TRABAJOS DE COLABORACION

Sistematización de operaciones actuariales mediante la teoría de la medida en álgebras de Boole

Por Rafael VELASCO LARA

I. INTRODUCCION

En este trabajo, obtenemos sistemáticamente, por un método más general que el clásico, las fórmulas de las operaciones actuariales sobre los sucesos asegurables compuestos, deduciendo las fórmulas correspondientes a ellos en función de las de unos sucesos básicos. Ahora bien, con el objeto de simplificar la exposición y evitar la casuística de la técnica del seguro, nos referiremos, en las aplicaciones, a las operaciones actuariales sobre grupos de vidas, tomando como sucesos básicos los grupos de primera especie, es decir, grupos que desaparecen, como tales, al primer fallecimiento. Por otra parte, la generalidad del método que se expondrá permite aplicarlo a otras cuestiones, entre ellas, a ciertos problemas del Cálculo de Probabilidades, a los cuales haremos referencia en el capítulo V.

Las cuestiones actuariales indicadas tienen gran relación con el Cálculo de Probabilidades y así como éste se desarrolla en los tratados modernos, utilizando la Teoría de Conjuntos, el Algebra de Boole y la Teoría de la Medida, es inmediato que dichas cuestiones actuariales pueden ser tratadas empleando estas teorías matemáticas; lo cual permite deducir las fórmulas de los casos particulares, de expresiones generales, en lugar de utilizar el método inductivo, tradicionalmente empleado en los tratados clásicos.

No es de extrañar que estas ideas sobre la sistematización de los problemas que nos interesaban cristalizasen a raíz de dos cursos desarrollados por el profesor Sales, en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona, uno sobre Algebras de Boole y otro sobre Teoría de la Medida. Una vez iniciado este trabajo, he contado constantemente con el eficaz aliento y excelentes sugerencias del profesor Sales, al que expreso mi más sincero agradecimiento. También he de agradecer cordialmente a los profesores Teixidor y Busquets sus valiosos consejos y su generosa ayuda.

1.1. Bibliografía

Al final de este trabajo se da una sucinta nota bibliográfica de las obras específicamente relacionadas con las cuestiones tratadas. Las referencias se harán, en lo sucesivo, con el número de la obra entre paréntesis.

En las citas de las cuestiones actuariales, hacemos constante referencia a la obra del profesor Lasheras (26), por ser el tratado más completo publicado en español. Aunque el estudio sobre las probabilidades y operaciones actuariales sobre grupos de personas figuran en la mayoría de los tratados sobre Matemáticas del Seguro, debemos destacar el de King (25), cuya exposición ha ido conservándose casi íntegra en los tratados posteriores. También debe hacerse mención especial del trabajo del profesor Urech (32), que recopila y amplía los métodos utilizados para el cálculo de las probabilidades sobre m vidas, siguiendo métodos clásicos.

Creemos interesante recordar que sobre las operaciones actuariales de los sucesos que hemos considerado como básicos, fueron establecidas fórmulas muy generales, entre otros autores, por Steffensen (31), Galbrun (21) y Saxer (28).

También es de destacar, en el aspecto actuarial, la monografía de Dubourdieu (20), cuyos primeros capítulos desarrollan los principios del Cálculo de Probabilidades, mediante la teoría de conjuntos. La obra señala la tendencia actual a edificar la teoría de las probabilidades sobre la de las funciones aditivas de conjunto, específicamente sobre las teorías de la medida y de la integración. En dicha monografía, el hecho de que un individuo de edad actual x muera a una edad determinada se considera como un "carácter de observación" relativo a la "experiencia" $E(x)$. Estos términos son análogos a los que en este trabajo se designan como "sucesos" y "espacio muestral". De acuerdo con su título, la monografía a que nos estamos refiriendo, dedicada al estudio de los principios fundamentales del Cálculo de Probabilidades y a la Teoría del Seguro de Enfermedad, no trata del estudio de los grupos de vidas, que es uno de los objetivos del presente trabajo.

Respecto al estudio de las probabilidades sobre m sucesos dependientes o independientes, debe señalarse que fueron estudiados con gran generalidad, entre otros, por Jordan, Bonferroni y Broderick y en especial en la magnífica monografía de Frechet (13), que amplía y generaliza los trabajos de los autores anteriores. Además, en esta monografía se da una referencia muy completa de los estudios realizados sobre dicha materia. También son notables: el libro de Feller (12), que sin estudiar el problema general, demuestra algunos casos particulares por el método original de la inclusión y exclusión, y la obra de Loeve (16), que utiliza los indicadores I_A de los conjuntos A.

Por último, en relación con los tratados sobre Algebra de Boole y la Teoría de la Medida y sus aplicaciones al Cálculo de Probabilidades, hemos procurado concretarnos a aquellos que están más relacionados con los temas tratados, y que nos han servido de fuente de información.

1.2. Referencias

Las referencias a este trabajo se harán por el indicativo del párrafo, el cual se designa por un número formado por dos grupos de cifras: el primero indica el capítulo y el segundo grupo el párrafo. Cuando en un mismo párrafo sea necesario señalar varias fórmulas su notación se efectuará agregando al indicativo del párrafo un tercer grupo de cifras que servirá para caracterizar la fórmula. Los grupos de cifras estarán separadas por un punto.

2. ANTECEDENTES

En este trabajo, como ya se ha indicado, se trata de generalizar, por vía abstracta, algunas cuestiones actuariales, basándonos en el Algebra de Boole y en la Teoría de la Medida. Ahora bien, dado que la terminología y notación empleadas en estas teorías difieren, algunas veces, de unos autores a otros, con el fin de facilitar la lectura del trabajo, vamos a dar, en este capítulo, un breve resumen de las mismas, limitándonos a enunciar las definiciones y propiedades que han de utilizarse.

2.1. Retículos

2.11. *Definición.*—Dado un conjunto de elementos $x, y, z, \ldots$, se dice que posee estructura de RETICULO si, para sus elementos, están definidas las relaciones binarias $\subset$ e $=$ y las operaciones $\cap$ y $\cup$ caracterizadas por los siguientes axiomas:

A.1. Ley reflexiva:

$$x \subset x$$

A.2. Ley anti-simétrica (definición de $=$):

$$(x \subset y, \quad y \subset x) \Leftrightarrow x = y$$

A.3. Ley transitiva:

$$(x \subset y, \quad y \subset z) \Rightarrow x \subset z$$

A.4. Definición de $\cap$, cota inferior máxima (c. i. m.):

$$(x \subset y, \quad x \subset z) \Leftrightarrow x \subset (y \cap z)$$

A.5. Definición de $\cup$, cota superior mínima (c. s. m.):

$$(x \subset z, \quad y \subset z) \Leftrightarrow (x \cup y) \subset z$$

Luego, un retículo es un sistema de elementos parcialmente ordenados (Postulados: A_1, A_2 y A_3), en el cual, dos elementos cualesquiera tienen un extremo inferior (c. i. m.), según A_4 y un extremo superior (c. s. m.), según A_5.

NOTA.—Cuando no haya lugar a dudas, la operación $\cap$ la indicaremos por un punto y también suprimiendo el signo representativo entre los elementos afectados.

2.12. *Propiedades de los retículos.*—Partiendo de los axiomas anteriores, se deducen las siguientes propiedades:

a) La relación $=$ es una relación de equivalencia.

b) Las operaciones $\cap$ y $\cup$ poseen, respecto a la relación $=$, las siguientes leyes: Idempotente, conmutativa, uniforme, asociativa, de la conformidad, de la absorción y semi-distributiva.

c) No se verifica, en general, la ley de simplificación.

2.2. RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

2.21. *Definición.*—Un retículo es distributivo si, además de los cinco axiomas de 2.11, satisface el siguiente:

A.6. $x \cap (y \cup z) \subset (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

2.22. *Propiedades de los retículos distributivos.*—Leyes distributivas de la relación $=$:

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$
$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

2.3. RETÍCULOS COMPLEMENTADOS

2.31. *Definición.*—Un retículo complementado está definido por las siguientes propiedades:

a) Es un sistema con estructura de retículo, o sea, que satisface a los axiomas A_1 al A_5.

b) Además, cumple los siguientes axiomas:

A.7. Definición de Ω: Existe un elemento Ω tal que, cualquier elemento del retículo, verifica:

$$x \subset \Omega$$

A.8. Definición de ϕ: Existe un elemento ϕ tal que, cualquier elemento x del retículo, verifica:

$$\phi \subset x$$

A.9. Definición de la operación complementación: C.

$$\Omega \subset x \cup x^c \quad ; \quad x \cap x^c \subset \phi \quad ; \quad x^c = C\,x$$

2.32. *Propiedades de un retículo complementado.*

2.321. $x \cap x^c = \phi \quad ; \quad x \cup x^c = \Omega.$

2.322. Existe elemento unidad respecto a $\cap$ y elemento neutro respecto a $\cup$:

$$x \cap \Omega = x \quad ; \quad x \cup \phi = x$$

2.323. El elemento neutro ϕ y el elemento unidad Ω verifican:

$$x \cap \phi = \phi \quad ; \quad x \cup \Omega = \Omega$$

2.324. $x \subset y \Rightarrow x \cap y^c = \phi \Leftrightarrow x^c \cup y = \Omega.$

2.325. Ley de la involución:

$$(x^c)^c = x$$

2.326. Ley uniforme:

$$x = y \Leftrightarrow x^c = y^c$$

2.327. Leyes del dualismo o de Morgan:

$$(x \cap y)^c = x^c \cup y^c \quad ; \quad (x \cup y)^c = x^c \cap y^c$$

2.33. *Generalización de las leyes anteriores.*—Las leyes conmutativa, asociativa, distributiva y de Morgan se generalizan inmediatamente a un número finito cualquiera de elementos.

2.34. *La operación diferencia simétrica* Δ.—Definición: La diferencia simétrica se define por el siguiente axioma:

A.10. $x \,\Delta\, y = (x \cap y^c) \cup (x^c \cap y).$

NOTA.—Esta operación equivale al "o bien" lógico, en el álgebra de clases.

Propiedades.—De la definición y los teoremas anteriores, se deducen las siguientes propiedades:

2.341. Ley conmutativa:

$$x \Delta y = y \Delta x$$

2.342. Ley asociativa:

$$x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$$

2.343. Ley distributiva de $\cap$ respecto a Δ:

$$x \cap (y \Delta z) = (x \cap y) \Delta (x \cap z)$$

2.344. Existencia de elemento neutro:

$$x \Delta \phi = \phi \Delta x = x$$

2.345. Existencia de elemento opuesto:

$$x \Delta x = \phi$$

2.346. $x \Delta \Omega = x$.

2.35. *Definición de la operación* "—" (Diferencia):

$$x \subset y \Rightarrow y - x = x \Delta y = x^c \cap y$$

2.351. *Propiedades*:

$$(x \Delta y)^c = (x \cap y) \cup (x^c \cap y^c)$$

2.352. $x^c \Delta y^c = x \Delta y$.

