Interpretación del fenómeno actuarial mediante un proceso estocástico evolutivo de variables separables

Por
ANTONIO MARTINEZ VAZQUEZ

I. Introducción

La evolución fenomenológica en general resulta notoria y creemos que pocos se atrevan a negarla. No vamos a repetir aquí las consideraciones hechas en la Introducción a nuestra comunicación al Tema II del XX Congreso Internacional de Actuarios a las que nos remitimos para extenderlas a otros Ramos del Seguro y del Reaseguro distintos del de Vida, por lo que creemos resulta absolutamente necesario formular un planteamiento general de los Procesos Estocásticos a los que le naturaleza del fenómeno que intentan representar impone la condición de evolutivos.

No se nos oculta, por una parte, la barrera insalvable existente entre la Ciencia Actuarial dedicada al estudio de las operaciones de los Seguros de Vida, y la dedicada a las actividades inherentes a los Seguros de No Vida, ni por otra, tampoco está lejos de nosotros el problema que se presenta al predecir la evolución de tales procesos. Es nuestro deseo pues, facilitar un tratamiento específico para cada parte, al proprio tiempo que resolver el problema de la predicción reemplazando la realizada desde un instante temporal bastante lejano del que se verifica la realización fenomenológica en consideración por otra realizada en un instante contiguo o inmediatamente anterior a dicha realización. Por ello intentamos resolver el problema valiendonos de la evolución de los métodos de cálculo y análisis numérico de nuestros dias, merced a la cual se logra una actualización permanente en la determinación de las Leyes de Probabilidad que interpretan nuestro fenómeno.

II. Procesos Estocásticos Evolutivos de Variables Separables

Antes de entrar en el tratamiento específico que se ha de dar a la casuística de los Seguros de Vida y a la de las Operaciones de Seguro de No Vida, en razón a un principio de metodología expositiva, procede al menos definir la naturaleza misma de tales Procesos.

Por ello, dado un fenómeno aleatorio representado por Ω cuyas realizaciones de denominan acaeceres o sucesos, los cuales constituyen una clase denotada por A que tiene estructura de σ-álgebra, pero cuyos sucesos se realizan bajo condiciones exteriores, no aleatorias y cambiantes o distintas, las cuales definen un espacio Γ, bajo una determinada Ley de Probabilidad P. Entonces tal fenómeno ha definido una combinación cuaternaria dada por $\{\Omega, A, P, \Gamma\}$, la cual según asevera A.V. Skorohod (1965) constituye un Proceso Estocástico.

Definido así el Proceso, resulta que la realización del fenómeno Ω en una concreción S y bajo la condición $\gamma_i \in \Gamma$ definirá evidentemente el par (S, γ_i) y por ello tal realización tendrá asignada una Probabilidad, dada por $P(S, \gamma_i)$.

Si la Función de Probabilidad $P(\circ, \gamma_i)$ es invariante con respecto a Γ, lo que implica la relación

$$P(S, \gamma_i) = P(S, \gamma_j); \ \forall \gamma_i \neq \gamma_j \quad \text{y} \quad \forall S \in A$$

entonces se dice que el Proceso Estocástico en consideración, resulta ser estacionario.

Si por otra parte el postulado anterior de Γ-invarianza no se verifica y por tanto es verdadera la relación

$$P(S, \gamma_i) \neq P(S, \gamma_j); \ \exists \gamma_i \neq \gamma_j \quad \text{y} \quad \forall S \in A$$

entonces estamos ante un Proceso Estocástico evolutivo.

A efectos estrictamente prácticos, el espacio de probabilidad $\{\Omega, A, P, \Gamma\}$ se suele sustituir por un espacio recubridor, considerando como recubridor de Ω, el espacio real k-dimensional $\mathbb{R}^K$ de forma tal que $\mathbb{R}^K = \underset{i \in I_K}{\times} \mathbb{R}$, siendo $\mathbb{R}$ el espacio de los números reales, é I_k, representativo del conjunto de los k primeros números naturales, con k representativo del número de características o aspectos fenomenológicos en considera ción. La clase A está recubierta por la clase aditiva minimal dada por $\mathscr{B}$ y generada por uniones é intersecciones de intervalos definidos sobre $\mathbb{R}^K$ y P, tiene por imagen recubridora, la Función de Distribución de Probabilidad dada por $F(\circ)$. Por su parte las circunstancias exteriores se suelen vincular al instante en que se realizan o a otros niveles expresados cuantitativamente, de aquí que el espacio Γ tenga por recubridor el espacio temporal T, o cualquier otro espacio paramétrico Θ. Por lo tanto el Proceso Estocástico puede ser representado en la realidad por la cuaterna $\{\mathbb{R}^K, \mathscr{B}, F, T,\}$ o mas abreviadamente por $\{X(t); t \in T\}$ formulación que es bastante común, y se dice, que tal proceso es evolutivo si la F.D.P. de $X(t)$ depende de t, es decir que existe un par (t_i, t_j) tal que $t_i \neq t_j$, para el que es verdadera la relación siguiente:

$$P(X(t_i) \in I^*) = F(I^*; t_i) \neq F(I^*; t_j) = P(X(t_j) \in I^*)$$

donde I^* representa un elemento de $\mathscr{B}$.

Definición 2.1.

Un Proceso Estocástico evolutivo $\{X(t); t \in T\}$ se dice que es de variables separables si

$$F(x, t) = \Phi[F(x), \varphi(t)] \qquad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times T$$

Por lo tanto este es un concepto diferente del de Proceso Estocástico separable, del que en esta comunicación no nos vamos a ocupar.

