ANGEL VEGAS Y J. IÑAKI DE LA PEÑA
Actuarios

Teoría de los valores extremos: aplicaciones a los seguros y las finanzas

A primera hora de la tarde del viernes, 16 de octubre de 1987, tras una semana de continuas bajadas bursátiles, se había visto que el índice S&P500 había bajado un 9,21% y ese mismo viernes un 5,25% en relación con el día anterior. Era la mayor caída desde 1962.

El responsable del departamento de Gestión de Riesgos de un afamado banco americano pidió a un joven contratado que calculase el peor caso que se pudiese presentar para el lunes, vista la semana que habían tenido. Tomó los índices bursátiles de cierre diario desde 1.960 y calculó los rendimientos diarios. Este joven había seguido un curso dentro de su formación actuarial sobre la Teoría de los Valores Extremos (*Extreme Value Theory*) y basándose en lo que le enseñaron decidió a hacer el análisis que le habían mandado.

Redujo sus datos a 28 pérdidas máximas anuales, correspondientes a cada uno de los años desde 1.960 e incluyó el porcentaje de bajada del índice bursátil. Ajustó esos datos a una distribución conocida como *Fréchet* y estimó varios umbrales de pérdida. Este concepto era muy popular entre los ingenieros, los cuales deben planear sus proyectos de forma que resistan las inclemencias realmente extremas como vientos huracanados e inundaciones. Por ejemplo, ese nivel o umbral de pérdida a 50 años es aquel que por término medio debe superarse una vez cada 50 años.

El empleado usó la distribución de *Fréchet* para calcular dichos umbrales de pérdida. Como había recibido una muy buena educación universitaria en estadística, también calculó los niveles de pérdida para un nivel de confianza del 95% en ese periodo de tiempo. Observó que empleando únicamente 28 puntos máximos y los estimadores de la distribución de *Fréchet* obtenía que el valor más probable de pérdida diaria en los mercados era del 7,4% en un intervalo observado de entre el 4,9% y el 24% .

Como respuesta al responsable del Departamento de Gestión de Riesgos presentó el peor caso que podían tener y éste era una caída del índice bursátil para el lunes del 24%. Este empleado podía haber determinado la pérdida máxima no sobre 28 años, sino sobre 100 o tal vez más (si tuviéramos datos, por supuesto).

Su jefe no podía creer que el lunes siguiente el índice de mercado pudiese descender un 24%, es decir, más de 4 veces lo del día anterior. Le tomo por loco.

El Lunes, 19 de octubre de 1.987, el índice S&P 500 cerró perdiendo un 20,4% de su valor inicial.

Introducción

La Teoría del Valor Extremo (*Extreme Value Theory: EVT*) es una rama de la teoría de la probabilidad que se centra en explicar valores extremos a través de una serie de modelos o distribuciones naturales. Ampliamente usada en el campo de la ingeniería y la construcción, puede ser empleada en el Reaseguro y en la gestión financiera del riesgo. El caso inicialmente planteado no es más que un ejemplo de una medida de riesgo. Antes de que hubiese ocurrido esa pérdida, la información que la EVT ofreció sobre la situación del mercado así como sus expectativas hubiesen llevado a los superiores del banco americano a tomar decisiones acertadas para cubrirse ante esa situación de pérdida.

Con la EVT se define el peor caso que puede ocurrir teniendo en cuenta la periodicidad de ocurrencia. Esta es exactamente la clase de consideración que subyace en la determinación de la resistencia de los embalses en cuanto a la presión de agua que pueden soportar, así como la delimitación de los daños que puede producir un petrolero. El proceso también puede ser inverso y nos podemos imaginar un escenario que creamos que sea extremo (como una caída del índice bursátil del 20%) y usando la EVT podremos determinar cuánto extremo es, bajo un sentido de infrecuencia de ocurrencia.

La EVT ofrece otras medidas del riesgo que no las hemos incluido en el relato inicial, como el VaR (*Value at Risk*) o valor en riesgo, la variación del VaR o la cuantía en la que el VaR puede exceder a un hecho realmente poco frecuente o raro.

Hay que tener en cuenta un punto

importante al aplicar la EVT como es la consideración de incertidumbre, una vez elegido el modelo estadístico para el umbral de pérdida máxima. Puede existir un riesgo intrínseco al modelo elegido y que, por ejemplo, puede centrarse en la asignación de los datos elegidos, el empleo de pérdidas mensuales en vez de diarias, etc. Este tema conlleva a un análisis detallado del riesgo del modelo en sí mismo.

