dt}\ (-\mu_{x+n}) = -\ {}_np_x\ \mu_{x+n}$$

5.- Pruebe las siguientes expresiones:

a)

$$\frac{d}{dx}(\overset{o}{e}_x) = \mu_x\ \overset{o}{e}_x\ -1$$

b)

$$e_x = p_x\ e_{x+1} + p_x$$

Solución:

a)

$$\frac{d}{dx}(\overset{o}{e}_x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty {}_tp_x\, dt\right) = \int_0^\infty \left(\frac{d}{dx}\, {}_tp_x\right) dt = \int_0^\infty \left[{}_tp_x \ \left(\mu_x - \mu_{x+t}\right)\right] dt =$$

$$= \mu_x \left(\int_0^\infty {}_tp_x\, dt\right) - \int_0^\infty \mu_{x+t}\, {}_tp_x.dt = \mu_x \ \overset{o}{e}_x - \int_0^\infty g_x(t)\, dt = \mu_x \ \overset{o}{e}_x - 1$$

b)

Sabemos que

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x = p_x + \sum_{k=2}^{\infty} {}_kp_x$$

Por otra parte, también sabemos que ${}_{s+t}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s}$, luego en particular para $k \geq 2$ será

$${}_kp_x = p_x \ {}_{k-1}p_{x+1}$$

En consecuencia, obtenemos que

$$e_x = p_x + \sum_{k=2}^{\infty} {}_kp_x = p_x + p_x \cdot \sum_{k=2}^{\infty} {}_{k-1}p_{x+1} =$$

$$= p_x + p_x \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_{x+1} = p_x + p_x\ e_{x+1}$$

6- Supuesto que la función de supervivencia es

$$s(x) = (1 - \frac{x}{110})^2 \quad 0 \leq x \leq 110$$

Calcule:

a) Las probabilidades ${}_5p_{20}$, q_{28}, ${}_4q_{32}$, ${}_{3/5}q_{30}$.

b) El tanto instantáneo de mortalidad a los 40 años, μ_{40}.

c) La esperanza de vida completa a los 35 años, $\overset{o}{e}_{35}$.

Solución:

a)

$${}_5p_{20} = \frac{s(25)}{s(20)} = \frac{(1 - \frac{25}{110})^2}{(1 - \frac{20}{110})^2} = \frac{289}{324} = 0.89198$$

$$q_{28} = \frac{s(28) - s(29)}{s(28)} = \frac{(1 - \frac{28}{110})^2 - (1 - \frac{29}{110})^2}{(1 - \frac{28}{110})^2} = \frac{163}{6724} = 0.024242$$

$$_{4}q_{32} = \frac{s(32) - s(36)}{s(32)} = \frac{(1 - \frac{32}{110})^2 - (1 - \frac{36}{110})^2}{(1 - \frac{32}{110})^2} = \frac{152}{1521} = 0.099934$$

$$_{3/5}q_{30} = \frac{s(33) - s(38)}{s(30)} = \frac{(1 - \frac{33}{110})^2 - (1 - \frac{38}{110})^2}{(1 - \frac{30}{110})^2} = \frac{149}{1280} = 0.11641$$

b)
Sabemos que

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{1}{55(1 - \frac{x}{110})}$$

, y por tanto

$$\mu_{40} = \frac{1}{55(1 - \frac{40}{110})} = \frac{1}{35} = 0.028571$$

c)
Sabemos que

$$\overset{o}{e}_x = \int_0^{w-x} \frac{s(x+t)}{s(x)}\, dt$$

, por tanto

$$\overset{o}{e}_{35} = \int_0^{110-35} \frac{(1 - \frac{35+t}{110})^2}{(1 - \frac{35}{110})^2} dt = 25$$

7.-Calcule la función de supervivencia asociada con cada una de las siguientes expresiones de la fuerza de mortalidad:

a) Ley de Weibull:

$$\mu_x = k.x^n$$

b) Ley de Pareto:

$$\mu_x = \frac{a}{x+b}$$

Solución:

a)

Si $\mu_x = k.x^n$, siendo k>0 y n>0, entonces

$$s(x) = \exp(-\int_0^x \mu_s ds) = \exp(-k\int_0^x s^n ds) = \exp(-k\frac{x^{n+1}}{n+1})$$

es decir,

$$s(x) = \exp(-\frac{k}{n+1}.x^{n+1})$$

b)
Si $\mu_x = \frac{a}{x+b}$, siendo a>0 y b>0, entonces

$$s(x) = \exp(-\int_0^x \mu_s ds) = \exp(-\int_0^x \frac{a}{s+b}ds) = \exp(-a.\log\frac{x+b}{b}) = (\frac{x+b}{b})^{-a}$$

8.- Demuestre que la fuerza de mortalidad μ_x coincide con la función de densidad de la vida residual de un individuo de edad x, evaluada en el punto 0.

Solución:

$$\mu_x = \lim_{t\to 0}\frac{\Pr ob\,(x < X < x+t \;/\; X > x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{{}_tq_x}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{{}_tq_x - {}_0\,q_x}{t} = \left[\frac{d}{dt}\,{}_tq_x\right]_{t=0} == \left[\frac{d}{dt}G_x(t)\right]_{t=0} = g_x(0)$$

Esta propiedad permite interpretar aproximadamente $\mu_x\ \Delta x$ como la probabilidad de que una cabeza de edad x fallezca entre las edades x y $x+\Delta x$, siendo mejor la aproximación cuanto más pequeño sea el intervalo Δx (recuérdese la Observación 1 del Apartado 1.4).