Finalmente dentro de estas conceptualizaciones básicas, hemos de señalar que consideramos como función de intensidad de un Procesos estocastico, la dada por:

$$\varrho_1(x,t) = \frac{\delta \log F(x,t)}{\delta x}$$

$$\varrho_2(x,t) = \frac{\delta \log [1 - F(x,t)]}{\delta x} \tag{2.1}$$

que en muchos casos puede coincidir con un tanto anual de acaecimiento fenomenológico referido a un instante dado.

Para casos especiales de Procesos estocásticos evolutivos se tiene que

$$\varrho_i(x,t) = \tau(t) \cdot \varrho_i(x); \qquad i \in I_2 \tag{2.2}$$

siendo $\tau(t)$ una función monótona de t, y creciente o decreciente según los casos, y arbitraria por lo demás, y por tanto puede ser continua o escalonada.

Si en la (2.2) $\varrho_i(x)$ adopta el morfismo

$$\varrho_1(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

$$\varrho_2(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \tag{2.3}$$

siendo $F(x)$ la F.D.P. asociada a un Proceso Estocástico estacionario, se tendrá que

$$F_1(x,t) = [F(x)]^{\tau(t)}$$

$$F_2(x,t) = 1 - [1 - F(x)]^{\tau(t)} \tag{2.4}$$

Definición 2.2.

Dada una F.D.P. $F \in \mathscr{F}_2$ *(clase de F.D.P. continuas), y una aplicación biunivoca de* (0,1) *en* (0,1), *según una ley g, diremos que la Hipótesis que ascvera que la* F.D.P. *asociada a un cierto fenómeno, está dada por* $g \cdot F$, *pertenece a la clase de alternativas introducidas por* E.L. Lehmann *en* 1953, *cuya clase será denotada por* $\varkappa_L$.

Definición 2.3.

Como casos especiales de la clase de alternatives de Lehmann se consideran las siguientes especificaciones para $g_i(\circ)$

Primer tipo: $\qquad g_i(x) = x^{\alpha_i}$

definiendo $\{\alpha_i\}$ *una sucesión monótona creciente, y entonces*

$$\varkappa_{L1} \Rightarrow F_i(x) = [F(x)]^{\alpha_i} \tag{2.5}$$

Segundo tipo: $\qquad g_i(x) = 1 - (1 - x)^{\alpha_i}$

en cuyo caso $\{\alpha_i\}$ define una sucesión monótona decreciente y se verifica que:

$$\varkappa_{L.2} \Rightarrow F_t(x) = 1 - [1 - F(x)]^{\alpha_t} \quad (2.6)$$

Definición 2.4.

Se puede generalizar la clase de alternativas de Lehmann por sustitución en (2.5) y en (2.6), de $\{\alpha_t\}$ por unas funciones monótonas crecientes o decrecientes en t, y arbitarias por lo demás, apareciendo así la clase de alternativas de Lehmann generalizadas del primer y segundo tipo, que están denotadas por $\varkappa_{L.1.g}$ y $\varkappa_{L.2.g}$ respectivamente, cuyas F.D.P. $F_t(x)$ *coinciden con las dadas por* (2.4).

A la luz de estos conceptos y resultados, formulamos el siguiente

Teorema 2.1.

Un Proceso estocástico evolutivo $\{X(t);\ t \in T\}$ está definido por una función de intensidad de variables separables, si y solamente si, para su F.D.P. resulta válida una Hipótesis perteneciente al primer o segundo tipo de alternativas de Lehmann generalizadas, según que tal función de intensidad sea formalmente decreciente o creciente, y el segundo tipo de tales alternativas implica además que la F.D.P. en consideración, está vinculada a un Proceso de eliminación.

Para probar este Teorema en cuanto a la suficiencia de la condición basta realizar las correspondientes operaciones sobre (2.4), y obtener (2.2). Para probar la necesidad de la condición, basta con resolver la ecuación (2.1), teniendo en cuenta (2.2) y (2.3). Por ultimo la tercera parte es obvia dado el crecimiento de la función de intensidad $\bar{V}$.

Corolario 2.1.

La clase de alternativas de Lehmann generalizadas suministra unas F.D.P. *asociadas a Procesos Estocásticos evolutivos de variables separables.*

La demostración se realiza teniendo en cuenta (2.4.), y la condición dada por la Definición 2.1. y por lo tanto resulta equivalente considerar las F.D.P. de los Proceso Estocásticos evolutivos de variables separables, o las F.D.P. asociadas a la clase de alternativas de Lehmann generalizadas.

Por otra parte es preciso tener en cuenta que el problema de caracterización de las F.D.P. asociadas a la clase de alternativas de Lehmann, fué resuelto por H.J. Rossberg (1972), en base a propiedades muy amplias de la F.D.P., asi como que la transformada de Laplace de la F.D.P. asociada al estadístico ordenado $X_{(i)}$ no admita ceros sobre el espacio de los numeros complejos de parte real no negativa, en unión de la independencia entre $\Delta X_{(i)}$ y $L_{k,m}$ para $i < k < m < N$, siendo $L_{k,m}$ una variedad lineal en el sentido de C.R. Rao (1965), generada por $X_{(j)} j \in I_m - I_{k-1}$ y tal que la suma de los coeficientes c_j de esta variedad es nula, no siendo nulos todos sus sumandos, y si existe una F.D.P., dada por $G(\circ) \in \mathcal{F}_2$ que tiene las mismas propiedades que $F(\circ)$ y tal que $G^{-1}(\circ) \in C(0,1)$, entonces la independencia de $X_{(k)}$ y

$$X = \prod_{i \in I_N - I_K} [1 - G(x_i)]^{C_i}$$

En este caso la única condición a imponer a $\tau(t)$, es que sea una función monótona decreciente c.r.a. t, con $\tau(t_0) = 1$ siendo t_0 el instante relativo a $F(x)$, tal como lo propuso inicialmente K.H. Wolff (1959), y arbitraria por lo demás.