2.353. Relación entre las cuatro operaciones binarias definidas:

$$x \Delta y = (x \cup y) - (x \cap y)$$

2.36. *Elementos disjuntos.*—Dada una familia **C** de elementos, se dice que los elementos de esa familia son dos a dos disjuntos o mutuamente disjuntos, si dos cualesquiera de ellos, distintos, verifican:

$$X_i,\ X_j \in \mathbf{C} \Rightarrow X_i \cap X_j = \phi$$

2.37. *La operación suma.*—En el caso de elementos disjuntos, y solamente en este caso, la reunión de ellos se llama también suma y se representa por el signo $+$.

2.4. ALGEBRAS Y σ - ALGEBRAS DE BOOLE

2.41. *Algebra de Boole.*—Se llama álgebra de Boole a un retículo distributivo y complementado.

2.42. σ - *álgebra de Boole.*—Una σ - álgebra de Boole, o álgebra de Borel, es una clase o familia de elementos conteniendo a ϕ y a Ω y estable para las operaciones de complementación, intersección y reunión numerables; o sea, un álgebra de Borel es un álgebra de Boole σ - aditiva.

2.5. MEDIDAS O VALORACIONES

2.51. *Definición.*—Se llama función medida $\mu(x)$, o simplemente medida μ sobre una σ - álgebra, B, a una aplicación de B en R^+, tal que es:

1. Aditiva:

$$X_i \in \mathbf{B} \Rightarrow \mu \sum_{i=1}^{\infty} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\, X_i$$

2. $\mu(\phi) = 0$.

Propiedades:

1. La medida μ es simplemente aditiva:

$$\mu \sum_{i=1}^{m} X_i = \sum_{i=1}^{m} \mu\, X_i$$

2. Monótona:

$$[X,\ Y \in \mathbf{B},\ X \subset Y] \Rightarrow \mu\, X \leqslant \mu\, Y$$

3. Sub-aditiva:

$$X_i \in \mathbf{B} \Rightarrow \mu \cup X_i \leqslant \Sigma\, \mu\, X_i$$

NOTA.—Se puede dar una definición menos restrictiva de medida, pero la elegida se adapta mejor a las aplicaciones al Cálculo Actuarial.

2.52. *Espacio de probabilidad.*—Una medida se llama normalizada o de probabilidad cuando $\mu(\Omega) = 1$ y estas medidas suelen representarse por P; por tanto:

$$P(\Omega) = 1$$

Los espacios medibles respecto a una medida normalizada se llaman espacios de probabilidad.

2.6. Algunos conceptos de la teoría de conjuntos

Las propiedades de las álgebras de Boole se aplican inmediatamente a la teoría de conjuntos cuando se consideran como elementos de Ω los subconjuntos o partes X_i de Ω, pertenecientes a una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ que tiene a I por conjunto de índices.

Al conjunto Ω, llamado también conjunto unidad y conjunto universal, lo designaremos, en general, por el espacio Ω y a los subconjuntos o partes de Ω se les llamará, también, conjuntos del espacio Ω.

Las relaciones y operaciones de los retículos se pueden definir para los conjuntos como se indica a continuación:

2.61. *Inclusión.*—Se dice que el conjunto X es un subconjunto o parte de Y, o bien, que X está incluido en Y y se representa por $X \subset Y$, si todos los elementos de X pertenecen a Y:

$$(X \subset Y) \Leftrightarrow (\forall\omega \in X \Rightarrow \omega \in Y)$$

2.62. *Reunión* de una familia de conjuntos, $\{X_i\}_{i\in I}$, de Ω es el conjunto de los elementos $\omega \in \Omega$ que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos X_i de la familia. Esta reunión se representa por $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$.

2.63. *Intersección* de una familia de conjuntos, $\{X_i\}_{i\in I}$, de Ω es el conjunto de los elementos $\omega \in \Omega$ que pertenecen a todos los conjuntos de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$. La intersección se representa por $\bigcap\limits_{i\in I} X_i$.

2.64. *Intersecciones y reuniones singulares.*—De las definiciones dadas resulta:

$$\bigcup_{i\in\phi} X_i = \phi \quad ; \quad \bigcap_{i\in\phi} X_i = \Omega$$

2.65. *Complemento* de un conjunto X de Ω respecto a Ω es el conjunto de los elementos de Ω que no pertenecen a X. El complementario de X se representa por $C_{\Omega} X$. o bien. X^c.

2.651.—*Complemento de una reunión y de una intersección.*—Para toda familia de conjuntos de Ω, se tiene la siguiente generalización de las leyes de Morgan:

$$(\bigcup_{i\in I} X_i)^c = \bigcap_{i\in I} X_i^c \quad ” \quad (\bigcap_{i\in I} X_i)^c = \bigcup_{i\in I} X_i^c$$

2.66. *Conjuntos disjuntos dos a dos.*—Dada una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de conjuntos, se dice que los conjuntos de esta familia son dos a dos disjuntos si dos cualesquiera de ellos distintos no tiene ningún elemento común, o sea:

$$[\forall i \in I, \quad \forall j \in I, \quad i \neq j] \Rightarrow X_i \cap X_j = \phi$$

En particular A y B son disjuntos si: $A \cap B = \phi$.

2.67. *Suma de conjuntos.*—Dada una familia de conjuntos dos a dos disjuntos, y *solamente* en este caso, la reunión de estos conjuntos se llama su suma y se representa por: $\sum_{i\in I} X_i$.

2.68. *Particiones.*—Se llama partición finita, $\mathbf{P}(\Omega)$, de un conjunto Ω, a una familia finita no vacía, $\{X_i\}_{i\in I}$ de conjuntos de Ω, dos a dos disjuntos, tal que:

$$\Omega = \sum_{i\in I} X_i$$

2.7. Algebra booleana de sucesos

En el Cálculo de Probabilidades, se llaman sucesos a los resultados de una "observación" o experimento aleatorio. A cualquier resultado indescomponible en otros más simples de los considerados, se le llama suceso elemental y se representa por un, y sólo un, punto muestral. El conjunto de todos los puntos muestrales será llamado espacio muestral o suceso seguro Ω y los sucesos relacionados con un experimento dado (idealizado) pueden ser descritos en términos de puntos muestrales.

Se puede establecer la siguiente correspondencia entre los conjuntos y los sucesos:

TEORIA DE CONJUNTOS	SUCESOS
Espacio Ω.	Suceso seguro.
Conjunto vacío.	Suceso imposible.
Conjunto complementario.	Suceso contrario.
Punto de Ω.	Suceso elemental.
Subconjunto o parte de Ω.	Suceso.
Conjuntos disjuntos.	Sucesos incompatibles.
Algebra de Conjuntos.	ALGEBRA DE SUCESOS.

En forma análoga, se establece la correspondencia entre las relaciones y operaciones de los conjuntos y las de los sucesos.

En lo sucesivo, utilizaremos indistintamente las expresiones conjuntos y sucesos de un álgebra booleana.

3. ALGEBRA BOOLEANA DE m GENERADORES: B_m

3.1. Definición

Dados m elementos X_1, X_2, ..., X_m, tales que $X_i \neq X_j^c$, se llama ALGEBRA BOOLEANA de orden m y la representaremos por B_m, a la engendrada o construida con dichos elementos y los ϕ y Ω mediante las operaciones de complementación, intersección y reunión finitas.

Si se sustituye cualquier X_i de B_m por su complementario, el álgebra que se obtiene es la misma B_m.

3.11. *Notación.*—Con el fin de evitar repeticiones, vamos a indicar la notación general que se utilizará en los capítulos siguientes, aunque en cada caso concreto se especifique la correspondiente al mismo.

Para simplificar la escritura, se designa por N_m al conjunto de los enteros: 1, 2, ..., m. Una combinación cualquiera de orden r de los elementos anteriores se expresará por $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, o bien, por I_r.

Los elementos i_{r+t}, $(o < t \leqslant m - r)$, también se representarán por j_t y al conjunto de los $m - r$ elementos de N_m: $\{i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_m\} = \{j_1, j_2, \dots, j_{m-r}\}$ se designará por J_{m-r}.

El conjunto de las combinaciones de orden r de los elementos de N_m se representará por I^r_m y cuando se haga referencia simultáneamente a las combinaciones de orden k de los $m - r$ elementos de N_m que no pertenecen a I_r, se designará por J^k_{m-r} al conjunto de estas combinaciones.

La notación anterior simplifica la escritura de algunas fórmulas y evita bastantes explicaciones de nomenclatura. Simbólicamente se puede resumir como sigue:

$$N_m = \{x | x \in N, \quad 1 \leqslant x \leqslant m\} = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$i_t \in N_m \Rightarrow \{i_1, i_2, \dots, i_r\} = I_r \in I^r_m$$

$$(j_t = i_{r+t} \in N_m, \quad o < t \leqslant m - r) \Rightarrow \{i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_{r+k}\} = \\ = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} = J_k \in J^k_{m-r}$$

Entre los conjuntos anteriores existen las siguientes relaciones:

$$I_r \cap J_k = \phi \quad ; \quad I_r + J_k \subset N_m \quad ; \quad I_r + J_{m-r} = N_m$$

Cuando no haya lugar a dudas, se suprimirán los subíndices de las I y de las J, en cuyo caso habrá que especificar:

$$I \in I^r_m \quad ; \quad J \in J^k_{m-r} \quad \text{siendo} \quad I \cap J = \phi \quad ; \quad I + J \subset N_m$$

3.2. Generadores

Los elementos X_1, X_2, ..., X_m se llaman también generadores de Boole del álgebra B_m.

3.3. FUNCIONES O EXPRESIONES BOOLEANAS: f.b.

Son las expresiones pertenecientes al álgebra B_m.

3.4. ATOMOS

Dada un álgebra B_m se llaman átomos booleanos, o simplemente átomos de orden r, a las intersecciones de r de los generadores X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_r} de B_m con la intersección de los complementarios de los $m - r$ restantes.

También se pueden definir los átomos o polinomios mínimos booleanos, según Birkoff y Mac Lane (2) de m generadores X_1, X_2, ..., X_m, como la intersección de estas letras en la que la letra de lugar i es X_i o bien X_i^c.

3.41. *Expresión de los átomos.*—La expresión de un átomo Q de orden r de B_m será:

$$Q_{I_r} = Q_{i_1, i_2, \ldots, i_r} = X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots X_{i_r} \cap X^c_{i_1+1} \cap \ldots \cap X^c_{i_m}$$

en la que:

$$0 \leqslant r \leqslant m$$

Con la notación dada en 3.11, la expresión de un átomo de orden r del álgebra B_m será:

$$Q_{I_r} = \underset{I \in I^r_m}{Q_I} = \underset{i \in I}{\cap} X_i \cap \underset{j \in J}{} X_j{}^c$$

siendo:

$$I \cap J = \phi \; ; \; I + J = N_m \; ; \; I \in I^r_m$$

En el caso de un átomo determinado se pondrá, como subíndice de Q, la combinación correspondiente. Así, en un álgebra B_5, el átomo $X_1 X_2^c X_3 X_4^c X_5^c$ se representará por $Q^{(5)}_{13}$. Cuando no haya lugar a dudas, se suprimirá el superíndice.

