Modelo de valoración y análisis del descuento de flujos de caja. Aplicación a una entidad aseguradora

EVA MARÍA DEL POZO GARCÍA(*)
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Aunque los principios del descuento de flujos de caja han formado las bases para la ciencia actuarial del seguro de vida, es relativamente reciente su introducción para el uso en seguros de no-vida. Tanto los modelos de tiempo discreto como los de tiempo continuo han sido aplicados a necesidades de valoración de aseguradoras, y a ellos va dirigido el contenido de este estudio.

1. INTRODUCCIÓN

Una empresa, ya sea o no de seguros puede ser valorada de muy distintas formas, dos de los planteamientos utilizados para determinar el valor de una empresa son la diferencia entre sus activos y sus obligaciones en un momento determinado *«Modelo Activos-Obligaciones»* o el cálculo de valor actual de sus flujos de caja futuros, *«Modelo de descuento de flujos de caja»*. Los resultados de estos procedimientos son la clasificación del valor intrínseco de la empresa y, por tanto, mediante estos resultados se puede evaluar la solidez financiera de la misma. El valor intrínseco puede diferir del valor de mercado, valor en libros, o valor de liquidación, sin embargo es el que se considera para presentar el valor real de la empresa.

Un principio fundamental de las finanzas en que el valor de cualquier activo es igual al valor actual de sus flujos de caja. Como los contratos de seguros implican flujos de caja en diferentes momentos del tiempo, el método del descuento de flujos de caja proporciona un planteamiento natural para la valoración de una entidad aseguradora.

2. MODELO ACTIVOS/OBLIGACIONES

La valoración de una compañía aseguradora mediante el uso del modelo de activos/obligaciones se determina por la diferencia entre sus activos y sus obligaciones en un momento dado, y viene representado por la siguiente ecuación:

$$V = \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{j=1}^{m} L_i \qquad (1)$$

donde:

V = Valor de la empresa.
A = Activos.
L = Obligaciones.
m, n = número de diferentes activos y obligaciones.

(*) La autora agradece la financiación del Ministerio de Ciencia y Tecnología, Dirección General de Investigación, con el proyecto de referencia BEC-2001-1441.

Es relativamente fácil valorar los activos de un asegurador, pero no así sus obligaciones, puesto que la principal obligación de una empresa aseguradora es el pago de los siniestros y ésta, como es sabido, es una variable aleatoria. Los valores que deberían ser utilizados tanto para activos como para obligaciones no son los valores en libros o valores contables, sino valores de mercado reales. Por ejemplo, se deberían incluir los bonos a largo plazo al precio de mercado, no al valor de amortización. Las reservas deberían ser descontadas a un adecuado tipo de interés. También se deberían incluir activos no financieros tales como la cuota de mercado, fondo de comercio y competitividad, aunque la asignación de valores a elementos intangibles es bastante difícil.

Un estudio de valoración de la industria del seguro (Foster 1977) de no-vida examina el tema de cómo considerar las ganancias por inversiones y las plusvalías. Este estudio utilizó 22 aseguradores para el período 1964-1972 y el resultado fue que tanto unas como otras deberían estar incluidas en la determinación del valor de capital propio del asegurador.

3. ANÁLISIS DEL DESCUENTO DE FLUJOS DE CAJA

El análisis del descuento de flujos de caja incluye diversas técnicas para ayudar a la empresa en la selección de proyectos en los que invertir. Estas técnicas no son teorías empíricas, aunque utilizan cálculos matemáticos para determinar los flujos de caja de los diferentes períodos. El hilo común entre estas técnicas es que los flujos de caja son descontados para reflejar el valor del dinero en el tiempo. Esto que es característico de las finanzas, es prácticamente ignorado en los seguros de no-vida, resultando confuso el beneficio, inexacta la valoración y existiendo divergencia entre la consideración aseguradora y la terminología contable.

La primera técnica de descuento de flujos de caja es el método del valor actual neto (VAN). En *éste se calculan todos los flujos de caja asociados* a un proyecto, tanto los positivos como los negativos, que son descontados al tipo de descuento seleccionado y luego se suman. El tipo de descuento seleccionado es el tipo de rendimiento ideal que la compañía busca para sus inversiones. Si el valor actual neto de un proyecto es positivo, la inversión generará flujos de caja adecuados ya que su tasa de rentabilidad es mayor que el tipo ideal. Si por el contrario este es negativo, el proyecto no se debería llevar a cabo. La determinación del VAN simplemente indica si la rentabilidad de un proyecto es mayor o menor que la tasa objetivo pero no indica cuanto difiere del objetivo.

La fórmula para determinar el VAN es:

$$VAN = \Sigma\, CF_i/(1 + r)^i \qquad (2)$$

donde:

VAN = es el valor actual neto del proyecto o inversión.

CF_i = es el flujo de caja del período i.

r = es el tipo de descuento. Se supone constante.

En el proyecto las inversiones se introducen con signo negativo y los ingresos con signo positivo.

Después de calcular el VAN para un conjunto de oportunidades de inversión, los directivos pueden hacer frente a la elección de las inversiones, y elegirán entre aquellos que tengan un VAN positivo.