Por otra parte en base a una reducida experiencia podemos construir en cada momento la F.D.P. empírica $F_N(x)$, mediante un diagrama de frecuencias relativas acumuladas, y aplicando la relación

$$F_N(x) = \frac{\sum_{y \in I_x - I_{x_0}} d_y}{N} \tag{3.3}$$

siendo x_0 el límite inferior de la edad asegurable, d_y el número de fallecidos a cada edad en la información muestral, y N el número total de fallecidos en la muestra, con un límite inferior de $N = 5$.

En orden al criterio de suficiencia para las leyes de mortalidad (supervivencia) y dado por una parte la reducida información muestral de que se ha dispuesto para la construcción de $F_N(x)$, y por otra parte sus propiedades ya referidas (op. cit), no aparece inconveniente alguno para la aplicación también en éste caso de estimación del estadístico uni-muestral y uni-ramico de Smirnov-Kolmogorov dado por

$$D_N^- = \sup_x [F(x, t_i) - F_N(x)] \tag{3.4}$$

Como quiera que los valores de N, no son muy elevados, actualmente se dispone de la F.D.P. exacta asociada al estadístico D_N^- dada por Z.W. Birnbaum y F.N. Tingey (1951) y Z.W. Birnbaum (1953) y por ello se pueden obtener facilmente los $(1-\varepsilon)$-cuantiles $D_N^-(1-\varepsilon)$ para $\varepsilon = (0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}01;\ 0{,}001)$, y establecer la relación

$$\sup_x [F(x, t) - F_N(x)] \in [0, D_N^-(1-\varepsilon)] \tag{3.5}$$

Para encontrar el valor x_1 de x, que satisface la expresión (3.5), basta considerar que este coincide con el que satisface

$$\sup_x [F(x) - F_N(x)] = [F(x_1) - F_N(x_1)] \tag{3.6}$$

y por tanto se tiene que

$$[F(x_1, t) - F_N(x_1)] \in [0, D_N^-(1-\varepsilon)] \tag{3.7}$$

Ahora de (3.7) y (2.4) se tiene que

$$\bar{\tau}(t_i) = \frac{\log[1 - F_N(x_1) - D_N^-(1-\varepsilon)]}{\log[1 - F(x_1)]} \tag{3.8}$$

y

$$\underline{\tau}(t_i) = \frac{\log[1 - F_N(x_1)]}{\log[1 - F(x_1)]} \tag{3.9}$$

siendo log el símbolo correspondiente al logaritmo natural, y t_i, el indicador del momento en que se realiza la estimación de $F_N(x)$, con respecto al momento en que se construyó la F.D.P. $F(x)$ dado por t_0.

es condición necesaria y suficiente para que la F.D.P. $F(\circ)$, pertenezca a la clase de alternativas de Lehmann del segundo tipo con respecto a $G(\circ)$.

Aunque la condición final resulte trivial y se plasme en un contraste de independencia, es posible que tal caracterización exija demasiadas condiciones para los estadísticos ordenados y que éstas resulten en algunos casos difícilmente accesibles, por lo que para cada tipo se dará la metodologia de contrastación estadística, bastante facil, pero dejando ésta para la Seccion V., a continuación se propone la aplicación de los resultados obtenidos:

III. Aplicación a la Evolución de las Leyes de Mortalidad.

Ya quedó suficientemente demostrado en nuestra comunicación anterior, que el Proceso Estocástico asociado a la variable aleatoria representativa de la edad de muerte, era evolutivo, y allí se propuso aunque no se resolvió, una solución que consistía en hacer pertenecer a su F.D.P. a la clase de alternativas de Lehmann del segundo tipo, lo que estaba motivado por la condición de que el tanto anual de mortalidad referido a un instante dado tenía que seguir perteneciendo a la estructura biométrica obtenida a partir de la teoría de la supervivencia de A. Quiquet (1893), por lo cual tal función de intensidad $\mu(x,t)$, debe cumplir la (2.2), con $\mu(x)$ verificando la segunda relación de (2.3) en la que $f(x)$, es la F.D.P., obtenida de [illegible] del Teorema de Radon-Nikodym, y $\mu(x)$ además ha de ser la solucion de una ecuacion diferencial de orden $r+1$, lineal y con coeficientes constantes. De todo ello se sigue que la F.D.P. $F(x,t)$ asociada a la variable aleatoria representativa de la edad de muerte, es isomorfa con respecto a la $F_2(x,t)$, dada por (2.4).

Ahora bien, la realidad reclama aplicaciones inmediates de éstos resultados, y por lo tanto para conocer $F(x,t)$ es absolutamente necesario el conocimiento de $F(x)$ y de $\tau(t)$.

De (2.3) y de la condición inicial $F(0)=0$, se tiene que

$$F(x) = 1 - \exp\left\{ - \int_{(0,x)} \mu(y)\,dy \right\} \tag{3.1}$$

Por otra parte considerando un Proceso Estocástico de eliminación por muerte, se tiene que la esperanza matemática del número de supervivientes a la edad x está dada por

$$E(l_x) = \bar{l}_x = l_0 \exp\left\{ - \int_{(0,x)} \mu(y)\,dy \right\} \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2) se tiene que

$$1 - F(x) = \frac{\bar{l}_x}{l_0}$$

Afortunadamente los valores de $\bar{l}_x$ y l_0 son disponibles en la actualidad merced a las tablas de mortalidad que se aplican y que corresponden a $F(x)$, por lo que el primer problema queda prácticamente resuelto.