3.42. *Casos particulares.*—En particular, para $r = 0$ y $r = m$, se tiene:

$$Q_0 = X^c{}_1 \, X^c{}_2 \ldots X^c{}_m = \bigcap_{i=1}^{m} X_i{}^c = \bigcap_{i \in N_m} X_i{}^c = (\bigcup_{i \in N_m} X_i)^c$$

$$Q_{12..m} = X_1 \, X_2 \ldots X_m = \bigcap_{i=1}^{m} X_i = \bigcap_{i \in N_m} X_i$$

3.43. *Propiedades.*—Son inmediatas las siguientes propiedades:

1. El número de átomos distintos de orden r de un álgebra B_m es $\binom{m}{r}$ y el número total de átomos de B es 2^m.
2. Dos átomos distintos son disjuntos.

3.5. Monomios booleanos

Llamaremos monomio booleano, o simplemente monomio, de orden r, $(o \leqslant r \leqslant m)$ de un álgebra B_m a toda intersección de r generadores distintos elegidos entre los X_1, X_2, ..., X_m de B_m.

3.51. *Expresión de los monomios.*—La expresión general de un monomio booleano de orden r será:

$$R_{I_r} = R_{i_1, i_2 \ldots i_r} = \bigcap_{t=1}^{r} X_{i_t}$$

O bien, con la notación dada en 3.11:

$$R_{I_r} = \bigcap_{i \in I_r} X_i \quad ; \quad I_r \in I^r{}_m$$

3.52. *Casos particulares.*—De la definición, y recordando lo indicado en 2.64, resultan para $r = o$ y $r = m$ los siguientes valores:

$$R_0 = \bigcap_{i \in \phi} X_i = \Omega \quad ; \quad R_{12..m} = \bigcap_{i \in N_m} X_i = Q_{12...m}$$

3.53. *Número de monomios.*—También es inmediato que: El número de monomios de orden r de B_m es $\binom{m}{r}$ y el total de monomios distintos de B_m es 2^m.

3.6. Forma canónica de las funciones booleanas

3.61. *Definición.*—La forma canónica, o forma normal disyuntiva, de una función booleana de m generadores es la expresión de la misma por medio de una suma de átomos.

3.62. *Expresión de una f.b. en forma canónica.*—Para expresar una función booleana en su forma canónica, basta con aplicar las reglas o leyes de un álgebra booleana, resumidas en el capítulo II.

Sistemáticamente se logra mediante el siguiente proceso —Birhkoff y Mac Lane (3)— :

1. Se suprimen los complementos de las expresiones encerradas dentro de los paréntesis, aplicando las leyes de Morgan.
2. Se eliminan las reuniones dentro de los paréntesis, utilizando las leyes distributivas.
3. Se reducen los elementos y términos repetidos, en virtud de las leyes idempotentes.
4. Los términos resultantes se completan con todos los generadores. Así, en el término T se puede introducir el elemento X_k, si no lo tiene, como sigue:

$$T = T\,X_k + T\,X_k^c$$

3.63. *Expresión general.*—Como todos los átomos de B_m son disjuntos dos a dos, se puede escribir toda función booleana en su forma canónica de la siguiente forma:

$$F = \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i\, Q(i)$$

donde las α_i son iguales a uno o a cero y $Q(1)$, $Q(2)$, ..., $Q(2^m)$ son todos los átomos de B_m.

3.64. *Propiedades.*—Para las funciones booleanas se verifican las siguientes propiedades:

1. Hay una, y sólo una, manera de representar una función booleana dada en su forma canónica.
2. Existen 2^{2^m} funciones booleanas distintas en un álgebra B_m.

3.7. Las familias de funciones booleanas H_a

Entre las funciones booleanas de un álgebra B_m hay algunas de gran aplicación, tanto en el Cálculo de Probabilidades como en la Matemática Actuarial. Entre ellas, citaremos las siguientes:

3.71. *Suma de todos los átomos de orden* r: $H_{[m,r]}$.—Su expresión es:

$$H_{[m,r]} = \sum_{I \in I^r_m} Q_I = \sum_{I \in I^r_m} \bigcap_{i \in I} X_i \bigcap_{j \in J} X_j^c$$

siendo:

$$I \cap J = \phi \quad ; \quad I + J = N_m$$

En particular:

$$H_{[m,0]} = Q_0 \quad ; \quad H_{[m,m]} = Q_{1.2\ldots m}$$

Para las expresiones booleanas, $H_{[m,r]}$, se verifica:

$$r \neq t \Rightarrow H_{[m,r]} \cap H_{[m,t]} = \phi$$

3.72. *Suma de todos los átomos de orden superior a* r — 1: $H_{(m,r)}$. La expresión $H_{(m,r)}$ será igual a la suma:

$$H_{(m,r)} = \sum_{t=r}^{m} \sum_{I \in I^t_m} Q_I$$

Y por 3.71, será también:

$$H_{(m,r)} = \sum_{t=r}^{m} H_{[m,t]}$$

En particular

$$H_{(m,0)} = \sum_{t=0}^{m} H_{[m,t]} = \Omega \quad ; \quad H_{(m,m)} = H_{[m,m]} = Q_{12\ldots m}$$

y para $r = 1$:

$$H_{(m,1)} = \sum_{t=1}^{m} \sum_{I\in I^t_m} Q_I = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$$

Es inmediata la siguiente propiedad:

$$H_{(m,r)} \cap H_{(m,t)} = H_{(m,k)} \qquad ; \qquad k = \text{máx.}\ (r, t)$$

3.73. *Suma de todos los átomos de orden no superior a* r: $\overrightarrow{H}(m, r)$. Por un razonamiento análogo al utilizado para $H(m, r)$, la expresión de $\overrightarrow{H}(m, r)$ será:

$$\overrightarrow{H}_{(m,r)} = \sum_{t=0}^{r} H_{[m,t]}$$

y en particular, para $r = o$ y $r = m$

$$\overrightarrow{H}_{(m,o)} = H_{[m,o]} = Q_o \qquad ; \qquad \overrightarrow{H}_{(m,m)} = \Omega$$

3.74. *Relaciones para* r = o *y* r = m.—Resumiendo las expresiones anteriores para los casos particulares $r = o$ y $r = m$, se tiene:

$$H_{[m,o]} = \overrightarrow{H}_{(m,o)} = Q_o$$

$$H_{[m,m]} = H_{(m,m)} = R_{12\cdots m} = Q_{12\ldots m} = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

$$H_{(m,o)} = \overrightarrow{H}_{(m,m)} = R_o = \Omega$$

3.8. Aplicación al álgebra de conjuntos de un espacio Ω

Cuando se trata de un álgebra de conjuntos el significado de las funciones H es el siguiente:

3.81. La suma de todos los átomos de orden r, $H[m, r]$, es el conjunto de los elementos de Ω que pertenecen *exactamente* a r de los conjuntos de $\{X_i\}_{i\in N_m}$.

3.82. La suma de todos los átomos de orden superior a $r - 1$, $H(m, r)$, es el conjunto de los elementos de Ω que pertenecen *al menos* a r de los conjuntos de $\{X_i\}_{i \in N_m}$.

3.83. La suma de todos los átomos de orden no superior a r, $H(\overrightarrow{m, r})$, es el conjunto de los elementos de Ω que pertenecen *a lo sumo* a r de los conjuntos de $\{X_i\}_{i \in N_m}$.

4. MEDIDA DE LAS FUNCIONES BOOLEANAS

El objeto de este capítulo es calcular la medida μ de las expresiones booleanas de un Algebra de Boole, en función de las medidas de sus monomios.

Ahora bien, como toda función booleana de B_m se puede expresar como suma de átomos de B_m (3.63) bastará con obtener la expresión de la medida de los átomos en función de la medida de los monomios.

Una vez resuelta la cuestión anterior, y como aplicación de la misma, se obtendrán las expresiones de las medidas de las funciones de 3.7, de las que haremos uso frecuente en las aplicaciones al Cálculo Actuarial.

4.1. La expresión: $S\mu(m, k)$

Para simplificar las expresiones y dar mayor uniformidad a las fórmulas que se van a obtener, representaremos por $S\mu(m, k)$ la suma de las medidas μ de todos los monomios de orden k del álgebra B_m.

Esta expresión coincide, cuando la medida μ es la probabilidad, con la S_k utilizada en el Cálculo de Probabilidades y, cuando se refiere a probabilidades o rentas sobre grupos de vidas, con la Z_k de los tratados de Teoría Matemática del Seguro.

De acuerdo con la definición:

$$S_\mu(m, k) = \sum_{I \in I^k_m} \mu\, R_I = \sum_{I \in I^k_m} \mu \bigcap_{i \in I} X_i \qquad \ldots 4.1.1$$

En particular, para $k = o$, $k = 1$ y $k = m$, se tiene:

$$S_\mu(m, o) = \mu\, R_0 = \mu\, \Omega \qquad \ldots 4.1.2$$

$$S_\mu(m, 1) = \sum_{t=1}^{m} \mu\, X_t \qquad \ldots 4.1.3$$

$$S_\mu(m, m) = \mu\, R_{12\ldots m} = \mu \bigcap_{i \in N_m} X_i \qquad \ldots 4.1.4$$

Estas expresiones se obtienen de 4.1.4, teniendo en cuenta 2.64. o bien de la definición 4.1, recordando que sólo hay un monomio de orden o: $R_0 = \Omega$, y otro de orden m: $R_{12\ \ m} = \bigcap_{i \in N_m} X_i$.

NOTA.—Cuando no haya lugar a dudas, se suprimirá, en general, el subíndice μ de la S_μ

4.2. VALOR DE $\Delta_n\, S_\mu(n - 1, k)$

Vamos a obtener una relación entre la suma de las medidas de los monomios de orden $k(o < k < n)$ de las álgebras B_{n-1} y B_n.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ y $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n$, los generadores de las álgebras consideradas B_{n-1} y B_n.

Empezaremos por probar la siguiente relación

$$\sum_{I \in I^{k-1}_{n-1}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i\, X_n + \sum_{I \in I^{k}_{n-1}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i = \sum_{I \in I^{k}_{n}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i$$

siendo: $o < k < n$. En efecto, el número de sumandos de ambos miembros es el mismo. por ser:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Además, el primer sumatorio es la suma de las medidas de la intersección de X_n con los monomios de orden $k - 1$ del álgebra B_{n-1} y el segundo sumatorio es la suma de las medidas de los monomios de orden k de un álgebra B_{n-1}; luego, la suma de ambos sumatorios es la suma de las medidas de los monomios de orden k del álgebra B_n, que es, precisamente, la expresión del segundo miembro.