Otra técnica de inversión es la llamada índice de beneficios, que puede ser utilizada para seleccionar las inversiones más ventajosas dentro de un número de posibles elecciones. En la técnica del índice de beneficios (también llamada ratio beneficio/coste) el valor actual de los rendimientos futuros descontados al tipo de descuento seleccionado se divide por el valor actual de los gastos de las inversiones descontados al mismo tipo. Las inversiones más rentables darán un mayor índice. Este índice, sirve por tanto para clasificar los proyectos de inversión, siendo recomendable abordar en primer lugar aquellos con un índice más alto.

La última técnica de descuento de flujos de caja es la del cálculo de la tasa interna de rendimiento. Se trata de calcular el tipo de descuento al cual el valor actual del proyecto es cero. Por tanto, más que seleccionar un tipo de interés y calcular el valor actual, se iguala el valor actual a cero y se calcula el tipo de interés. Los proyectos disponibles pueden entonces ser ordenados por la tasa interna de retorno, seleccionando primero aquellos con tasas más altas.

Para el cálculo de la tasa interna de retorno se introducen los gastos de las inversiones con signo negativo y los ingresos con signo positivo y se omiten los beneficios y pérdidas. Por ejemplo, se ignora la depreciación de una inversión en la denominación de la tasa interna de retorno, pero los impuestos sobre beneficios derivados de esa depreciación se han de incluir si afectan a los flujos de caja reales. El cálculo se representa por:

$$\Sigma\, CF_i/(1+r)^i = 0 \qquad (3)$$

Una dificultad con la solución de esta ecuación es que r puede tener más de un valor si los signos de los flujos de caja cambian más de una vez. En una inversión típica, el flujo de caja es negativo el primer año y positivo los siguientes. Esto implica un solo cambio de signo y al resolver la ecuación sólo obtendremos un valor para r. Sin embargo, si los flujos de caja varían de signo en períodos posteriores, podríamos obtener varios valores de r al resolver la ecuación. El número de valores positivos de r es al menos igual al número de variaciones en el signo. Nunca se pueden dar múltiples soluciones de r, por tanto es difícil aplicar el método de la tasa interna de retorno. Existen distintas técnicas que se ocupan de los múltiples valores de r. Una solución es ignorar valores irrealistas como los valores negativos o aquellos valores positivos muy altos. Otra posibilidad es descontar las inversiones (flujos de caja negativos) a una tasa predeterminada para llegar a un solo valor negativo equivalente al valor del primer año. De este modo el proyecto solo tendrá un signo y por tanto una única solución. Una recomendación adicional para los activos y obligaciones es seleccionar aquellos que reúnan unas determinadas condiciones y excluir aquellos que no las cumplan, por ejemplo incluir el requisito de que la función de valor actual no contenga raíces negativas, etc. En resumen, el método de la tasa interna de retorno es difícil de aplicar cuando los signos de los flujos de caja varían más de una vez.

Un gran problema en la aplicación del método de la tasa interna de retorno a los seguros de no-vida es definir los flujos de caja. Este método normalmente se aplica a proyectos con una inversión inicial (flujo de caja negativo) que produce flujos de caja futuros positivos. Los flujos de caja en el negocio asegurador son bastante más complicados, y está siendo debatido qué flujos de caja hay que considerar y cada cuanto tiempo.

La principal entrada de flujos de caja para los aseguradores no-vida son los ingresos por primas. Es diferente, por tanto, a las inversiones tradicionales ya que en este caso las entradas de flujos preceden a las salidas correspondientes a los pagos de siniestros y gastos. Sin embargo, las primas no siempre se pagan de una sola vez al inicio del contrato, existen pagos fraccionados. De esta forma el asegurador puede recibir ingresos después de finalizar el contrato o después del pago de los siniestros. Otra distinción es la diferencia entre la prima suscrita y la prima devengada. Aunque el asegurador recibe la prima suscrita, debe mantener la parte no devengada o consumida de la prima como reserva para cubrir la siniestralidad correspondiente a la parte del período que aún no ha expirado. Las primas suscritas representan las entradas reales de flujos de caja, mientras que las primas devengadas son similares a la depreciación y pueden ser ignoradas a la hora de determinar la tasa interna de retorno. Cualquier plan de fraccionamiento de primas pueden acomodarse para el cálculo de la tasa interna de retorno simplemente mediante la imputación de flujos positivos que entran a los fondos del asegurador.

Los gastos representan los flujos negativos, e incluyen las inversiones, los impuestos sobre primas y comisiones así como otros gastos inherentes a las operaciones. El tratamiento común para los gastos asociados a la liquidación de los siniestros es considerarlos como un pago realizado en el momento en que la póliza se suscribe. Sin embargo, algunos gastos asociados con las pólizas se pagan antes de que se genere el ingreso. El desglose de los costes incluye los gastos de comercialización de las pólizas, obtención de aprobación reguladora, establecimiento de sistemas y procedimientos internos y formación de agentes vendedores de pólizas. Aunque la medida exacta de las cuantías y vencimientos de los flujos de cada es extremadamente difícil, ignorar gastos de cierta naturaleza hace que la tasa de retorno sea mayor de lo que realmente es, por ello, se puede considerar una parte de los gastos para resolver temporalmente este problema.