Para la determinación de $\tau(t)$ renunciamos a la caracterización y estimación de la funciónal $\tau(\circ)$, ya que ello plantearía posteriormente los problemas de predicción, por lo que dedicaremos nuestra atención a los valores numéricos de $\tau(t)$, para cada t_i.

Por tanto se puede concluir que los resultados obtenidos de (3.8) y (3.9) son suficientes para definir un intervalo $[\underline{\tau}(t_i), \bar{\tau}(t_i)]$, que recubra al valor $\tau(t_i)$ con una Probabilidad de $1 - \varepsilon$, y tal intervalo recubridor necesariamente he de estar contenido en $(0, 1)$, y con un elemento perteneciente al primero se puede obtener $F(x, t)$, que resulta admisible para todo t perteneciente a un entorno lateral derecho de t_i y cuyo radio sea menor que 10, y se pueden construir las tablas de mortalidad aplicables para tal periodo, que están dadas por la relación

$$\bar{l}_{x,t} = l_0 \cdot \left(\frac{\bar{l}_x}{l_0}\right)^{\tau(t_i)} \tag{3.10}$$

Las expresiones (3.8), (3.9) y (3.10), puedon calcularse con un miniordenador con resultados impresos.

Por lo tanto tomando como base unas tablas de mortalidad construidas en el momento $t = t_0$, se pueden obtener unas tablas de mortalidad admisibles para un semientorno de t_i, sin más que aplicar sucesivamente (3.6), (3.7), (3.8) (3.9) y (3.10).

En relación con el problema de las leyes de supervivencia, es preciso señalar que la metodología para su resolución es análoga, y difiere de la anterior únicamente en la sustitución en (3.4) de D_N^- por D_N^+, y en (3.5) y (3.7) sustituir $D_N^-(1 - \varepsilon)$ por $D_N^+(1 - \varepsilon)$ invertir las diferencias en (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7), reemplazar en (3.8) y (3.9), $D_N^-(l - \varepsilon)$ por $-D_N^+(1 - \varepsilon)$, permutando finalmente los extremos del intervalo recubridor obtenido.

Por todo ello y a reservas de los contrastes previos, consideramos que el problema queda totalmente resuelto.

IV. Aplicación a los Procesos Estocásticos Evolutivos de los Seguros de no Vida.

Si se examina siquiera someramente la clase de F.D.P. que rigen el fenómeno aleatorio inherente a los Seguros de No Vida, y de acuerdo con la formulación dada por J. Kupper (1962) y (1971), H. Bühlmann (1970); H. Ammeter (1964) y (1970); M. Derron (1964) L.D'Hodge (1964), entre otros, se aprecia, que las F.D.P. propuestas como correspondientes a las variables aleatorias asociadas a las consecuencias económicas de los siniestros son la exponencial negativa, la de Pareto y la de Cauchy, mientras que por otra parte y a raíz de que A. Thepaut formuló en 1950, la modalidad de Reaseguro denominada ECOMOR, la Distribución de Probabilidad asociada a los valores extremos, cobró importancia en la Ciencia Actuarial, como se demuestra en los trabajos de los autores citados, junto con los de R.E. Beard (1963); E. Francks (1963) D. Furst (1964). J. Jung (1964), por citar solo algunos y es preciso tener en cuenta que E.J. Gumbel (1958) considera los siguientes tipos de F.D.P. asociadas a los valores extremos de una realización aleatoria:

Primer tipo

$[F^{(1)}(x) = \exp\{-e^{-x}\}]$ $\qquad$ $I_{\mathbb{R}}(x)$

Segundo tipo

$[F^{(2)}(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}]$ $\qquad$ $I_{\mathbb{R}^+}(x, \alpha)$

Tercer tipo

$$[F^{(3)}(x) = \exp\{-(-x)^{\alpha}\}] \qquad I_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+}(x, \alpha) + I_{\mathbb{R}^{+2}}(x, \alpha)$$

De lo anteriormente expuesto y por aplicación de las relaciones (2.2), (2.3) y (2.4) se deduce lo siguiente:

a) Que tomando como básicas las F.D.P. exponencial y de Pareto se obtiene como $F(x, t)$, una F.D.P. perteneciente al segundo tipo de alternativas de Lehmann generalizadas.

b) Que tomando como base la F.D.P. de Cauchy, así como cualquiera de los tipos dados por E.J. Gumbel (op. cit), se concluye que la F.D.P. $F(x, t)$ pertenece al primer tipo de la clase de alternativas de Lehmann generalizadas.

Por ello, construida la F.D.P. empírica $F_N(x)$ asociada a las consecuencias económicas de los siniestros de la forma siguiente

$$F_N(x) = N^{-1} \sum_{i \in I_N} I_{\mathbb{R}^+}(x - x_i)$$

siendo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ las consecuencias económicas de los N siniestros muestreados é $I_C(x)$, la usual función indicatriz del conjunto C., y para los casos en que la F.D.P. asociada a las consecuencias económicas de los siniestros es la exponencial negativa o la de Pareto, el procedimiento de obtención de la F.D.P. $F(x, t)$, es idéntico al que se sigue de (3.6), (3.7), (3.8), y (3.9), y en este caso

$$F(x, t) = 1 - [1 - F(x)]^{\tau(t)} \tag{4.1}$$

válida para todo t, perteneciente a un semientorno lateral derecho de t_i, y la cual conociendo la funcional $F(x)$, es de cálculo inmediato no requiriendose a tal efecto un proceso de tabulación, sino la obtención de sus tres primeros momentos α_1, μ_2, μ_3 para obtener la primera y la segunda componente de la prima de riesgo es decir, la esperanza matemática y el llamado recargo de seguridad, ya que éste último debe depender en estricta justicia, tanto de la varianza, como de la asimetría positiva de las F.D.P.