A modo de resumen introductorio, podemos afirmar que la EVT no predice el futuro sino que nos da información sobre fenómenos extraordinarios en un espacio de incertidumbre. En el campo de los seguros y de las finanzas, puede aplicarse por tanto a la toma de decisiones y a la gestión y medida del riesgo.

Valor en riesgo –VaR-

El uso del VaR en la gestión del riesgo ha sido bastante discutido. Como actualmente es sabido, los modelos convencionales del VaR no representan realmente lo que ocurre en la realidad debido al hecho de que, por ejemplo, las caídas bursátiles no siguen una distribución de una Ley Normal en la vida real. Esto sólo significa que son menos efectivos donde debieran ser más importantes: en los valores extremos, al ocurrir más frecuentemente que bajo la distribución de una Ley Normal.

Alguno de los problemas que el VaR tiene son:

- Desde una perspectiva de gestión del riesgo, los gestores toman más en consideración el importe de las pérdidas que la periodicidad con la que pueden ocurrir.

- Nos presenta el peor caso posible donde el daño es un concepto a menudo asociado al análisis de los sucesos raros. Normalmente hace mención a la naturaleza de un evento que por definición está en los límites de ocurrencia.

«EVT nos da información sobre fenómenos extraordinarios en un espacio de incertidumbre»

- El VaR incluye una alta probabilidad de ruina financiera por lo que es necesario tomar medidas adicionales, como pueden ser mayores dotaciones de recursos, de capital.

- La recomendación realizada por el *Basle Committee* sobre la supervisión bancaria indica que el uso del VaR ha de ser el de un indicador al que añadir un factor de histeria (*hysteria factor*) [Jorion, 1997]. Este factor de histeria mitiga en cierto modo la critica realizada a los modelos VaR convencionales.

Se puede afirmar que el VaR, aunque es utilizado, no es una medida coherente en las finanzas debido a:

- A la gestión del riesgo le interesa estimar probabilidades en los extremos y distribuciones de pérdidas y ganancias asociadas.

- Importan realmente los valores extremos.

- Se necesitan métodos para estimar probabilidades condicionadas a esos eventos extremos, como por ejemplo, dado que se incurra en una pérdida más allá del VaR, ¿Hasta qué cuantía esperamos que alcance la pérdida?

- Los datos financieros nos muestran muchas veces unos extremos mayores a los estimados a través de una distribución normal.

Todos estos puntos nos llevan a la Teoría de los Valores Extremos (EVT). Creemos que esta teoría puede jugar un papel importante en las discusiones técnicas de la gestión del riesgo. Sin embargo, nadie puede aclamar que tiene la respuesta definitiva sobre el VaR y las diversas medidas de riesgo. Lo que se puede afirmar es que la EVT formará parte importante de la metodología de trabajo de los gestores de riesgo.

Esquema de aplicación

Desarrollamos a continuación breve y sencillamente las líneas maestras de la EVT. Para ello inicialmente analizamos un conjunto de n valores:

$$X_1, X_2, X_3, \dots X_n,$$

Todos estos son valores independientes e idénticamente distribuidos, esto es, con una función de distribución idéntica[1]. Cada valor X_i cualquiera lo podemos definir como la pérdida i de una cartera en su valor logarítmico absoluto.

La teoría clásica de la probabilidad que respalda la mayor parte de los modelos estocásticos aplicados en los seguros y las finanzas trata la suma de dichos valores como:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Los teoremas relevantes subyacentes son los siguientes:

- La Ley de los Grandes Números donde se indica que la medida de la muestra se aproxima a la esperanza matemática:

$$\mu = E(X)$$

- Teorema Central del Límite que nos indica que la suma tiende a tener

[1] La condición de independencia y la condición de distribución idéntica puede ser relajada. Así mismo, la EVT puede desarrollarse tanto en el campo discreto como en el campo continuo, con hipótesis de independencia o estacionariedad.

una media de valor nulo y una varianza unitaria, bajo una aproximación a la distribución normal[2].