Los grandes flujos de caja negativos que experimenta el asegurador son los siniestros y los gastos inherentes a los mismos. Estos pagos se realizan después del inicio de la póliza y no son conocidos hasta que el último siniestro es liquidado (en ocasiones varios años después de que expire la póliza) y varían estocásticamente. Se utilizan generalmente estimaciones de la siniestralidad y de sus gastos, que deberían tratarse como flujos de caja de salida cuando se han pagado. Generalmente, las estimaciones de pagos de siniestros futuros son determinados en combinación con los pagos reales de siniestros basados en la experiencia de años anteriores.

Las compañías aseguradoras deben mantener un remanente financiero para suscribir pólizas. Este remanente puede ser invertido, de acuerdo a las restricciones reguladoras, pero debe estar disponible para amortiguar la financiación de posibles circunstancias adversas. El excedente inicial, cuando se establece, representa un flujo de caja de salida (inversión) pero después cuando se libera, representa un flujo de entrada. La regulación generalmente estipula que el excedente representa una cierta proporción de las primas suscritas. Otro supuesto es que el excedente se puede considerar como una inversión cuando las primas se suscriben y se reciben y como un ingreso cuando la reserva por primas no devengadas o consumidas se va devengando. No obstante, si el excedente es considerado como necesario para amortiguar circunstancias adversas de la reserva para siniestros, un supuesto más realista sería reducir el excedente en la medida en que se va empleando la reserva para siniestros. El excedente debería mantenerse en proporción a la reserva para siniestros pendientes en vez de en proporción a la reserva para primas no devengadas.

4. MODELO DE DESCUENTO DE FLUJOS DE CAJA

El modelo estándar para determinar el valor de la empresa está bien representado por el modelo creciente de Gordon. Este modelo supone que el valor intrínseco de la empresa es el valor actual descontando los flujos de caja futuros. El modelo se representa:

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{CF_t}{(1 + r_e)^t} \qquad (4)$$

donde:

CF = Flujos de caja.

r_e = Rendimiento requerido sobre el capital.

t = Indicador temporal.

Si se supone que los flujos de caja crecen a una tasa constante g, entonces este modelo se reduce a:

$$V = \sum_{t}^{\infty} \frac{F_0\,(1 + g)^t}{(1 + r_e)^t} = CF_1/(r_e - g) \qquad (5)$$

Si varía la tasa de crecimiento g o el tipo de descuento re, el modelo sería:

$$V = \frac{CF_0(1+g_1)}{(1+r_{e1})} + \frac{CF_0(1+g_1)(1+g_2)}{(1+r_{e1})(1+r_{e2})} + \ldots + \frac{CF_0(1+g_1)(1+g_2)\ldots(1+g_n)}{(1+r_{e1})(1+r_{e2})(1+r_{en})} \qquad (6)$$

4.1. Modelo en tiempo discreto

Se puede utilizar un modelo simple para dos períodos (momentos 0 y 1) para ilustrar algunos importantes conceptos en el análisis del descuento de flujos de caja. Consideremos una póliza que tiene que hacer frente a una siniestralidad cuyo valor es L_0 en el momento actual. La prima se paga al comienzo del año, y el pago de los siniestros se realiza al final del año. El tipo de interés es r, la tasa de inflación general es (i) y la tasa de inflación del seguro es π.

Se supone que se mantienen las hipótesis de Fisher, es decir que:

$$(1 + r) = (1 + i)(1 + r_r)$$

donde r_r es tipo de interés real. La tasa real puede ser interpretada como el coste del dinero en una economía con inflación cero. La prima obtenida mediante el descuento de los flujos de caja es:

$$P = \frac{L_0(1+\pi)}{(1+i)(1+r_r)} \qquad (7)$$

Si la inflación del seguro es igual que la inflación general la prima es:

$$P = \frac{L_0}{(1+r_r)} \qquad (8)$$

Por lo tanto, si $i = \pi$, la prima se puede obtener descontando el valor de la siniestralidad a la tasa real. En este caso, no es necesario estimar la inflación de la siniestralidad. Sin embargo, si la inflación general y la del seguro no son iguales, entonces es necesario utilizar la primera ecuación de la prima y estimar la inflación de la siniestralidad.

Un resultado importante del modelo de dos-períodos es la relación que existe entre la inflación anticipada, los tipos de interés y la prima. Además, ya que el valor esperado de la siniestralidad al inicio del período siguiente es $L_0(1 + \pi)$, las primas deberán incrementarse en el tiempo incluso aunque la inflación del seguro sea igual que la general.

El modelo también muestra una importante relación entre los tipos de interés y los beneficios de negocio asegurador. Para mostrar esto, se supone que la inflación anticipada general y del seguro son iguales y que la inflación real es exactamente igual a la inflación anticipada. Los siniestros son descontados y reflejan una inflación estimada durante el período de pago. Entonces los beneficios del negocio asegurador son:

$$r_u = \frac{P-L}{P} = \frac{\dfrac{L_0}{1+r_r} - L_0(1+i)}{\dfrac{L_0}{1+r_r}} = $$

$$= L_0 - \frac{L_0(1+i)(1+r_r)}{L_0} = -r \qquad (9)$$

Por tanto se espera que los beneficios del negocio asegurador estén altamente correlacionados con los tipos de interés nominales.