Para el caso en que la F.D.P. asociada a las consecuencias económicas de los siniestros o al Reaseguro pertenezcan al primer tipo de la clase de alternativas de Lehmann generalizadas, el proceso de cálculo para obtener $F(x, t)$, difiere del anterior únicamente en sustituir (3.8) y (3.9), por

$$\bar{\tau}(t_i) = \frac{\log[F_N(x_1) - D_N^+(1 - \varepsilon)]}{\log F(x_1)} \tag{4.2}$$

y

$$\underline{\tau}(t_i) = \frac{\log F_N(x_1)}{\log F(x)} \tag{4.3}$$

y en este caso (4.1) se reemplaza por

$$F(x, t) = [F(x)]^{\tau(t)}$$

y el problema es análogo al anterior y se puede dar por resuelto.

V. Precontrastes

Las formulaciones realizadas en las Secciones III y IV, resultan siempre válidas bajo unas determinadas condiciones, que se plasman en las siguientes:

a) Que existe isofuncionalidad entre $F(x)$ y la F.D.P. asociada a los valores que se han tomado como base para construir $F_N(x)$.

b) Que $F(x, t)$ pertenezca a la clase de alternativas de Lehmann generalizadas.

En relación con el apartado a) y para la Sección III, será preciso contrastar que las observaciones muestrales siguen perteneciendo a la misma estructura funcional, es decir que se mantiene la ley de mortalidad inicial en la que únicamente se han experimentado mutaciones paramétricas.

Como quiera que la Ley de mortalidad de $F(x)$, resulta conocida (Darmois, Gompertz, 1ª ó 2ª de Makeham, Risser, Lazaruz, Weibull, etc.) definiendo en base a las observaciones muestrales una sucesión en x de matrices de Hankel $\{z_{x+i+j-2}\}$, y teniendo en cuenta que las $\{z_{x+k}\}$ son variables aleatorias, las relaciones de éllas dimanantes deben ser contrastadas, mediante el clásico contraste del signo, y no con criterio determinista como se presentó inicialmento en la Teoria de A. Quiquet (op. cit).

Para el problema resuelto en la Sección IV, la invarianza en la funcionalidad de $F(x)$, se contrasta mediante una caracterización de la F.D.P., asociada a la muestra $\{x_i\}$ $i \in I_N$, según hemos demostrado en nuestra obra (1975).

En relación con el apartado b), el problema puede resolverse mediante un contraste de la Hipótesis nula de Homogeneidad, frente a alternativas ordenadas.

Para ello se define por medio de $\{\Pi_{t_i}\}$ $\forall i \in I_r$ la sucesión de estados de la naturaleza fenomenológica en cada uno de los instantes $\{t_i\}$ $\forall i \in I_r$ y por $\{F(x, t_i)\}$ la sucesión parcial de F.D.P. asociadas a cada uno de los estados anteriormente referidos.

La Hipótesis nula H, es tal que

$$H \Leftrightarrow F(x, t_i) = F(x, t_j) \qquad \forall\, i \neq j \in I_r \quad \text{y} \quad \forall\, x \in D$$

siendo D el dominio de definición de x.

La Hipótesis alternativa K, es tal que

$$K \Leftrightarrow \begin{cases} \varkappa_{L1g} = \{F(x)^{\tau(t_i)}\}\,;\ \tau(t_i) \leqslant \tau(t_j); & \forall\, i \leqslant j \in I_r,\ \forall\, x \in D \\ \varkappa_{L2g} = \{1 - [1 - F(x)]^{\tau(t_i)}\};\ \tau(t_i) \geqslant \tau(t_j), & \forall\, i \leqslant j \in I_r,\ x \in D \end{cases} \tag{5.1}$$

A efectos de facilitar los cálculos se realiza la transformación

$$\beta_i = \frac{\tau(t_i) - \tau_0}{\theta}$$

siendo τ_0 un parámetro de posición y θ un parámetro de escala.

De (5.1) se tiene $\varkappa_{L1g} \Rightarrow \beta_i \leqslant \beta_j\, i \neq j \in I_r$ y que $\varkappa_{L2g} \Rightarrow \beta_i \geqslant \beta_j \forall\, i \neq j \in I_r$, con alguna desigualdad estricta.

De cada uno de los estados de la naturaleza $\{\Pi_{t_i}\}$ $i \in I_r$, se realizan $\{n_i\}$ $i \in I_r$, observaciones muestrales denotadas por

$$\{X_{ij}\} \quad j \in I_{n_i} \quad i \in I_r \quad \text{y} \quad \sum_{i \in I_r} n_i = N$$

A.R. Jonckheere (1945) y M.L. Puri (1965), han introducido contrastes de rango para las Hipótesis alternativas de Lehmann originales, y con el mismo fin R.S. Haller (1968), tras definir a partir de la muestra conjunta $\{X_{ij}\}\ \forall\,(i,j)\in I_r \times I_{n_i}$ el estadístico ordenado $\{X_{(k)}\}\ k\in I_N$, así como el rango ordenado r-muestral dado por $\{Z_k\}$ tal que $Z_k = j \Leftrightarrow X_{(k)} = X_{ji},\ i\in I_{n_j}$.