Utilizando el símbolo S_μ introducido en 4.1, resulta:

$$\sum_{I \in I_{n-1}^{k-1}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i X_n + S_\mu(n-1, k) = S_\mu(n, k)$$

y por tanto:

$$\Delta_n S_\mu(n-1, k) = S_\mu(n, k) - S_\mu(n-1, k) = \sum_{I \in I_{n-1}^{k-1}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i X_n \qquad \ldots 4.2$$

4.3. Medida de la reunión $\bigcup_{i=1}^{m} X_i$ de los generadores

Vamos a probar que

$$X_i \in B_m \Rightarrow \mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} S_\mu(m, k) \qquad \ldots 4.3$$

o bien, teniendo en cuenta el significado de S_μ:

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{I \in I_m^k} \mu \bigcap_{i \in I} X_i$$

Procederemos por inducción:

Para $m = 1$ se convierte en una identidad, y para $m = 2$ resulta:

$$X_1 \in B_2 \quad ; \quad X_2 \in B_2 \Rightarrow \mu(X_1 \cup X_2) = \mu X_1 + \mu X_2 - \mu(X_1 X_2)$$

En efecto:

$$X_1 \cup X_2 = X_1 + X_1^c X_2 \quad \text{"} \quad \mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_1^c X_2)$$
$$X_2 = X_1 X_2 + X_1^c X_2 \quad \text{"} \quad \mu X_2 = \mu(X_1) + \mu(X_1^c X_2)$$

Por tanto:

$$\mu(X_1 \cup X_2) = \mu\, X_1 + \mu\, X_2 - \mu(X_1\, X_2)$$
$$= S_\mu(2, 1) - S_\mu(2, 2) \qquad \ldots 4.3.1$$

Suponiendo que 4.3 se verifica para $m = n - 1$, o sea:

$$\mu \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}\, S_\mu(n-1, k) \qquad \ldots 4.3.2$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{I \in I_{n-1}^{k}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i \qquad \ldots 4.3.3$$

entonces, por 4.3.1 y 4.3.2, se tiene:

$$\mu \bigcup_{i=1}^{n} X_i = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i \cup X_n\Big)$$

$$= \mu\, X_n + \mu \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i - \mu \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i\, X_n$$

de donde:

$$\mu \bigcup_{i=1}^{n} X_i = \mu\, X_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} S(n-1, k) - \mu \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i X_n$$

$$= \mu\, X_n + S(n-1, 1) + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k-1} S(n-1, k) - \mu \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i X_n$$

$$= S(n, 1) + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k-1} S(n-1, k) - \mu \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i X_n \qquad \ldots 4.3.4$$

Aplicando 4.3.3 al último término:

$$\mu \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i X_n = \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^{h-1} \sum_{I \in I_{n-1}^{h}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i\, X_n$$

$$= \sum_{h=1}^{n-2} (-1)^{h-1} \sum_{I \in I_{n-1}^{h}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i\, X_n + (-1)^{n-2} \sum_{I \in I_{n-1}^{n-1}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i\, X_n$$

siendo:

$$(-1)^{n-2} \sum_{I \in I_{n-1}^{n-1}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i X_n = (-1)^n \mu \bigcap_{i=1}^{n} X_i = (-1)^n S(n, n)$$

resulta, después de hacer $k = h + 1$

$$\mu \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i X_n = (-1)^n S(n, n) + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k \sum_{I \in I_{n-1}^{k-1}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i X_n$$

y por 4.2:

$$\mu \bigcup_{i=2}^{n-1} X_i X_n = (-1)^n S(n, n) + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k [S(n, k) - S(n-1, k)]$$

$$= (-1)^n S(n, n) + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k S(n, k) - \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k S(n-1, k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (-1)^k S(n, k) - \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k S(n-1, k)$$

o también:

$$\mu \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i X_n = - \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} S(n, k) - \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k S(n-1, k)$$

Sustituyendo esta expresión en 4.3.4:

$$\mu \bigcup_{i=1}^{n} X_i = S(n, 1) + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k-1} S(n-1, k) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} S(n, k) -$$

$$- \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k-1} S(n-1, k)$$

$$= S(n, 1) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} S(n, k)$$

Por consiguiente:

$$\mu \bigcup_{i=1}^{n} X_i = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S(n, k) \qquad \ldots 4.3$$

Obsérvese que la fórmula 4.3 generaliza la de Poincaré, ya que coincide con ella cuando se trata de un Algebra de sucesos y la medida es una probabilidad; así como también generaliza la fórmula análoga referente a un Algebra de conjuntos y una medida definida sobre ella.

4.4. Medida de los átomos de los monomios en el Algebra booleana, B_m

La expresión de un átomo de orden r de B_m es (3.41):

$$\underset{I \in I_m^r}{Q_I} = \bigcap_{i \in I} X_i \bigcap_{j \in J} X_j^c \quad " \quad I \cap J = \phi \quad " \quad I + J\ N_m$$

Si, para simplificar la escritura, se pone

$$Q = \underset{I \in I_m^r}{Q_I} \quad " \quad X = \bigcap_{i \in I} X_i \qquad \ldots 4.4.1$$

resulta:

$$Q = X \bigcap_{j \in J} X_j^c \qquad \ldots 4.4.2$$

en la que los X_j son los generadores $X_{i_{r+1}}$; $X_{i_{r+2}}$; ..., X_{i_m} del álgebra B_{m-r}.

El conjunto X de 4.4.2, se puede descomponer en dos elementos disjuntos, como sigue:

$$X = X \bigcap_{j \in J} X_j^c + X(\bigcap_{j \in J} X_j^c)^c$$

y sustituyendo en el 2.º miembro, el primer término por Q(4.4.2) y aplicando al segundo término, sucesivamente la ley de Morgan, 2.327 y la distributiva (2.22), resulta:

$$X = Q + X \bigcup_{j \in J} X_j = Q + \bigcup_{j \in J} X\, X_j$$

Por tanto:

$$\mu\, X = \mu\, Q + \mu \bigcup_{j \in J} X\, X_j$$

o bien:

$$\mu\, Q = \mu\, X - \mu \bigcup_{j \in J} X\, X_j$$

y aplicando a este último término la fórmula 4.3, resulta:

$$\mu\, Q = \mu\, X - \sum_{k=1}^{m-r} (-1)^{k-1} \sum_{J \in J^k_{m-r}} \mu(X \bigcap_{j \in J} X_j) \qquad \ldots 4.4.3$$

en la que: $\bigcap_{j \in J} X_j$ son monomios de orden k del álgebra B_{m-r} de los generadores $X_{i_{r+1}}$; $X_{i_{r+2}}$; ..., X_{i_m} y J^k_{m-r} son las combinaciones de orden k de los subíndices:

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_{m-r}\} \equiv \{i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots, i_m\}$$

Si para uniformar la expresión 4.4.3 se hace:

$$\mu\, X = \sum_{J \in J^0_{m-r}} \mu(X \bigcap_{j \in J} X_j) \qquad \ldots 4.4.4$$

resulta:

$$\mu\, Q = \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \sum_{J \in J^k_{m-r}} \mu(X \bigcap_{j \in J} X_j)$$

Y teniendo en cuenta 4.4.1, se obtiene finalmente:

$$\mu\, Q_{I_r \in I^r_m} = \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \sum_{J \in J^k_{m-r}} \mu(\bigcap_{i \in I} X_i \bigcap_{j \in J} X_j) \qquad \ldots 4.4$$

que es la expresión de la medida de un átomo de orden r como suma de medidas de monomios.

4.41. *Casos particulares:* $r = o$ y $r = m$.—Con los convenios introducidos en el apartado anterior y en 2.64, se comprueba que los resultados que se obtienen por medio de la fórmula anterior, 4.4, para los casos de $r = o$ y $r = m$ coinciden con los que se obtendrían directamente teniendo en cuenta 3.42, 4.1 y 4.3; lo cual justifica la introducción de dichos convenios. En efecto:

Para $r = o$ se tiene:

$$\mu\, Q_o = \sum_{k=o}^{m} (-1)^k\, S(m, k) = \mu(\Omega) - \mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i \quad \ldots\ 4.41.1$$

y para $r = m$:

$$\mu\, Q_{12\ldots m} = \mu \bigcap_{i=1}^{m} X_i = S(m, m) \quad \ldots\ 4.41.2$$

4.5. MEDIDA DE LA SUMA DE TODOS LOS ÁTOMOS DE ORDEN r DE UN ÁLGEBRA B_m

La expresión de $H_{[m,\, r]}$ es (3.71):

$$H_{[m,\, r]} = \sum_{I \in I_m^r} Q_I = \sum_{I \in I_m^r} \bigcap_{i \in I} X_i \bigcap_{j \in J} X_j$$

y por ser disjuntos los átomos $Q_{I \in I_m^r}$ se tiene:

$$\mu\, H_{[m,\, r]} = \mu \sum_{I \in I_m^r} Q_I$$

$$= \sum_{I \in I_m^r} \mu\, Q_I$$

Aplicando a esta expresión la fórmula 4.4, resulta:

$$\mu\, H_{[m,\, r]} = \sum_{I \in I_m^r} \sum_{k=o}^{m-r} (-1)^k \sum_{J \in J_{m-r}^k} \mu\Big(\bigcap_{i \in I} X_i \bigcap_{j \in J} X_j\Big)$$

$$= \sum_{k=o}^{m-r} (-1)^k \sum_{I \in I_m^r} \sum_{J \in J_{m-r}^k} \mu\Big(\bigcap_{i \in I} X_i \bigcap_{j \in J} X_j\Big) \quad \ldots\ 4.5.1$$

Pero la expresión:

$$\sum_{I \in I_m^r} \sum_{J \in J_{m-r}^k} \mu(\bigcap_{i \in I} X_i \bigcap_{j \in J} X_j)$$

puede simplificarse considerando que los elementos que entran en cada término $\cap X_i \cap X_j$ son $r + k$, distintos entre sí; luego serán términos de:

$$\sum_{I \in I_m^{r+k}} \bigcap_{i \in I} X_i$$

Por otra parte, el número de términos de aquella expresión es:

$$\binom{m}{r} \binom{m-r}{k} = \binom{r+k}{r} \binom{m}{r+k}$$

Luego, por simetría de los subíndices, cada término estará repetido

$\binom{r+k}{r}$ veces y por tanto:

$$\sum_{I \in I_m^r} \sum_{J \in J_{m-r}^k} \mu(\bigcap_{i \in I} X_i \bigcap_{j \in J} X_j) = \binom{r+k}{r} \sum_{I \in I_m^{r+k}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i$$

y sustituyendo esta expresión en 4.5.1, se tiene:

$$\mu\ H_{[m,\ r]} = \sum_{k=o}^{m-r} (-1)^k \binom{r+k}{r} \sum_{I \in I_m^{r+k}} \mu \bigcap_{i \in I} X_i$$

o bien, utilizando la notación de las S_μ:

$$\mu\ H_{[m,\ r]} = \sum_{k=o}^{m-r} (-1)^k \binom{r+k}{r} S_\mu(m, r+k) \qquad \ldots 4.5.2$$

que también se puede expresar como sigue:

$$\mu\ H_{[m,\ r]} = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_\mu(m, k) \qquad \ldots 4.5.3$$

4.51. *Casos particulares:* $r = 0$, $r = 1$ y $r = m$.—Análogamente a lo indicado 4.41 se pueden obtener, bien de la fórmula anterior, o bien directamente, los siguientes valores:

Para $r = 0$

$$\mu\ H_{[m,\,0]} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\ S_\mu(m, k) = \mu\ Q_0$$

que coincide, naturalmente, con 4.41.1.