Los modelos de descuento de flujos de caja en tiempo discreto son ampliamente utilizados en EE.UU. Los dos modelos más importantes: el modelo de Myers-Cohn y el modelo del Consejo Nacional de compensación al seguro (NCCI) son analizados en Cummins (1990).

El modelo de Myers-Cohn es una aplicación del método del valor actual ajustado (APV). Los pasos en la aplicación del método APV para analizar un proyecto son los siguientes:

1. Estimar la cuantía y frecuencia de los flujos de caja esperados para el resultado del proyecto.
2. Estimar la tasa de descuento ajustada al riesgo para cada flujo.
3. Calcular el valor actual de los flujos de caja utilizando la tasa anterior.

4. Si el valor actual es mayor que cero, aceptar el proyecto.

Se descuenta cada flujo de caja de su propia tasa de descuento ajustada al riesgo. La póliza es valorada como si varios flujos se pudieran comprar y vender por separado, evitando la creación de oportunidades de arbitraje.

El objetivo del modelo Myers-Cohn es determinar la prima justa del seguro. La prima se define como justa si a la compañía aseguradora le es exactamente indiferente entre vender o no vender la póliza. Al asegurador le será indiferente si el valor de mercado de su capital no cambia cuando vende esa póliza. Aunque parece que este argumento no está de acuerdo con el principio de beneficio, es consistente con la maximización del beneficio en un mercado competitivo. Cuando hay competitividad, cada producto se vende por el precio que se pagará exactamente por los factores de producción. Por tanto, la prima debería ser suficiente para pagar los factores de producción (incluyendo el capital) pero no más de esa cuantía.

Para simplificar, se considera un modelo para dos períodos, con flujos en los momentos 0 y 1. Este modelo se puede generalizar para múltiples períodos. También para simplificar, se ignoran los flujos de gastos.

Los flujos de primas se producen en el momento 0 y los flujos de siniestros en el momento 1. Estos flujos son descontados a tipos diferentes (por supuesto, los flujos de primas no se descuentan en este ejemplo puesto que se producen en el momento 0). Los flujos de primas se consideran libres de riesgo y por tanto son descontados al tipo libre de riesgo. Los flujos de siniestros obviamente tienen riesgo y son descontados a una apropiada tasa de descuento de riesgo ajustada.

Los impuestos sobre beneficios se supone que se pagan en el momento 1, ya que estos están basados en la diferencia entre primas y siniestros, los flujos de impuestos pueden ser divididos en dos partes, la parte de siniestros y la parte de las primas cada uno descontado a su tasa apropiada.

Otro flujo de caja es el impuesto sobre las inversiones. La suscripción de la póliza crea una inversión en el balance porque la prima se paga antes de la fecha del abono de los siniestros y la compañía tiene un capital excedente comprometido (capital propio) con la póliza. Este capital excedente y las primas son invertidos y se pagan impuestos sobre los ingresos de las inversiones en el momento 1. Se supone que los fondos son invertidos al tipo libre de riesgo, en cuyo caso el impuesto descuenta a este tipo. Myers considera que el impuesto sobre ingresos por inversiones con riesgo también debería ser descontado al tipo libre de riesgo.

Descontando cada flujo y simplificando llegamos a la siguiente expresión:

$$P = \frac{E(L)}{1 + R_L} + \frac{t\delta P R_f}{1 - t}\left(\frac{1}{1 + R_f}\right) \qquad (10)$$

donde:

E(L), P: son los valores esperados de siniestros y primas respectivamente.

R_L: El tipo de descuento ajustado al riesgo para los siniestros.

t: El tipo impositivo de los ingresos.

δ: La tasa de excedente comprometido (ratio Excedente/primas).

La tasa de descuento ajustada al riesgo para los siniestros, R_L es igual a $R_f + \lambda$, donde λ es el riesgo de las primas.

Considerando la tasa de riesgo ajustada del CAPM:

$$R_L = R_f + \beta_L (E_m - R_f) \qquad (11)$$

donde:

$\beta_L = Cov\,[L_1 / E(L_0), R_m / Var(R_m)]$
L_t= *Siniestralidad en el momento t*

El modelo de Myers-Cohn normalmente se aplica empleando la tasa de descuento ajusta al riesgo del CAPM. Sin embargo, no es un modelo inherente al CAPM, y se puede usar cualquier tasa de descuento ajustada al riesgo teóricamente defendible. Para ser teóricamente defendible, la tasa debe estar basada en un modelo económico que tenga un comportamiento racional en el contexto del mercado. Por ejemplo, el modelo APV en lugar del CAPM. Cummnis (1988b) ha obtenido una tasa de descuento que es apropiada para un asegurador con probabilidad de falta de pago distinta de cero. Las reglas tan severas que imponen los modelos financieros para seleccionar un tipo de descuento, representan una importante diferencia entre el planteamiento de Myers-Cohn y los modelos actuariales tradicionales de descuento de flujos de caja.

Un hecho del modelo es que no está claro en la fórmula de período único el concepto de flujo de excedente. Myers y Cohn suponen que el excedente está comprometido para la póliza cuando la póliza es suscrita y gradualmente se relaja según se van pagando los siniestros. El patrón de los flujos de excedente tiene un impacto importante sobre las primas ya que afecta a los impuestos de las inversiones del balance.