La pérdida media de ese conjunto de n valores que representan pérdidas de distintos periodos vendrá dado como:

$$\frac{S_n}{n}$$

El caso más extremo en ese rango de datos corresponde a la mayor pérdida:

$$M_n = max\{ X_1, X_2, X_3, \ldots X_n \}$$

Si ordenamos los datos X_1, X_2, X_3, ... X_n, de menor a mayor, tal vez sólo nos interesen las k mayores pérdidas (tal vez queramos reasegurarlas)

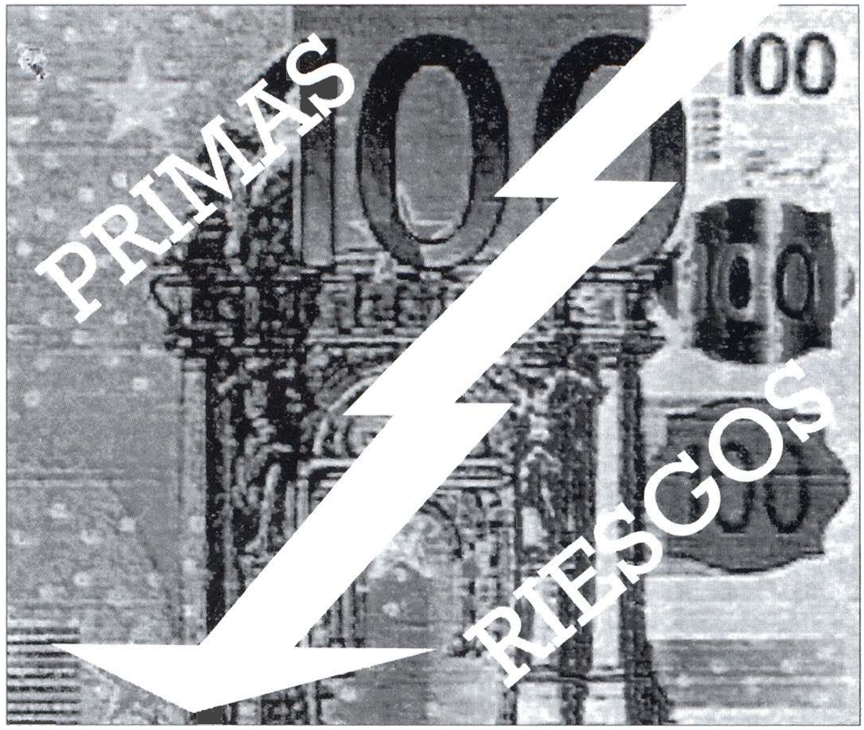
$$X_{1,n}, X_{2,n}, X_{3,n}, \ldots X_{k,n}$$

Para un nivel de confianza α, el valor empírico del VaR produciría una observación k - esimal mayor: $X_{k,n}$, donde k es aproximadamente $\alpha\, n$.

Sin embargo, uno de los problemas que se suele tener radica en la insuficiencia de datos, por lo que se debe proceder a extrapolar más allá del rango de valores conocidos. Para un nivel de confianza muy pequeño podemos determinar el α-quantil que cumpla que:

$$P(X > u_\alpha) = 1 - F(u_\alpha) = \alpha$$

Recordemos que la función F no es conocida. Si X representa las pérdidas en valor logarítmico, de una cartera de inversiones, u_α correspondería a los $1/\alpha$ valores. Por ejemplo, si $\alpha = 0{,}05$, y u_α corresponde a un periodo de pérdidas de 20 meses, entonces indica el valor en promedio que sobrepasa una vez en 20 meses.



«El poder determinar las posibles pérdidas máximas ofrece la suficiente información al gestor financiero para instrumentalizar operaciones de cobertura»

Una vez que ese umbral de pérdida se ha fijado u_α, podemos estimar el tamaño de las pérdidas potenciales que podemos tener si se sobrepasa dicho nivel. Debemos por tanto estimar la probabilidad condicionada a tal hecho:

$$P(X - u_\alpha \leq x \mid X > u_\alpha)$$

La probabilidad condicionada de que dado que existe una pérdida superior al umbral prefijado u_α, el exceso de pérdida $(X - u_\alpha)$ no sea mayor a un nivel x, que es el que puedo asumir. Si tenemos suficientes datos (valores) un estimador de esa probabilidad condicionada serían las pérdidas que sobrepasasen esa gran pérdida prefijada. Sin embargo, si no disponemos de los suficientes datos (valores) debemos encontrar un modelo o una aproximación a esa probabilidad condicionada. Esa función de distribución condicional se ha empleado como una medida habitual en el mundo del seguro (*excess-loss*) y en el campo médico. Sin embargo en el mundo de las finanzas es ahora cuando empieza a tenerse en cuenta a través de denominaciones inglesas como *shortfall* y *beyond-VaR* y corresponden a una cantidad media condicionada a la existencia de una pérdida superior al umbral u_α prefijado:

$$e(u_\alpha) = E(X - u_\alpha \mid X > u_\alpha)$$

---

[2] De hecho, el modelo Black-Scholes se basa en la hipótesis de que la distribución logarítmico normal (Log-Normal) sigue un movimiento Browniano.