Para $r = m$

$$\mu\ H_{[m,\,m]} = \mu \bigcap_{i=1}^{m} X_i = \mu\ Q_{12\,.m}$$

o sea, el valor obtenido en 4.41.2.

Para $r = 1$

$$\mu\ H_{[m,\,1]} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\ k\ S_\mu(m, k)$$

4.6. Medida de la expresión $H(m, r)$

El valor de la expresión $H(m, r)$, definida en 3.72, es:

$$H_{(m,\,r)} = \sum_{t=r}^{m} H_{[m,\,t]}$$

y por ser disjuntos los $H_{[m,\,t]}$ según 3.71, se tiene:

$$\mu\ H_{(m,\,r)} = \sum_{t=r}^{m} \mu\ H_{[m,\,t]}$$

Aplicando a esta expresión la fórmula 4.5.2, resulta:

$$\mu\ H_{(m,\,r)} = \sum_{t=r}^{m} \sum_{k=t}^{m} (-1)^{k-t} \binom{k}{t} S(m, k)$$

$$= \sum_{t=r}^{m} \sum_{k=t}^{m} (-1)^k \, S(m, k) \cdot (-1)^{-t} \binom{k}{t}$$

Invirtiendo el orden los sumatorios:

$$\mu \, H_{(m, r)} = \sum_{k=r}^{m} (-1)^k \, S(m, k) \sum_{t=r}^{k} (-1)^t \binom{k}{t}$$

y siendo:

$$\sum_{t=r}^{k} (-1)^t \binom{k}{t} = (-1)^r \binom{k-1}{r-1}$$

resulta:

$$\mu \, H_{(m, r)} = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S(m, k) \qquad \ldots 4.6.1$$

o bien:

$$\mu \, H_{(m, r)} = \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{r+k-1}{k} S(m, r+k) \qquad \ldots 4.6.2$$

4.61. *Casos particulares:* $r = 0$, $r = 1$ y $r = m$.—Teniendo en cuenta los valores obtenidos en 3.74, resulta:

Para $r = 0$:

$$\mu \, H_{(m, o)} = \mu \, \Omega$$

Para $r = m$:

$$\mu \, H_{(m, m)} = \mu \bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

Para $r = 1$, de 3.72 y 4.3, se tiene:

$$\mu \, H_{(m, 1)} = \mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \, S(m, k)$$

4.7. Medida de la expresión $H(\overrightarrow{m, r})$

El valor de la expresión de $H(\overrightarrow{m, r})$, en función de los átomos de B_m, es (3.73):

$$H_{(\overrightarrow{m, r})} = \sum_{t=o}^{r} H_{[m, t]}$$

La medida μ de $H(\overrightarrow{m, r})$ se puede deducir de 4.5.1. También se puede obtener de 4.61, ya que $H(\overrightarrow{m, r})$ es el complemento de $H(m, r+1)$.

Utilizando el segundo método, se tiene:

$$\Omega = \sum_{t=o}^{m} H_{[m, t]} = \sum_{t=o}^{r} H_{[m, t]} + \sum_{t=r+1}^{m} H_{[m, t]}$$

Por ser disjuntos los términos del último miembro:

$$\mu(\Omega) = \mu \sum_{t=o}^{r} H_{[m, t]} + \mu \sum_{t=r+1}^{m} H_{[m, t]}$$

$$= \mu\ H_{(\overrightarrow{m, r})} + \mu\ H_{(m, r+1)}$$

Luego:

$$\mu\ H_{(\overrightarrow{m, r})} = \mu\ \Omega - \mu\ H_{(m, r+1)}$$

y aplicando el valor obtenido en 4.62:

$$\mu\ H_{(\overrightarrow{m, r})} = \mu\ \Omega - \sum_{k=o}^{m-r-1} (-1)^k \binom{r+k}{k} S(m, r+k+1)$$

4.71. *Casos particulares:* r = 0 y r = m.—De los valores obtenidos en 3.74, se tiene:

$$\mu\ H_{(\overrightarrow{m, o})} = \mu\ H_{[m, o]} = \mu\ Q_o$$

$$\mu\ H_{(\overrightarrow{m, m})} = \mu\ \Omega$$

4.8. RELACIONES ENTRE LAS MEDIDAS DE LAS FUNCIONES H_α PARA LOS CASOS PARTICULARES

Resumiendo las fórmulas dadas en 4.41, 4.51, 4.61 y 4.71, se tiene:

$$\mu \, H_{(\overrightarrow{m, o})} = \mu \, H_{[m, o]} = \mu \, Q_o = \sum_{k=o}^{m} (-1)^k \; S(m, k)$$

$$\mu \, H_{(m, m)} = \mu \, H_{[m, m]} = \mu \, Q_{12\ldots m} = \mu \, R_{12\ldots m} = \mu \bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

$$\mu \, H_{(\overrightarrow{m, m})} = \mu \, H_{(m, o)} = \mu \, R_o = \mu \, \Omega$$

$$\mu \, H_{(m, 1)} = \mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \; S(m, k)$$

$$\mu \, H_{[m, 1]} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \; k \, S(m, k)$$

5. APLICACION AL CALCULO DE PROBABILIDADES

Las fórmulas obtenidas en el capítulo anterior generalizan las que se emplean en las Algebras de sucesos con medida una probabilidad.

En general, cuando se trata de calcular la probabilidad de una función booleana de un Algebra de sucesos bastará, como ya se ha indicado, con expresar dicha función en su forma canónica (3.6) y aplicar la fórmula que da la medida de los átomos en función de los monomios (4.4) referida a la medida *P*. Las fórmulas que se obtienen, a título de ejemplo, en este capítulo suelen figurar, en general, en los tratados de Cálculo de Probabilidades. La monografía de Frechet (13) recoge los trabajos más destacados sobre esta cuestión. Su método difiere, sin embargo, del que se sigue en este trabajo.

5.1. PROBABILIDADES DE LAS FUNCIONES H_α.

5.11. *Probabilidad de que, de* m *sucesos dados* $X_1, X_2, \ldots, X_m$, *se verifique al menos uno.*—La probabilidad pedida será la del suceso

$$H_{(m,1)} = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$$

y aplicando la fórmula 4.3, se obtiene la fórmula de Poincaré:

$$P_1 = P(\bigcup_{i=1}^{m} X_i) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} S(m, k)$$

en la que, según 4.11:

$$S(m, k) = S_P(m, k) = \sum_{I \in I_m^k} P \bigcap_{i \in I} X_i$$

5.12. *Probabilidad de que, de* m *sucesos dados* $\{X_i\}_{i \in N_m}$ *ocurran* exactamente r de ellos.—De 3.71 y 4.5.2, se tiene:

$$P_{[r]} = P(H_{[m,r]}) = \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{r+k}{r} S(m, r+k)$$

Esta fórmula y la anterior, P_1, son obtenidas por Feller (12) mediante el método de inclusión y exclusión.

5.13. *Probabilidad de que, de* m *sucesos dados* $\{X_i\}_{i \in N_m}$ *ocurran* al menos r de ellos.—De 3.72 y 4.6.1 resulta:

$$P_r = P(H_{(m,r)}) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S(m, k)$$

5.2. CASO EN QUE LOS SUCESOS SON INDEPENDIENTES

5.21. *Esquema de Poisson.*—En el caso de que los m sucesos dados $\{X_i\}_{i \in N_m}$ sean independientes —esquema de Poisson— se tiene:

$$P \bigcap_{t=1}^{k} X_{i_t} = \prod_{t=1}^{k} P X_{i_t}$$

y en las fórmulas anteriores, los sumatorios $S(m, k)$ serán de la forma:

$$S(m, k) = \sum_{I \in I_m^k} P(\bigcap_{i \in I} X_i) = \sum_{I \in I_m^k} \prod_{i \in I} P\, X_i$$

5.22. *Esquema de Bernoulli.*—Un caso particular interesante ocurre en el esquema de Poisson cuando los sucesos X_i tienen igual probabilidad —esquema de Bernoulli—. En este caso, se verifica:

$$P\, X_i = p \Rightarrow S(m, k) = \sum_{I \in I_m^k} \prod_{i \in I} P\, X_i = \sum_{t=1}^{t=\binom{m}{k}} p^k = \binom{m}{k} p^k$$

La probabilidad de que en el esquema de Bernoulli se verifiquen en una prueba, exactamente r sucesos, será (5.2):

$$\begin{aligned} P^{(B)}_{[m, r]} &= \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{r+k}{k} S(m, r+k) \\ &= \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{r+k}{k} \binom{m}{r+k} p^{r+k} \\ &= \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{m}{r} \binom{m-r}{k} p^{r+k} \\ &= \binom{m}{r} p^r \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{m-r}{k} p^k \end{aligned}$$

y por tanto

$$P^{(B)}_{[m, r]} = \binom{m}{r} p^r (1-p)^{m-r}$$

y si se hace, $q = 1 - p$, resulta:

$$P^{(B)}_{[m, r]} = \binom{m}{r} p^r q^{m-r}$$

En particular, para $r = 0$ y $r = m$

$$P^{(B)}_{[m, 0]} = q^m \quad ,, \quad P^{(B)}_{[m, m]} = p^m$$

6. TEORIA ACTUARIAL DE LOS GRUPOS DE *m* VIDAS

El método clásico seguido en la teoría sobre grupos de vidas, es obtener las expresiones de las probabilidades y de las operaciones actuariales sobre los grupos que se extinguen al primer fallecimiento o disolución del grupo y luego, por diversos procedimientos, deducir las fórmulas correspondientes a otros sucesos en función de aquéllas.

Dichos procedimientos se sistematizan utilizando las estructuras de Boole, retículos y álgebras, y ciertas medidas sobre los elementos de estas estructuras, como vamos a mostrar a continuación.