Una cuestión no resuelta en este modelo y, por tanto, en los modelos financieros en general, es el nivel apropiado de excedente o capital propio comprometido. Normalmente, el ratio excedente/primas está basado en la media histórica de la compañía para el mercado del seguro global. Ningún planteamiento resulta satisfactorio, particularmente en una compañía multirriesgo donde las líneas tienen diferentes riesgos característicos. La solución para el problema del capital comprometido y su asignación representaría una importante contribución a la teoría financiera del seguro.

El modelo Myers-Cohn es consistente con la teoría financiera y relativamente sencillo de aplicar en la práctica. El modelo es engañosamente simple y omite sutiles pero importantes detalles en la definición y tratamiento de los flujos de caja. Puede ser utilizado para representar el estado de la cuestión en la práctica de los modelos financieros aplicados al seguro. Presenta la dificultad de estimar el ratio excedente/primas y la tasa de descuento ajustada al riesgo.

4.2. Modelos en tiempo continuo

4.2.1. Condiciones de certeza

Los modelos de tiempo continuo para la valoración del seguro han sido desarrollados por Kraus y Ross (1982) y Cummnins (1988). Para introducir este tópico, Kraus-Ross consideran un modelo dinámico en tiempo continuo bajo condiciones de certeza.

Para simplificar el modelo, suponen que el valor de los siniestros está determinado por un proceso en el momento 0. Los pagos por siniestralidad son valorados al tanto instantáneo θ, mientras que la inflación de la siniestralidad lo está a una tasa exponencial π, y se descuentan al tipo de interés libre de riesgo. La ecuación diferencial para el tipo de cambio en siniestros pendientes en el momento t, en ausencia de inflación, es la siguiente:

$$\frac{dC_t}{dt} = -\theta C_t \qquad (12)$$

donde C_t es la cuantía de siniestros impagados en el momento t en términos reales, es decir no se tiene en cuenta la inflación. Resolviendo esta expresión para C_t, la rentabilidad resultante es la siguiente:

$$C_t = C_0 e^{-\theta t} \qquad (13)$$

Por lo tanto, el supuesto es que los siniestros pendientes siguen un proceso exponencial decadente.

Considerando la inflación, el valor de la siniestralidad en cualquier momento t es: $L_t = \theta C_t e^{\pi t}$. La prima es el valor actual de la siniestralidad obtenido de la siguiente forma:

$$P = \int_0^x L_t e^{-rt} dt = \int_0^x C_0 e^{-(r+\theta-\pi)t} dt = \frac{C_0}{r+\theta-\pi} \qquad (14)$$

En esta ecuación, θ es el parámetro de una distribución exponencial. Esto implica que $1/\theta$ es el tiempo medio de pago, suponiendo que hay inflación. Mientras que la exponencial proporciona algún modelo intuitivo, probablemente es demasiado simple para ser aplicado a los patrones reales de siniestros pendientes. El autor considera que la distribución gamma es adecuada para tratar los datos de los siniestros pendientes del seguro de automóvil en EE.UU.

El modelo también puede emplearse para estimar las reservas:

$$C_T = \int_0^x C_0 e^{-(r+\theta-\pi)t} dt = \frac{\theta C_0}{r+\theta-\pi} e^{-(r+\theta-\pi)t} \qquad (15)$$

donde C_T es el valor de mercado de las reservas en el momento t.

4.2.2. Modelo en incertidumbre. Kraus-Ross

Kraus y Ross también introducen un modelo en tiempo continuo bajo condiciones de incertidumbre. Este modelo está basado en la teoría de valoración de arbitraje (ATP). El modelo de Kraus-Ross permite relacionar la incertidumbre del mercado con la frecuencia e inflación de la siniestralidad.

La fórmula siguiente es la ecuación diferencial para el proceso de siniestralidad:

$$\frac{dC_t}{dt} = \alpha(t) - \theta C_t \qquad (16)$$

donde α(t) es la frecuencia de accidentes en el momento t. La frecuencia del proceso afecta a la evolución de los siniestros pendientes durante el período considerado T (período de la póliza). Después de este momento no se pueden archivar nuevos siniestros. Durante el período completo (de 0 a ∞) los siniestros son liquidados al tanto instantáneo , pero ajustados a la inflación de acuerdo al índice de precios q(t).

Los parámetros α(z) y q(t) están dominados por k factores económicos de la APT. En tiempo contijuo, estos factores son modelizados como un proceso de difusión:

$$dx_i = m_i x_i dt + \sigma_i x_i dz_i \quad i = 1, 2, ..., k \qquad (17)$$

Los parámetros son funciones logarítmico-lineales de los factores:

$$\log(q) = \sum_{i=1}^{k} q_i \ \log(x_i) + \log(q_0) \qquad (18)$$

donde q_0 es el nivel de precio de siniestralidad media al comienzo de la póliza y q_i, $i = 1, 2, ..., k$ son constantes.