En base a esta información para contrastar H frente a $K \Leftrightarrow \varkappa_{L1}$ (ó $\varkappa_{L2}$) se emplean unos estadísticos, basados en los propuestos por I.R. Savage (1956) que estaban dados por

$$T_k(z) = \sum_{i\in I_N} \sum_{j\in I_i} \frac{\delta_{KZ_j}}{i}$$

$$S_k(z) = \sum_{i\in I_r} \sum_{j\in I_N - I_{i-1}} \frac{\delta_{KZ_j}}{N-i+1}$$

con δ_{KZ_j} representativo del usual delta de Kronecker, cuyos resultados se pueden extender para contrastar las alternativas de Lehmann generalizadas, mediante los siguientes estadísticos

$$\left\{T_N(z) = \sum_{k\in I_r} \beta_k \cdot T_k(z)\right\} \cdot I_Z(z) \quad \text{para} \quad \varkappa_{L1g}$$

y

$$\left\{S_N(z) = \sum_{k\in I_r} \beta'_k \cdot S_k(z)\right\} \cdot I_Z(z) \quad \text{para} \quad \varkappa_{L2g}$$

y paralelamente con Haller (op. cit) formulamos el siguiente

Teorema 5.1.

Para $\alpha\in(0,1)$ sea $k\in\cap$, tal que $K < M$, y $\alpha\in[K/M, (K+1)/M]$ y $M = N!/\left(\prod_{i\in I_r} n_i!\right)$, entonces se verifica lo siguiente

I) $\exists\{\varphi_i\};\ i\in I_M$ tal que

$$\varphi_j \begin{cases} I_{\mathbb{R}^+}(m_1 - M + K); & m_1 = \text{card } C_1 \text{ y } \\ & C_1 = \{z;\ T_N(z) - T_N(z^j)\in \mathbb{R}^+\}\cap Z \\ I_{\mathbb{R}^+}(K+1-m_2); & m_2 = \text{card } C_2 \text{ y } \\ & C_2 = \{z;\ T_N(z) - T_N(z^j)\in \mathbb{R}^-\}\cap Z \\ \dfrac{(M\alpha - m_1)}{(M - m_1 - m_2)} & \text{Bajo los sucesos complementarios de la unión de los precedentes} \end{cases}$$

y define un contraste de rango ordenado de nivel α para H frente a $K \Leftrightarrow \varkappa_{L1g}$

II) Análogamente $\exists \{\varphi_i\}; i \in I_M$ tal que

$$\varphi_i \begin{cases} I_{\mathbf{R}^+}(m_1^{\vee} - M + K); & m_1^{\vee} = \text{Card}\, C_1^{\vee} \text{ y} \\ & C_1^{\vee} = \{z;\, S_N(z) - S_N(z^j) \in \mathbf{R}^+\} \cap Z \\ I_{\mathbf{R}^-}(K + 1 - m_1^{\vee}); & m_2^{\vee} = \text{card}\, C_2^{\vee} \text{ y} \\ & C_2^{\vee} = \{z;\, S_N(z) - S_N(z^j) \in \mathbf{R}^-\} \cap Z \\ \dfrac{(M\alpha - m_1^{\vee})}{(M - m_1^{\vee} - m_2^{\vee}} & \text{Bajo los sucesos complementarios a la unión de los precedentes.} \end{cases}$$

y define un contraste dé rango ordenado de nivel α para H, frente a $K \Leftrightarrow \varkappa_{L2g}$

La demostración de ceste Teorema es análoga a la dada por Haller (op. cit) del que constituye una extensión. Sin embargo y para mayor precisión, hemos de notar que Z es el conjuto de rangos ordenados, daao por $Z = \{z^i; i \in I_M\}$ y z^j es el rango concretamente ordenado, por permutacion de j elementos de cada 2 grupos contiguos.

La eficacia de los estadísticos $T_N(z)$ y $S_N(z)$, respecto a alternativas próximas, asi como su eficiencia relativa con respecto a otros estadísticos.

Para la distribución de Probabilidad asintotica, relativa a los estadísticos $T_N(z)$ y $S_N(z)$, en base a las contribuciones dadas por: H. Chernoff, o I.R. Savage (1958); Z. Govindarajulu, L. Le Cam, M. Raghavachari (1967), así como por las formulaciones posteriores debidas a J. Hâjek (1968), V. Dupaç y J. Hâjek (1968), F.H. Ruymgaart, R. Shorack, y R. van Zwett (1972) y Hoeffding (1973) y como quiera que normalmente N, es elevalo, como ha quedado ya probado, se deduce que $T_N(z)$ y $S_N(z)$, individualmente considerados tienen sendas distribuciones de Probabilidad gaussianas, con $\{E[T_N(z)]$, Var $[T_N(z)]\}$ y $\{E[S_N(z)]$, Var $[S_N(z)]\}$ respectivamente y por ello su aplicación no presenta problemas de ningún genero, por lo que el contraste de las alternativas de Lehmann generalizadas resulta plenamente viable, y si tales alternatives resultan admisibles el proceso de actualización de datos puede acelerarse notablemente.