6.1. Estructura booleana de los sucesos asegurables

En general, la clase de sucesos ligada a cada contrato de seguro y el suceso cierto Ω, forman un álgebra de Boole y puede convenirse, para mayor generalidad, que dichos sucesos pertenecen a una σ-álgebra.

Si a cada uno de los sucesos pertenecientes a B_m le asociamos una medida μ, tendremos definido un espacio medida (Ω, B_m, μ), análogo al desarrollado en los capítulos anteriores y en el cual la medida de los sucesos compuestos (funciones booleanas) pueden obtenerse como suma de las medidas de los sucesos básicos (monomios booleanos).

6.11. *Las operaciones actuariales como medidas de los sucesos de un álgebra.*—Para lograr lo indicado en el párrafo anterior, hay que convenir, de acuerdo con la técnica del seguro, que dichas operaciones actuariales son funciones de conjunto (sucesos), aditivas y no negativas. O sea, que si $\alpha(Z)$ representa una operación actuarial sobre un suceso $Z \in B_m$ se verifica:

1. $\forall\ Z \in B_m \ \Rightarrow\ \alpha(Z) \geqslant 0.$

2. $Z_i \in B_m \ \Rightarrow\ \alpha\Big(\sum\limits_{i \in N} Z_i\Big) = \sum\limits_{i \in N} \alpha(Z_i).$

3. $\alpha(\phi) = 0.$

Las propiedades anteriores, pueden resumirse diciendo que las operaciones actuariales y en particular las probabilidades son medidas α sobre la clase aditiva B_m de sucesos de un experimento aleatorio o espacio actuarial Ω. Estas características definen el espacio medida actuarial: (Ω, B_m, α), ya indicado.

Una vez establecido el espacio actuarial y conocidos los valores de las operaciones actuariales de los sucesos básicos, bastará aplicar las reglas deducidas en el capítulo IV para obtener el valor correspondiente, a cualquier otro suceso del álgebra considerada.

Nota sobre los sucesos básicos:

La definición de los sucesos básicos dependerá de las características de los riesgos asegurados. Así, en el caso de las operaciones sobre grupos de m vidas, se suelen tomar como básicos aquellos en que los grupos de k vidas, $0 \leqslant k \leqslant m$, desaparecen, como tales, al primer fallecimiento, o sea, a la disolución del grupo. También se podrían tomar en este caso, como sucesos básicos, los sucesos correspondientes a los grupos de k vidas que desaparecen al último fallecimiento, es decir, a la extinción del grupo. Esto último equivaldría, utilizando el lenguaje booleano, a expresar las funciones de Boole en su forma disyuntiva, en vez de la conjuntiva aplicada en los capítulos anteriores.

6.12. *Restricción del estudio a los grupos de* m *vidas.*—El método indicado puede aplicarse, con gran generalidad, a los diversos riesgos asegurables. Ahora bien, con el objeto de simplificar su exposición y evitar la casuística de la técnica del seguro, vamos a aplicarlo a la teoría de los grupos de m vidas, ya que, como se dijo en la introducción, sólo se pretende en este trabajo indicar un método que puede sistematizar algunos de los problemas del Cálculo Actuarial.

Concretándonos a la teoría de los grupos de m vidas, puede establecerse que el grupo deja de existir o desaparece, como tal, por diversas causas; enfermedad de algunos de sus componentes, por cambios de su estado civil, por la muerte de una o varias de las personas que los integran, etc. Ahora bien, para poder aplicar el cálculo actuarial a dicho grupo, es necesario determinar, *a priori*, de forma precisa, las condiciones o causas que definen la desaparición del grupo de tal manera que, en cualquier momento el grupo existe o bien ha desaparecido anteriormente, sin que existan contradicciones ni ambigüedades en la definición dada.

En nuestro estudio vamos a considerar únicamente los grupos en los cuales una persona deja de pertenecer al mismo por su fallecimiento, prescindiendo de otras causas o modalidades y limitándonos, por ahora, al estudio de los casos de supervivencia simple. Para el estudio de los problemas de supervivencia compuesta, es necesario introducir, además del conocimiento de las operaciones al primer fallecimiento, monomios booleanos, el de otras expresiones, tales como aquéllas en que una persona determinada muere la primera, y esta cuestión modifica, en parte, la sistemática del estudio que estamos desarrollando.

Con el fin de evitar repeticiones, sólo se estudiará, en los capítulos siguientes, las probabilidades y las rentas sobre grupos de vidas.

Para los capitales diferidos y las esperanzas de vida, basta con sustituir las medidas P y a por las E y $\dot{e}$ para obtener las fórmulas correspondientes, análogas en un todo a las que se obtendrán para las probabilidades y las rentas.

Respecto a los seguros, como éstos pueden ser expresados, en general, en función de las rentas, basta el estudio de las mismas para deducir las diversas expresiones de los seguros sobre un grupo de m vidas. Sin embargo, también pueden ser estudiadas las operaciones de los seguros independientemente de las rentas, en cuyo caso habrá que definir la estructura originada por los sucesos que intervienen en aquellas operaciones. Ahora bien, en los seguros sobre grupos carecen de significado algunas de las funciones del álgebra B_m, definidas en los capítulos anteriores, debiéndose adoptar, para dichos seguros, la estructura de un retículo distributivo de m generadores.

Las características anteriores hacen que la sistemática de su desarrollo difiera de la aplicable a las álgebras booleanas, por lo que prescindiremos de su exposición en este trabajo. No obstante, como iniciación a su estudio, se indicará en el último capítulo la aplicación de un retículo de tres generadores a los seguros sobre un grupo de tres vidas.

6.2. Estructura booleana de los riesgos sobre los grupos de m vidas

Consideremos un grupo de m personas cuyas edades actuales son $X_1, X_2, \ldots, X_m$ y que sólo dejan de pertenecer al mismo por su fallecimiento.

6.21. *Espacio actuarial:* $\Omega(X_1, X_2, \ldots, X_m)$.—Los sucesos que originan variaciones en el grupo considerado son los subconjuntos del espacio muestral: $\Omega(X_1, X_2, \ldots, X_m)$.

Para simplificar, se designará simplemente por Ω el espacio muestral y por x_i a la persona de edad actual x_i.

6.22. *Significado actuarial de los sucesos de* Ω.—Respecto al grupo de m personas se pueden definir los siguientes sucesos:

El suceso X_i de que la persona (x_i) de edad actual x_i alcance la edad x_{i+t}, o sea, que viva t años más.

El suceso $\bigcap\limits_{\nu=1}^{k} X_{i_\nu}$ consistente en que las personas X_{i_1} $X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ vivan todas ellas t años más.

Que al menos una de las personas $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ viva después de transcurrido el tiempo t, será el suceso $\bigcup\limits_{\nu=1}^{k} X_{i_\nu}$:

El suceso X_i^c, opuesto de X_i, será que x_i fallezca antes de cumplir la edad x_{i+t}.

Por $X_i \,\Delta\, X_j$ se representará el suceso de que viva x_i "o bien" x_j, t años más, excluyendo el que vivan ambas; lo que también se expresa diciendo que de las dos personas viva *exactamente* una de ellas al final del tiempo t.

6.3. ALGEBRA BOOLEANA ACTUARIAL: A_m

Los sucesos y operaciones definidos en 6.2 originan un álgebra de sucesos de m generadores (3.1) que llamaremos Algebra Actuarial y se representará por A_m.

Funciones booleanas de A_m.—Por un proceso análogo al indicado en el capítulo III, se pueden definir, sobre esta álgebra A_m, las funciones booleanas engendradas por $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

El significado actuarial de las expresiones utilizadas con más frecuencia, definidas en dicho capítulo III, son:

6.31. *Monomios de orden* k.—Es el suceso de que vivan simultáneamente dentro de t años, las personas $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$.

Los monomios se corresponden con los sucesos de primera especie o básicos; grupos que se extinguen al primer fallecimiento.

6.32. *Atomos.*—Un átomo de orden r de A_m (3.41):

$$Q_{I_r} = \bigcap_{\nu=1}^{r} X_{i_\nu} \bigcap_{\nu=r+1}^{m} X^c_{i_\nu}$$

representa el suceso de que, transcurrido el tiempo t, vivan las personas $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ y hayan fallecido $x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}, \ldots, x_{i_m}$.

6.33. *Las familias de funciones,* H_α *de* A_m.—El significado actuarial de las funciones H_α es:

6.331. La suma de todos los átomos de orden r:

$$H_{[m,\, r]} = \sum_{I \in I_m^r} Q_I = \sum_{I \in I_m^r} \bigcap_{i \in I} X_i \bigcap_{j \in J} X_j^c$$

Esta expresión representa el suceso de que dentro de t años vivan *exactamente* r de las personas $x_1, x_2, \ldots, x_m$, o sea, que vivan r y solamente r.

6.332. La suma de todos los átomos de orden superior a $r - 1$

$$H_{(m,\, r)} = \sum_{k=r}^{m} H_{[m,\, r]}$$

expresión que representa el suceso de que, transcurridos t años, vivan *al menos* r de las personas consideradas $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

6.333. La suma de todos los átomos de orden igual o inferior a r:

$$H_{(\overrightarrow{m,\, r})} = \sum_{k=0}^{r} H_{[m,\, k]}$$

o sea, el suceso de que al cabo del tiempo t vivan a lo sumo r de las personas consideradas.

6.34. *Otras funciones de* A_m. *Su forma canónica.*—A cualquier otro suceso perteneciente al álgebra A_m como resultado de aplicar un número finito de veces las operaciones definidas a los sucesos X_i o a

4

sus complementarios, le corresponde una función booleana determinada, y con éstas pueden ser obtenidas de forma sistemática y exhaustiva (3.63) a partir de los átomos de A_m, resulta inmediata la obtención de todos los sucesos del álgebra A_m y su expresión canónica (3.62).

A título de ejemplo, en el capítulo X, se desarrollará con todo detalle el álgebra A_2.

6.4. Algebra actuarial reducida: A^*_m

En ciertas aplicaciones se presenta el caso de que el espacio Ω coincide con la reunión $\bigcup_{i=1}^{m} X_i$ de los generadores X_i. En este caso a la subálgebra que resulta le llamaremos álgebra reducida A^*_m de m generadores.