El APT implica que el valor de los siniestros pendientes en cualquier momento t, V(x, C, t), donde x es el vector de los xi, está dominado por la siguiente ecuación diferencial:

$$E\left[\frac{dV}{V}\right] + \left[\frac{\theta qC}{V-r}\right]dt = \sum_{i}^{k} =$$

$$= 1\lambda_i\sigma_i \left[Cov\left(\frac{dV}{V}\frac{dx_i}{x_i}\right)\Big/\mathrm{Var}\left(\frac{dx_i}{x_i}\right)\right]dt \qquad (19)$$

donde:

λ_i = es el precio de mercado del riesgo para el factor $i = (r_{mi} - r)\ \sigma_i$

r_{mi} = rendimiento del mercado sobre una cartera que perfectamente correlacionada con i-ésimo factor de riesgo.

La fórmula de la prima se obtiene mediante la aplicación de una versión multivariante del lema de Ito y resolviendo la ecuación diferencial resultante queda:

$$P = \left(\frac{\theta\alpha_0 q_0 L_0}{\rho+\theta}\right)\left[\frac{1 - e^{-\rho_\alpha T}}{\rho_\alpha}\right] \qquad (20)$$

donde:

$$\rho = r - \pi + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\sigma_i q_i$$

$$\rho_\alpha = r - \pi_\alpha + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\sigma_i(q_i + \alpha_i)$$

$$\pi = \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{2}\sigma_i^2 q_i(q_i - 1) + q_i m_i\right]$$

$$\pi = \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{2}\sigma_i^2(\alpha_i + q_i)(\alpha_i + q_i - 1) + (\alpha_i + q_i)m_i\right]$$

La prima obtenida mediante esta ecuación es similar a la prima para el caso de certeza excepto si existe recargo de seguridad (término) en el denominador. Estos recargos son recompensas para la compañía para soportar el riesgo sistemático. y son los «coeficientes beta» del modelo.

Para que la compañía reciba una recompensa positiva por el riesgo soportado, el término recargo de seguridad debe ser negativo, es decir, la siniestralidad debe estar negativamente correlacionada con algunos de los factores del mercado de forma que el recargo neto sea negativo. Esto reduce el denominador y lleva a aumentar el valor descontado de los siniestros.

El modelo requiere la estimación de los precios de mercado para los k factores de riesgo así como los coeficientes beta actuariales. Esto podría ser difícil dados los datos disponibles. Como la mayoría de los modelos financieros de valoración del seguro, este modelo da el precio de la póliza del seguro que está libre de riesgo. No obstante, el modelo de Kraus-Ross representa una importante contribución a la doctrina de valoración financiera.

4.2.3. Un modelo sin riesgo

Cummins ha desarrollado un modelo en tiempo continuo exponencial. Este modelo puede ser usado para valorar una compañía de seguros o una póliza o bloque de pólizas. La hipótesis del modelo es que los activos y obligaciones siguen un movimiento geométrico browniano.

$$dA = (\alpha_A A - \theta L)dt + A\sigma_A dz_A \qquad (21.a)$$

$$dL = (\alpha_L L - \theta L)dt + A\sigma_L dz_L \qquad (21.b)$$

donde:

A, L = Activos y obligaciones.

$dz_A(\mathrm{t}) \cdot dz_L(\mathrm{t})$ =

$\alpha_A \cdot \alpha_L$ = Parámetros de la variación de los activos y obligaciones.

$\sigma_A \cdot \sigma_L$ = Parámetros de riesgos de los activos y obligaciones.

θ = Parámetro de siniestros runoff.

El proceso relaciona los activos y obligaciones de la siguiente forma:

$$\rho_{AL} = \mathrm{cov}(dz_A, dz_L) \qquad (22)$$

El modelo es más realista que el modelo de opciones ya que no está fijada la fecha de vencimiento, pero además permite la existencia de obligaciones pendientes con un horizonte temporal infinito. En efecto, las obligaciones del modelo son perpetuas sujetas a una exponencial decadente. Por tanto, es un modelo mejor que el modelo de opciones para líneas de larga cola.

Cummins utiliza el modelo para obtener el valor de mercado de sin riesgo, D(A, L). Utilizando el lema de Ito para diferenciar D y usando algún argumento de cobertura o el Insurance CAPM para eliminar el riesgo, se obtiene la ecuación diferencial hipergeométrica. La solución es:

$$D(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+a)} b^a x^{-a} e^{-b/x} M(2,2+a, b/x) \qquad (23)$$

donde:

$a = 2(r_r + \theta) / Q$

$b = 2\theta / Q$

$Q = \sigma_A^2 + \sigma_L^2 + 2\sigma_A\sigma_L 2\rho_{AL}$

M = *función de Kummer*

Este modelo perpetuo ha significado un potencial para la valoración de bloques de pólizas sin riesgo. Es más sencilla la estimación de problemas que en el modelo de Kraus-Ross ya que solo se necesita estimar la varianza y la covarianza de los activos y obligaciones en vez de las betas y factores de riesgo de las primas.

5. APLICACIONES A LA VALORACIÓN DE UNA EMPRESA DE SEGUROS

El modelo se aplica principalmente para calcular el valor de venta de la empresa, como diferencia entre sus flujos positivos (cobro de primas) y negativos (principalmente gastos por siniestros), también permite calcular el precio competitivo de las pólizas de seguro, así como la tasa de beneficio del negocio asegurador para dar un rendimiento adecuado a los accionistas.