Estos precontrastes son realmente muy sencillos y por ello su aplicación es recomendable ya que con ella se logra una débil probabilidad de error en los principios postulacionales de las formulaciones precedentes, reforzando con ello su verdadera utilidad

Bibliografía

Ammeter, H. (1964). Note concerning the distribution function of the total loss excluding the largest individual claims. ASTIN III – 2°; 132–143

Ammeter, H. (1970). La distribution du sinistre le plus élevé et son application aux problèmes des grands risques. Giornl. Inst. Ital. degli Attuar, XXXIII; 10–29

Beard, E.R. (1963). Some notes on the statistical theory of extreme values. ASTIN III, 1°; 6–12

Birnbaum, Z. (1953). Distribution-free test of fit for continuos Distribution Functions. A.M.S. 24; 1–8

Birnbaum, Z. y Tingey, F.H. (1951). One-sided confidence contours for Probability Distribution Functions. A.M.S. 22; 592–596

Bühlmann, H. (1970). Mathematical Methods in Risk Theory. Springer Verlag

Chernoff, H. y Savage, I.R. (1958). Asymptotic normality and efficiency of certain nonparametric test statistics. A.M.S. 29, 972–994

Derron, M. (1966). A Study in Credibility Betterment through exclusion of the largest claims. ASTIN IV 1°, 39–48

D'Hodge, L. (1964). Theorie des valeurs extrêmes et la tarification de l'excess of loss. ASTIN III 2°, 166–177

Dupac, V. y Hajek, J. (1968). Asymptotic normality of simple linear rank statistics under alternatives II. A.M.S. 40; 1992–2017.

Francks, E. (1963). Sur la fonction de distribution du sinistre le plus élevé. ASTIN. III 415–424.

Furts, D. (1964). Formulation Bayesienne du problème des valeurs extrêmes en relation a la réassurance excédent de sinistres. ASTIN III 2°, 153–162

Govindarajulu, Z, Le Cam, L. y Raghavachary, M. (1967). Generalizations of theorems of Chernoff-Savage of asymptotic normality of nonparametric test statistics. Proc. Fifth Berkl, Symp. in Math. Statist. and Prob. I. 609–638.

Gumbel, E.J. (1958). Statistics of Extremes. Columbia University Press.

Hâjek, J. (1968). Asymptotic normality of simple linear rank statistics under alternatives. A.M.S. 39, 325–346.

Haller, R.S. (1968). Optimal c-sample rank-order procedures for selection and tests against slippage and ordered alternatives. Ph. D. Disertation. Unpublished.

Hoeffding, W. (1973). On the dentering of a simple linear rank statistics. A.S. 1, 54–66.

Jonkheere, A.R. (1945). A Distribution – free *k*-sample test against ordered alternatives. Bk. 41, 135–145.

Jung, J. (1964). On the use of extreme values to estimate the premium for an excess-loss reinsurance. ASTIN. III. 2, 178–184.

Kupper, J. (1962). Wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle in der Schadenversicherung. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik. V. 451–506 y VI. 95–130

Kupper, J. (1971). Contribution to the theory of the largest claims cover. ASTIN. VI. 2°, 134–146.

Lehmann, E.L. (1953). The power of rank tests. A.M.S. 24; 23–43.

Martinez Vazquez (1975). The problems of choosing mortality tables. Transct. 20th Intern. Congrs. Actuar. Subjet II. 589–598.

Martinez Vazquez (1976). The nonparametric statistics and its applications to Management and Actuarial Sciences. En impresión.

Puri, M.L. (1965). Some distribution – free *k*-sample rank tests homogeneity against ordered alternatives. Comm. Pure Appl. Math. 18, 51–63.

Quiquet, A. (1893). Représentation algébrique des tables de survie. Bull. Inst. Act. Franc. 14 (referido por *Lasheras Sanz. A.* (1948). Matemática del Seguro. Dossat. Madrid).

Rao, C.R. (1965). Linear statistical inference and its application. John Wiley and Son's Inc.

Rossberg, H.J. (1972). Characterization of distribution functions by the independence of certain functions or order statistics. Sankya. A. 34-2, 111–120.

Ruymgaart, F.M., Shorack, R. y Van Zwett, R. (1972). Asymptotic normality of nonparametric tests for independence. A.M.S. 43-4; 1122–1135.

Savage, I.R. (1956). Contribution to the theory of rank order statistics the two-sample case. A.M.S. 27; 590–615.

Skorohod, A.V. (1965). Studies in the theory of random processes. Addison-Wesley.

Thepaut, A. (1950). Le traité de l'excedent du coût moyen relatif (ECOMOR). Bull. de l'Inst. Actuar. Franc. Vol. 14.

Wolff, K.H. (1959). Die zeitliche Änderung der Sterblichkeit und ihre Berücksichtigung in der Pensionsversicherung. Proc. of the Second Intern. Conf. of Social Security Actuaries and Statisticiens.

Resumen

En esta comunicación, una vez presentado el problema de los fenómenos aleatorios evolutivos, y tras definir los conceptos instrumentales, que los interpretan con una amplia conceptualización generalizada, el autor dedica su atención a los procesos estocásticos evolutivos de variables separables los cuales demuestran que son equivalentes a fenómenos aleatorios evolutivos interpretados por Leyes de Probabilidad, – cuyas Funciones de Distribución pertenecen a una clase de alternativas de Lehmann generalizadas, para las que da un criterio restringido de caracterización.

Sentados estos principios, pasa a analizar las aplicaciones de estos resultados, considerando en primer lugar los procesos estocásticos evolutivos de supervivencia, cuya clase de F.D.P. debe ser cerrada con respecto a las mutaciones temporales, lo que exige la condición de separabilidad para sus variables, y la estimación de los valores de la F.D.P. original se obtiene en base a las tablas de mortalidad disponibles, y la de los correspondientes a la F.D.P. empírica – utilizando los valores directamente obtenidos de la experiencia, mientras que los valores númericos correspondientes a la función del tiempo, que motiva tal generalización, se logra encontrando un intervalo aleatorio recubridor de tal valor con una probabilidad dada, mediante la aplicación del estadístico unimuestral y unirramico de Smirnov-Kolmogorov, – que tiene las mismas propiedades del aplicado para Contraste de Hipótesis, las cuales han quedado ya reflejadas en una comunicación anterior.