6.41. *Propiedades.* — Son inmediatas las siguientes propiedades de A_m:

1. $H_{[m,\,o]} = H_{(\overrightarrow{m,\,o})} = (\bigcup_{i=1} X_i)^c = Q_0 = \phi.$

2. $H_{(m,\,o)} = H_{(\overrightarrow{m,\,m})} = H_{(m,\,1)} = R_0 = \bigcup_{i=1}^{m} X_i = \Omega.$

3. $H_{[m,\,m]} = H_{(m,\,m)} = \bigcap_{i=1}^{m} X_i.$

4. $H_{[m,\,1]} = H_{(\overrightarrow{m,\,1})}.$

5. El número de átomos (3.43) es $2^m - 1$.

6. El total de funciones booleanas distintas (3.64) es $2^{2^m - 1}$.

7. PROBABILIDADES SOBRE GRUPOS DE VIDAS

Si a los sucesos definidos en el álgebra A_m (6.22) les aplicamos la medida P, definida como la probabilidad de que se verifiquen aquellos sucesos, se podrá, por medio de las fórmulas obtenidas en el capítulo IV, deducir la probabilidad de los sucesos de A_m en función de las probabilidades de los monomios de dicha álgebra, o sea, en términos actuariales, se podrá calcular la probabilidad de cualquier suceso relativo a un grupo de m vidas, en función de las probabilidades correspondientes a grupos que se extinguen al primer fallecimiento.

Como aplicación, vamos a obtener las fórmulas correspondientes a los sucesos más utilizados en la técnica del Seguro. Ahora bien, siendo inmediata la obtención de dichas fórmulas a partir de las dadas en el capítulo IV, nos limitaremos a dar la referencia de aquéllas de las que se deducen.

En el capítulo X, al estudiar el álgebra A_2, se establecerán de forma sistemática y exhaustiva las probabilidades correspondientes a las $2^{2^2} = 16$ funciones booleanas de A_2. El método utilizado allí es general, no presentándose otra dificultad para valores superiores de m que el elevado número de funciones booleanas que se obtienen.

7.1. La expresión Z_k

En la Matemática del Seguro se suele representar por Z_k la suma de las probabilidades de todos los monomios de orden k de A_m, o sea, el símbolo Z_k coincide con el $S_\mu(m, k)$ definido en 4.1, cuando la medida μ es la probabilidad de los grupos de vidas que desaparecen al primer fallecimiento. Luego:

$$Z_k = S_P(m, k) = \sum_{I \in I_m^k} {}_tp_{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}}$$

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

En particular para $k = 0$, $k = 1$ y $k = m$, se tiene:

$$Z_0 = P\,\Omega = 1$$

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{m} {}_tp_{x_i}$$

$$Z_m = P \bigcap_{i=1}^{m} X_i = {}_tp_{x_1, x_2, \ldots, x_m}$$

7.2. PROBABILIDADES DE LOS SUCESOS BÁSICOS

Se tomarán como sucesos básicos los monomios, 6.31, de A_m. Su expresión y notación actuarial es la siguiente:

Probabilidad de que dado un grupo de k personas $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ vivan *todas ellas* transcurrido el tiempo t.

El valor de esta expresión es, según 6.22:

$$ {}_t p_{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}} = P\left(\bigcap_{\nu=1}^{k} X_{i_\nu} \right) $$

7.3. PROBABILIDAD DE LOS ÁTOMOS

Su expresión actuarial es:

Probabilidad de que, de m personas dadas, de edades actuales $x_1, x_2, \ldots, x_m$, vivan r determinadas de ellas al cabo del tiempo t y hayan fallecido las $m - r$ restantes.

Si, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son las m personas del grupo considerado, $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ las que vivirán y $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{m-r}}$ las fallecidas, en el intervalo del tiempo t —siendo éstas x_j las $m - r$ personas distintas de las x_i—, entonces, la probabilidad pedida será (4.4):

$$ {}_t p_{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}} \cdot / {}_t q_{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{m-r}}} = \underset{I \in I_m}{P \cdot Q_I} = $$

$$ = \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \sum_{\{j\}_k \in J_{m-r}} {}_t p_{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}} $$

$$ \{j_k\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} $$

7.4. PROBABILIDAD DE QUE, DE m PERSONAS, VIVAN "EXACTAMENTE" r AL FINAL DEL TIEMPO t: ${}_t p_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{[r]}$

Se trata de calcular la probabilidad de que se verifique el suceso $H_{[m, r]}$ definido en 6.331. Aplicando la fórmula obtenida en 4.51 y utilizando la notación actuarial:

$$ {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{[r]} = P(H_{[m, r]}) $$

$$ = \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{r+k}{r} Z_{r+k} $$

Esta probabilidad se suele expresar simbólicamente en los tratados de Cálculo Actuarial de la siguiente forma:

$$ {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{[r]} = \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}} $$

7.5. PROBABILIDAD DE QUE, DE *m* PERSONAS CONSIDERADAS, VIVAN "AL MENOS" *r* AL FINAL DEL TIEMPO *t*: ${}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{r}$

Se trata de calcular la probabilidad de que se verifique el suceso *H*(*m*, *r*) definido en 6.332. Su valor se obtiene de 4.61:

$$ {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{r} = P(H_{(m, r)}) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} Z_k $$

o también

$$ {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{r} = \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{r+k-1}{k} Z_{r+k} $$

fórmula que suele expresarse en la forma simbólica siguiente:

$$ {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{r} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r} $$

7.6. PROBABILIDAD DE QUE DE *m* PERSONAS VIVAN AL CABO DEL TIEMPO *t* "A LO SUMO" *r*

El valor de esta probabilidad se obtiene aplicando la fórmula 4.7 al suceso definido en 6.333:

$$ {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{\to r} = 1 - \sum_{k=0}^{m-r-1} (-1)^k \binom{r+k}{k} Z_{r+k+1} = 1 - {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{r+1} $$

7.7. Casos particulares: $r = 0$, $r = 1$ y $r = m$

7.71. *Notación actuarial.*—El significado y notación actuarial de las probabilidades correspondientes a $r = 0$, $r = 1$ y $r = m$ son:

Probabilidad de que al cabo del tiempo t:

a) Vivan todas, o sea, no se haya disuelto el grupo:

$$ {}_tp_{x_1, x_2, \ldots, x_m} = {}_tp^{[m]}_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} $$

b) Viva por lo menos una, o sea, no se haya extinguido el grupo:

$$ {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = {}_tp^{1}_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} $$

Las probabilidades complementarias o contrarias de las dos anteriores, son:

a') Haya fallecido por lo menos una, o sea, que se haya disuelto el grupo:

$$ {}_tq_{x_1, x_2, \ldots, x_m} = {}_tq^{1}_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = 1 - {}_tp_{x_1, x_2, \ldots, x_m} $$

b') Hayan fallecido todas, es decir, que se haya extinguido el grupo:

$$ {}_tq_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = {}_tp^{[o]}_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = 1 - {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} $$

7.72. *Valores y relaciones.*—De las fórmulas anteriores y de las establecidas en 4.8, resultan los siguientes valores y relaciones:

$$ {}_tp_{x_1, x_2, \ldots, x_m} = {}_tp^{[m]}_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = {}_tp^{m}_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} $$

$$ {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} Z_k $$

$$ {}_tq_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = {}_tp^{[o]}_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = {}_tp^{\to o}_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = \sum_{k=o}^{m} (-1)^{k} Z_k $$

$$ = 1 - {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} $$

$$ {}_tq_{x_1, x_2, \ldots, x_m} = 1 - {}_tp_{x_1, x_2, \ldots, x_m} $$

$$ {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{\,0} = {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{\,\to m} = 1 $$

$$ {}_tp_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{\,[1]} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\, k\, Z_k $$

8. RENTAS SOBRE UN GRUPO DE *m* VIDAS

La estructura booleana aplicable al estudio de las rentas sobre un grupo de *m* vidas será el álgebra reducida A^*_m definida en 6.4; ya que, en las rentas vitalicias sobre grupos de vidas, la operación finaliza, a lo sumo, con el último fallecimiento del grupo.

Si se define en el álgebra A^*_m la operación actuarial llamada *renta vitalicia* como una medida, *a*, de los sucesos de dicha álgebra, según se indicó en 6.11, el cálculo de las rentas de los sucesos de A^*_m, en función de las rentas pagaderas hasta el primer fallecimiento, es una simple e inmediata aplicación de las fórmulas dadas en el capítulo IV. No obstante, con el fin de poner de manifiesto la conexión entre la nomenclatura actuarial y la booleana, vamos a dar la expresión de algunas de las clases de rentas más utilizadas en la técnica del seguro.

Además, como aplicación de lo expuesto en 3.6, sobre el método de expresar un suceso cualquiera en su forma canónica, se obtendrán las expresiones de algunos sucesos especiales referidos al caso de un grupo de tres vidas. Por último, en el capítulo VII, se hará un estudio completo del álgebra A_2, deduciendo las expresiones de *todas* las rentas sobre dos vidas.

Las fórmulas que se obtendrán son aplicables, en general, a los distintos tipos de rentas, bien en sus modalidades por la época del pago: temporales, continuas, prepagables y postpagables, o bien, respecto a características especiales, como: invalidez, viudedad, etc. Para simplificar el desarrollo, nos referiremos a rentas en general.

8.1. Nomenclatura actuarial y booleana de las rentas

Dada el álgebra A^*_m se pueden definir las siguientes rentas, como medida de sucesos de dicha álgebra.

8.11. *Renta pagadera a una persona* x_i *mientras viva*:

$$X_i \in A^*_m \quad \Rightarrow \quad a_{x_i} = a(X_i)$$

8.12. *Renta pagadera al grupo formado por las vidas* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ *hasta que se produzca el primer fallecimiento —disolución del grupo—*:

$$X_{i_\nu} \in A^*_m \quad \Rightarrow \quad a_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}} = a(\bigcap_{r=1}^{k} X_{i_r})$$

8.13. *Renta pagadera al grupo* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ *hasta el último fallecimiento, es decir, hasta la extinción del grupo*:

$$X_{i_\nu} \in A^*_m \quad \Rightarrow \quad a_{\overline{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}} = a(\bigcup_{r=1}^{k} X_{i_r})$$

8.14. *Renta de supervivencia pagadera a* x_j *a partir del fallecimiento de* x_i:

$$X_i, X_j \in A^*_m \quad \Rightarrow \quad a_{x_i/x_j} = a(X_i^c X_j)$$

y según 4.4, resulta:

$$a_{x_i/x_j} = a_{x_j} - a_{x_i x_j}$$

8.2. Generalización a los grupos de vidas formando "status"

En ciertos casos, el cálculo de las expresiones de las rentas se simplifica notablemente, considerando algunos de los grupos formando "status", o sea, en términos booleanos, sucesos de A_m.

Sólo pondremos ahora algunos ejemplos de aplicación de este método, dejando indicado el suceso sobre el cual se ha de calcular la renta. En el párrafo 9.4, después de obtener algunas de las fórmulas más usadas de rentas sobre un grupo de tres vidas por el método general, se volverán a deducir, en 9.5, algunas de ellas, utilizando ciertos "status" y se comprobará que, en general, este método facilita bastante la obtención de las fórmulas requeridas.

8.21. *Ejemplos de rentas sobre dos subgrupos.*—Vamos a dar la expresión de algunas rentas sobre los dos grupos: $G(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ y el $G_2(X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_m)$.