Como ya hemos dicho, el modelo de descuento de flujos de caja puede ser aplicado para valorar la empresa. El primer problema en la aplicación del modelo de descuento de flujos de caja es la determinación de la tasa de descuento adecuada. No se ha llegado a un consenso sobre este tema. Los valores propuestos incluyen el tipo libre de riesgo, el tipo disponible para los valores del tesoro y el tipo de una cartera de un asegurador con inversiones en renta fija. Myers y Cohn (1981) recomendaron el método de combinar el CAPM con la técnica de descuento de flujos de caja determinando el tipo adecuado utilizando el CAPM.

Considerando por ejemplo (D'arcy y Docherty 1988), dos líneas de seguro A y B, siendo A de cola corta y B de cola larga. Por cada unidad de prima recibida, cada línea tiene un 30% de gastos iniciales. La distribución de pagos de siniestralidad a lo largo del tiempo para cada línea es:

Fecha de liquidación	Pagos por siniestralidad %	
en meses	Póliza A	Póliza B
3	20	-
6	30	-
9	20	-
12	-	20
18	-	30
24	-	20

Hay unas entradas constantes de primas y constantes salidas de gastos y siniestros. Si la línea A es estable, cada unidad de ingresos por primas anuales debería ir emparejada con un 35% de fondos invertibles. Esto se calcula restando el 30% de gastos y multiplicando el 70% restante por la duración media de los fondos invertidos antes del pago de los siniestros. En la línea A la duración media de inversión son 6 meses, por tanto 0,5 años × 70% = 35%. En la línea B la media son 18 meses y el ratio de ingresos por primas-fondos invertidos es: 1$ / 1,05$ (70% · 1,5 = 105% = 1,05). Este método de cálculo de fondos invertibles es válido si se trabaja con fondos estables a lo largo del tiempo. Sin embargo, si la tendencia del fondo es a subir o a bajar, hay otras alternativas como el método de Myers y Cohn. Este método también utiliza la lógica del CAPM para determinar la tasa apropiada para el descuento de flujos de caja futuros.

Para comprender el método del descuento de flujos de caja, comenzamos por la ecuación básica del CAPM que muestra la tasa de retorno de equilibrio de una empresa.

$$E(r) = r_f + \beta[E(r_m) - r_f] \qquad (24)$$

La definición del rendimiento esperado se basa en el incremento del valor de la firma. El valor del incremento es el cambio del valor actual conocido V_t cuando ha transcurrido un año V_{t+1}. Para simplificar no se incluyen los dividendos. Por tanto:

$$E(r) = \frac{E(V_{t+1}) - V_t}{V_t} = \frac{E(V_{t+1})}{V_t} - 1 = E(r) =$$
$$= r_f + \beta[E(r_m) - r_f] \qquad (25)$$

Despejando V_t de la ecuación anterior tenemos la expresión para el valor:

$$V_t = \frac{E(V_{t+1})}{1 + r_f + \beta[E(r_m) - r_f]} \qquad (26)$$

Por tanto el CAPM puede considerarse como un modelo simple de valoración en el que el valor es establecido descontando el valor esperado al final del período o los flujos de caja al momento actual. El tipo de descuento es la tasa de retorno requerida por los inversores en un mercado competitivo, $r_f + \beta[E(r_m) - r_f]$. Este modelo de valoración es bastante poderoso. Por ejemplo, de la siniestralidad esperada, $E(L)$ en el momento $t + 1$, se determina de la siguiente forma:

$$V(L) = \frac{E(L)}{1 + r_f + \beta[E(r_m) - r_f]} \qquad (27)$$

Si se cobra una prima $V(L)$ (neta de gastos), esto debería ofrecer a los accionistas una tasa de retorno competitiva sobre el capital ya que hemos usado el riesgo en la prima $\beta_L[E(r_m) - r_f]$ requerido por los inversores para compensar el riesgo sistemático implícito en el pago de los siniestros que es:

$$\beta_L = \frac{Cov(L, r_m)}{\sigma_m^2} \qquad (28)$$

La ecuación anterior $V(L)$ representa un método alternativo para obtener el precio competitivo. Mientras que con la ecuación del CAPM:

$$E(r_u) = -k(1 - x)r_f + \beta_L[E(r_m) - r_f] \qquad (29)$$

se obtiene la tasa de beneficio del negocio asegurador requerida para dar un rendimiento competitivo a los accionistas. Mediante la ecuación $V(L)$ se obtiene la cuantía de la prima necesaria para dar un rendimiento competitivo sobre el capital. En el método del beneficio del negocio asegurador, el factor k es el coeficiente generador de fondos que corrige el lapso de tiempo que transcurre hasta que se realizan los pagos de los siniestros. Con el método DFC simplemente se supone que los siniestros se pagan el final del año. De hecho, el DFC es fácilmente adaptable para precisar la frecuencia de los flujos de caja.