A continuación se consideran las aplicaciones de tales procesos a la Matemática de los Seguros de No Vida, encontrándose dentro de las F.D.P. asociadas a las consecuencias económicas de los siniestros, funciones pertenecientes tanto al primero como al segundo tipo, de tales alternativas, resolviendo los problemas inherentes a cada caso, con criterio similar al dado para el Proceso de supervivencia.

Con el fin de tener una gran probabilidad de éxito en las aseveraciones anteriormente realizadas, con carácter postulacional, se proponen por último en la Sección V dos contrastes previos de las mismas; uno inherente a la caracterización funcional, – tanto para Vida como para No Vida, y otro aplicable a la validez de la Hipótesis de alternativas de Lehmann generalizadas, aplicando para los primeros el contraste del signo y los específicos y para el segundo, un estadístico r-muestral, cuyas propiedades y Ley de Probabilidad son evidentes.

Summary

In this communication the author considers random processes with separable variables which are equivalent to phenomena expressible by probability laws belonging to a class generalized by Lehmann. He gives a criterion to characterize them.

The author then applies his results. He first considers random processes of survival for which the variables are separable. The distribution functions are determined from mortality tables and their empirical counterparts are derived from observation. Dependence on time is achieved by considering the interval corresponding to a given probability. The author applies the Smirnov-Kolmogorov test in the manner described in a preceding communication.

Applications to non-life insurance are then considered, particularly phenomena related to claim amounts. The distributions encountered are of various types and their study is effected by a similar procedure to that utilized for survival processes.

In order to clinch his arguments the author proposes, in section V, two tests: one concerns the structure of the functions in life and non-life insurance, and the other the generalized Lehmann alternatives. The first relates to the sign test and its properties; the second is a multivariate statistic with obvious properties.

Résumé

Dans cette communication, l'auteur prête son attention aux processus aléatoires de variables séparables, lesquels sont équivalents aux phénomènes exprimés par certaines lois de probabilité (fonctions de distribution appartenant à une classe d'alternatives généralisées de Lehmann); il donne un critère réduit pour les caractériser.

Ces principes démontrés, il passe à l'application des résultats. En premier lieu, il considère les processus aléatoires de survie, dont le type des fonctions de répartition exige la condition, pour les variables, d'être séparables. Les fonctions de répartition théoriques se déterminent à partir des tables de mortalité, et les fonctions de répartition empiriques directement à partir de l'observation. La dépendance du temps s'obtient en recherchant l'intervalle correspondant à une probabilité donnée. L'auteur applique le procédé statistique de Smirnov-Kolmogorov (qui a les mêmes propriétés que le test d'hypothèse), procédé qui a été décrit dans une communication précédente.

Puis l'auteur considère des applications aux assurances non-vie, notamment aux phénomènes liés aux montants des sinistres. Les fonctions de répartition recontrées appartiennent aux divers types étudiés. Leur étude s'effectue à partir d'un critère semblable à celui qui a été utilisé pour le processus de survie.

Afin d'étayer son argumentation, l'auteur propose enfin en section V deux tests de même nature: l'un concerne la structure des fonctions, en assurance-vie et non-vie, l'autre les alternatives généralisées de Lehmann. Le premier test porte sur le signe et ses propriétés, le second sur une statistique multivariée dont les propriétés sont évidentes.

Zusammenfassung

In dieser Studie beschäftigt sich der Autor mit Zufallsprozessen separabler Variablen, welche zu Erscheinungen äquivalent sind, die durch gewisse Gesetze der Wahrscheinlichkeit (Verteilungsfunktionen, die zu einer Klasse gehören, welche von Lehmann verallgemeinert worden ist) beschrieben werden. Er gibt ein Kriterium an, um diese zu charakterisieren.

Danach wendet der Autor die Ergebnisse an. Zuerst betrachtet er Zufallsprozesse des Ueberlebens, deren Typ von Verteilungsfunktionen verlangt, dass die Variablen separabel sind. Die theoretischen Verteilungsfunktionen werden aus Sterbetafeln, die empirischen direkt aus Beobachtungen abgeleitet. Die Abhängigkeit von der Zeit erhält man durch Untersuchung desjenigen Intervalls, welches einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit entspricht. Der Autor wendet das statistische Verfahren von Smirnov-Kolmogorov an, welches die gleichen Eigenschaften wie der Hypothesentest besitzt, und in einer früheren Veröffentlichung beschrieben worden ist.

Anschliessend betrachtet der Autor Anwendungen in der Nichtlebensversicherung, namentlich bei Erscheinungen, welche die Schadenhöhe betreffen. Die entsprechenden Verteilungsfunktionen gehören zu verschiedenen Typen; sie werden in ähnlicher Weise untersucht wie die Prozesse des Ueberlebens.

Um seine Argumentationen zu stützen, schlägt der Autor in Abschnitt V zwei Tests vor: Der eine betrifft die Struktur der Funktionen in der Lebens- und Nichtlebensversicherung, der andere die verallgemeinerten Alternativen von Lehmann. Der erste Test bezieht sich auf den Vorzeichentest und seine Eigenschaften, der zweite auf eine multivariate Statistik mit ihren bekannten Eigenschaften.