Las funciones de distribución de pérdidas

No todas las distribuciones de pérdidas son iguales. Es importante distinguir entre aquellas que tienen una cola corta con aquellas que tienden a valores infinitos aunque poco probables. En unos casos la distribución disminuye hasta tomar valores nulos mientras que en otras puede tender hasta valores infinitos.

La EVT ofrece a las finanzas y particularmente dentro de la gestión del riesgo, algunos métodos para estimar valores bajo una serie de hipótesis de modelos flexibles. Estos modelos incluyen parámetros temporales dependientes y modelos con variables exógenas. La solución que ofrece la EVT incluye una amplia variedad de figuras de la función de distribución subyacente[3].

Sin entrar en grandes detalles de cómo la EVT se desarrolla, esquematizamos a continuación los principales pasos en la solución de los problemas mencionados.

Empezamos observando gráficamente la distribución de las pérdidas máximas M_n de un conjunto de observaciones independientes e idénticamente distribuidas: $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$.

Estamos acostumbrados a realizar este proceso para comprobar que esos datos gráficamente suelen representar la forma de una distribución normal. Esta representa una figura de campana cuyos valores centrales corresponden a valores cercanos a la media, con colas simétricas tanto a la derecha como a la izquierda. Los valores que toma corresponden a la frecuencia con que los hechos pueden ocurrir. Mayores entorno a los valores medios y con una probabilidad realmente baja de ocurrencia en los extremos.

Sin embargo, estos histogramas se pueden aproximar a alguna de las siguientes distribuciones de valores extremos propuestos por la EVT:

$$H_{\xi,\mu,\psi}(X) = \exp\left\{-\left(1+\xi\cdot\frac{x-\mu}{\psi}\right)_+^{-1/\xi}\right\}$$

donde $y_+ = max\ (y,0)$

Esta familia de distribuciones está definida por tres parámetros. Tiene un parámetro de posición,

$$\mu \in \Re$$

Un parámetro escalar

$$\Psi > 0$$

Y el más importante, un parámetro definitorio de la forma de la distribución:

$$\xi \in \Re$$

En el caso de que éste último parámetro sea nulo, se interpretaría como,

$$H_{0,\mu,\psi}(X) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\psi}\right)\right\}$$

Refiriéndose a una función doble exponencial o a una distribución *Gumbel*.

Si por el contrario, tomase un valor positivo $\xi > 0$, entonces $H_{\xi,\mu,\psi}(X)$ se le denomina distribución de *Fréchet* la cual tiene una cola ilimitada a la derecha. Si toma un valor negativo, $\xi < 0$, en este caso tenemos la distribución de *Weibull*, la cual tiene una cola ilimitada a la izquierda.

La forma de estas distribuciones es diferente a la representada por una distribución normal y es aquí donde radica la principal característica de la EVT: Los valores extremos se dan más frecuentemente o menos frecuentemente que bajo la asunción de la hipótesis de normalidad de los siniestros.

Una vez elegida la distribución que mejor representa el histograma de pérdidas se pretende determinar, para un nivel de confianza dado, el nivel de pérdida máximo o el intervalo de pérdidas previstas.

Conclusiones

La utilidad de estas funciones, creemos que es manifiesta no sólo en el campo de la ingeniería y la construcción en las que ha sido desarrollada, sino también en el campo financiero y actuarial.

El poder determinar las posibles pérdidas máximas o el nivel de pérdida de nuestras inversiones ante movimientos adversos en los tipos de interés ofrece la suficiente información al gestor financiero como para instrumentalizar operaciones de cobertura para, precisamente, evitar esas pérdidas.

Igualmente, dentro del campo actuarial es una fuente de información inestimable, creemos, para las compañías de reaseguro ante la siniestralidad de sectores donde un importante siniestro puede ser elevado, como es el caso de la responsabilidad tanto civil como profesional. ■

Bibliografía

— Embrecht, Paul; Resnick, Sidney I. & Samorodnitsky, Gennady (1.997). *Extreme value theory as risk management tool*. Invited paper at XXVIIIth International ASTIN Colloquium. Cairns.

— Embrecht, P.; C. Klüppelberg & T. Mikosch (1.997). *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer-Verlag. Berlin.

— Jorion, Philippe (1.997). *Value at Risk*. Richard D.Irwin. Chicago.

— McNeil, Alexander. (1.997). *Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory*. ASTIN Bulletin 27, pp. 117-137.

[3] Ya sea para una función de distribución de rendimientos o pérdidas correspondientes a índices bursátiles, en distribuciones de riesgo de crédito o de los siniestros de una cartera de seguros.