El modelo básico descrito antes se puede utilizar para múltiples flujos de caja:

$$V_t = \sum_j \frac{E(C_{t+j})}{1 + r_f + \beta_j[E(r_m) - r_f]^j} \qquad (29)$$

donde:

C_{t+j} = es el flujo de caja del año $t + j$.

$$B_j = \frac{Cov(C_{t+j}, r_m)}{\sigma_m^2} \qquad (31)$$

Ahora usando el método DFC multi-periódo podemos obtener precios competitivos (netos de gastos) para las pólizas A y B descritas anteriormente. Como la frecuencia de la siniestralidad fue expresada en meses, utilizaremos los tantos de interés equivalentes $r_f^{(m)}$ y $r_m^{(m)}$. Por tanto el precio competitivo de la póliza A es:

$$P_A = \frac{20}{1 + r_f^m + \beta_L[E(r_m^m) - r_f^m]^3} + $$

$$+ \frac{30}{1 + r_f^m + \beta_L[E(r_m^m) - r_f^m]^6} + \frac{20}{1 + r_f^m + \beta_L[E(r_m^m) - r_f^m]^9} \qquad (32)$$

Análogamente, se obtiene el valor de la póliza B.

6. CONCLUSIONES

El modelo del descuento de flujos de caja (DFC) permite obtener la valoración de una empresa de seguros así como el rendimiento que deben recibir los accionistas y el precio competitivo de las pólizas, pero a la hora de realizar cualquier tipo de valoración, se ha de tener en cuenta que los siniestros no son los únicos flujos de caja que surgen con el contrato de seguros, también hay que pagar impuestos y hacer frente a otros compromisos. Evidentemente, todos los gastos no surgen precisamente en el momento de recibir las pólizas. El método DFC es flexible y se acomoda a cada flujo a lo largo del tiempo, que es descontado al tipo apropiado para estimar la covarianza con la cartera de mercado.

El método DFC en algunas ocasiones es superior al método de la tasa de retorno del negocio asegurador (Cummins 1984) por su flexibilidad en el emparejamiento de los momentos con los flujos de caja.

El CAPM es un modelo para un único período, esto implica que los inversores tienen un horizonte temporal de un período, esto implica que los inversores tienen un horizonte temporal de un período y los flujos de caja bien surgen al principio o al final del mismo. En un contrato de seguro los flujos de caja no surgen de esta forma. Se ha desarrollado un modelo multiperíodo análogo al CAPM pero su aplicación práctica a estos modelos presenta grandes problemas.

El método del beneficio del negocio asegurador describe el contrato de seguros como un contrato para un único período. Sin embargo, ajusta las distorsiones que puedan surgir en la frecuencia de los flujos de caja mediante el coeficiente generador de fondos k. En contraste, el método DFC describe el contrato como un contrato multiperíodo, pero utiliza un factor de descuento que, por aproximación, se basa en el CAPM para un período. Estrictamente hablando, ninguno de los dos métodos es consistente, en ambos se trabaja con aproximaciones, pero en cualquier caso el método DFC es superior. Ambos sufren las mismas debilidades y elegir entre uno u otro es cuestion de conveniencia.

Un comentario final sobre el método DFC es el relacionado con los ingresos por inversiones: aparentemente son ignorados. Implícitamente, este método supone que los fondos están invertidos a un tipo de equilibrio competitivo. Esto es idéntico a lo que supone el método del beneficio del negocio asegurador. Este supuesto hace que los ingresos por inversiones tengan un efecto neutral en el valor. Por tanto, los flujos de caja del negocio asegurador pueden ser examinados de forma separada y capitalizados al tipo de descuento apropiado. Este tipo se determina mediante el riesgo sistemático de cada flujo en cuestión. Los ingresos por inversiones no son ignorados, simplemente se supone que el asegurador es un inversor eficiente.

BIBLIOGRAFÍA

Cummins, J. David (1988a): «Risk-based Premiums for Insurance Guaranty Funds», *Journal of Finance,* vol. XLIII, n.° 4, págs. 823-839.

– (1988b): «Capital Structure and Fair Profits In Property-Liability Insurance», *Working Paper,* University of Pennsilvania.

– (1990): «Property-Liability Insurance Pricing Models: An Empirical Evaluation», *Journal of Risk and Insurance,* vol. LVII, n.° 3, págs. 391-430.

– (1990): «Multi-period Discounted Cash Flow Ratemaking Models In Property-Liability Insurance», *Journal of Risk and Insurance,* vol. LVII, págs. 79-109.

– (1990): «Asset Pricing Models and Insurance Ratemaking», *Astin Bulletin,* n.° 20, págs. 125-166.

– (1991): «Statistical and financial Models of Insurance Pricing and the insurance firm», *Journal of Risk and Insurance,* págs. 260-302.

D'arcy, Stephen and Doherty, Neil (1988): «The Financial Theory of pricing Property-Liability Insurance Contracts», *Philadelphia: S.S. Huebner Foundation.*

D'arcy, Stephen and Dyer, Michael (1997): «Ratemaking: A Financial Economics Approach», *Casualty Actuarial Society,* págs. 301-390.

Doherty, Neil and Garven, James (1986): «Price Regulation in Property-Liability Insurance: A Contingent-Claims Approach», *Journal of Finance,* vol. XLI, n.° 5, págs. 1.031-1.050.

Foster, G (1977): «Valuation Parameters of Property-Liability Companies», *Journal of Finance,* n.° 32, págs. 823-835.

Myers, Stewart and Cohn, Richard (1987): «A Discounted Cash Flow Approach to Property-Liability Insurance Rate Regulation».