8.211. Renta pagadera hasta la disolución del primer grupo que se disuelva:

$$a_{x_1, x_2, \ldots, x_r \,:\, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m} =$$

$$= a\Big(\bigcap_{i=1}^{r} X_i \cap \bigcap_{j=r+1}^{m} X_j\Big) = a\Big(\bigcap_{i=1}^{m} X_i\Big) = a_{x_1, x_2, \ldots, x_m}$$

8.212. Renta pagadera hasta la disolución del segundo grupo que se disuelva:

$$a_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_r \,:\, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m}} = a\Big(\bigcap_{i=1}^{r} X_i \cup \bigcap_{j=r+1}^{m} X_j\Big)$$

8.213. Renta pagadera hasta que se produzca el primero de los dos sucesos siguientes: disolución de G_1, o extinción de G_2:

$$a_{x_1, x_2, \ldots, x_r \,:\, \overline{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m}} = a\Big[\bigcap_{i=1}^{r} X_i \cap \Big(\bigcup_{j=r+1}^{m} X_j\Big)\Big]$$

8.214. Renta pagadera hasta que se extingan los dos grupos:

$$a_{\overline{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_r} \,:\, \overline{x_{r+1}, \ldots, x_m}}} =$$

$$= a\Big(\bigcup_{i=1}^{r} X_i \cup \bigcup_{j=r+1}^{m} X_j\Big) = a\Big(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\Big) = a_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}$$

8.22. *Rentas de supervivencia sobre subconjuntos, "status", de* A^*_m.—Las rentas de supervivencia, 8.14, sobre "status" son:

8.221. Renta pagadera desde la disolución del grupo G_1 hasta la disolución de G_2:

$$a_{x_1, \ldots, x_r / x_{r+1}, \ldots, x_m} =$$

$$= a\Big[\Big(\bigcap_{i=1}^{r} X_i\Big)^c \bigcap_{j=r+1}^{m} X_j\Big] = a \bigcap_{j=r+1}^{m} X_j - a \bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

8.222. R. p. desde la disolución de G_1 hasta la extinción de G_2·

$$a_{x_1,\ldots,x_r/\overline{x_{r+1},\ldots,x_m}} =$$

$$= a\Big[\Big(\bigcap_{i=1}^{r} X_i\Big)^c \bigcup_{j=r+1}^{m} X_j\Big] = a\bigcup_{j=r+1}^{m} X_j - a\Big(\bigcap_{i=1}^{r} X_i \cap \bigcup_{j=r+1}^{m} X_j\Big)$$

8.223. Renta pagadera desde la extinción del grupo G_1 hasta la disolución de G_2:

$$a_{\overline{x_1,\ldots,x_r}/x_{r+1},\ldots,x_m} =$$

$$= a\Big[\Big(\bigcup_{i=1}^{r} X_i\Big)^c \bigcap_{j=r+1}^{m} X_j\Big] = a\bigcap_{j=r+1}^{m} X_j - a\Big[\bigcup_{i=1}^{r} X_i \cap \bigcap_{j=r+1}^{m} X_j\Big]$$

8.224. R. p. desde la extinción de G_1 hasta la extinción de G_2:

$$a_{\overline{x_1,\ldots,x_r}/\overline{x_{r+1},\ldots,x_m}} =$$

$$= a\Big[\Big(\bigcup_{i=1}^{r} X_i\Big)^c \cap \bigcup_{j=r+1}^{m} X_j\Big] = a\bigcup_{j=r+1}^{m} X_j - a\Big[\bigcup_{i=1}^{m} X_i \cap \bigcup_{j=r+1}^{m} X_j\Big]$$

8.3. Rentas de los átomos

Si se considera el átomo de orden r definido en 6.32:

$$Q_{I\in I^r_m} = \bigcap_{\nu=1}^{r} X_{i_\nu} \bigcap_{\nu=1}^{m-r} X^c_{j_\nu} = \bigcap_{\nu=1}^{r} X_{i_\nu} \cap \Big(\bigcup_{\nu=1}^{m-r} X_{j_\nu}\Big)$$

el significado actuarial de una renta aplicada a este átomo será:

Renta pagadera desde la extinción del grupo G_2 hasta la disolución del grupo G_1.

El valor de esta renta será:

$$a(Q_{I\in I_m}) = a\Big(\bigcap_{\nu=1}^{r} X_{i_\nu} \bigcap_{j=1}^{m-r} X^c_{j_\nu}\Big)$$

y teniendo en cuenta la notación dada en 8.223:

$$a(Q_{I\in I^r_m}) = a_{\overline{x_{i_{r+1}}\ldots x_{i_m}}/x_{i_1}\ldots x_{i_r}}$$

La expresión de esta renta en función de rentas al primer fallecimiento será según 4.4:

$$a(Q_{I\in I^r_m}) = \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \sum_{J\in J^k_{m-r}} a\Big(\bigcap_{i\in I} X_i \bigcap_{j\in J} X_j\Big)$$

en la cual, como ya se indicó en 3.11:

$$I \cap J = \phi \quad ,, \quad I + J \subset N_m$$

Ejemplo:

$$a_{\overline{x_2\, x_4\, x_5}\, /\, x_1\, x_3} = a(X_1\, X_3\, X^c_2 X^c_4 X^c_5) = a(Q^{(5)}_{13}) \quad ,, \quad J_3 = \{2;4;5\}$$

$$a_{\overline{x_2\, x_4\, x_5}\, /\, x_1\, x_3} = \sum_{J\in J^0_3} a(X_1\, X_3 \bigcap_{j\in J} X_j) - \sum_{J\in J^1_3} a(X_1\, X_3 \bigcap_{j\in J} X_j)$$

$$+ \sum_{J\in J^2_3} a(X_1\, X_3 \bigcap_{j\in J} X_j) - \sum_{J\in J^3_3} a(X_1\, X_3 \bigcap_{j\in J} X_j)$$

$$= a(X_1\, X_3) - \Big[a(X_1\, X_3\, X_2) + a(X_1\, X_3\, X_4) +$$

$$+ a(X_1\, X_3\, X_5)\Big]$$

$$+ \Big[a(X_1\, X_3\, X_2\, X_4) + a(X_1\, X_3\, X_2\, X_5) +$$

$$+ a(X_1\, X_3\, X_4\, X_5)\Big] - a(X_1\, X_3\, X_2\, X_4\, X_5)$$

$$\therefore\ a_{\overline{x_2\, x_4\, x_5}\, /\, x_1\, x_3} = a_{x_1x_3} - (a_{x_1x_2x_3} + a_{x_1x_3x_5}) - a_{x_1x_2x_3x_4} +$$

$$+ a_{x_1x_2x_3x_5} + a_{x_1x_3x_4x_5} - a_{x_1x_2x_3x_4x_5}$$

8.4. Rentas de los sucesos de las familias H_α

8.41. *Renta pagadera a un grupo de vidas mientras vivan "exactamente"* r *de ellas.*—Aplicando la fórmula de 4.5 al suceso definido en 6.331, resulta:

$$a_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{[r]} = a(H_{[m, r]})$$

$$= \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{r+k}{r} S_a(m, k)$$

8.42. *Renta sobre un grupo de* m *vidas pagadera mientras vivan "al menos"* r *cualesquiera de ellas.*—De la fórmula 4.6 y la definición 6.332:

$$a_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{r} = a(H_{(m, r)}) = \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{r+k-1}{k} S_a(m, r+k)$$

8.43. *Renta sobre un grupo de* m *vidas, pagadera mientras vivan "a lo sumo"* r *cualesquiera de ellas.*—De la fórmula 4.7 y la definición 6.333, se tiene:

$$a_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{\rightarrow r} = a(H_{\overrightarrow{(m, r)}})$$

$$= a(\Omega) - \sum_{k=0}^{m-r-1} (-1)^k \binom{r+k}{k} S_a(m, r+k+1)$$

$$= a \bigcup_{i=1}^{m} X_i - \sum_{k=0}^{m-r-1} (-1)^k \binom{r+k}{k} S_a(m, r+k+1)$$

8.44. *Casos particulares*: r = 0, r = 1 *y* r = m.—De 4.8 y 6.4 se deducen inmediatamente las siguientes fórmulas para $r = 0$, $r = 1$ y $r = m$:

$$a\, H_{[m, 0]} = a\, H_{\overrightarrow{(m, 0)}} = a\, Q_0 = a(\phi) = 0$$

$$a\, H_{[m, m]} = a\, H_{(m, m)} = a \bigcap_{i=1}^{m} X_i = a_{x_1, x_2, \ldots, x_m}$$

$$a\, H_{(m, 0)} = a\, H_{\overrightarrow{m, m}} = a\, R_0 = a(\Omega) = a \bigcup_{i=1}^{m} X_i = a_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}$$

$$a\, H_{(m, 1)} = a \bigcup_{i=1}^{m} X_i = a_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}$$

$$a\,H_{(\overrightarrow{m, 1})} = a\,H_{[m, 1]} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\, k\, S_a(m, k)$$

8.45. *Relación entre las rentas de los casos particulares.*—Resumiendo las fórmulas anteriores y escribiéndolas con la notación actuarial se tiene:

$$a^{\rightarrow 0}_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = a^{[0]}_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}} = 0$$

$$a^{[m]}_{\overline{x_1, \ldots, x_m}} = a^{m}_{\overline{x, \ldots, x_m}} = a_{x_1, x_2, \ldots, x_m}$$

$$a_{\overline{x_1, \ldots, x_m}} = a^{\rightarrow m}_{\overline{x, \ldots, x_m}} = a^{1}_{\overline{x_1, \ldots, x_m}} = a_{\overline{x_1, \ldots, x_m}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\, S_a(m, k)$$

$$a^{\rightarrow 1}_{\overline{x_1, \ldots, x_m}} = a^{[1]}_{\overline{x_1, \ldots, x_m}} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\, k\, S_a(m, k)$$

8.5. Rentas sobre sucesos cualesquiera de A^*_m

Una vez más hemos de repetir que el cálculo de una renta de un suceso cualquiera de A^*_m no ofrece ninguna dificultad, una vez calculadas las rentas de los átomos en función de las rentas sobre grupos al primer fallecimiento. Basta con expresar el suceso en su forma canónica conjuntiva 3.63 y aplicar a esta expresión la medida a, esto es, la renta.

Formalmente, si el suceso dado es F, se tendrá:

$$F \in A^*_m \Rightarrow F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, Q(i)$$

$$a(F) = a \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, Q(i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; a\Big[Q(i)\Big]$$

en las que

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad ; \quad n = 2^m - 1 \quad y \quad Q(i) = \text{átomos de } A^*_m$$

Además, como los diferentes sucesos de A^*_m, cuyo número es $2^{2^m - 1}$; se pueden obtener sistemáticamente a partir de los átomos, también se podrá deducir, por el mismo método, la expresión de todas las rentas sobre un grupo de *m* vidas.

Como aplicación de lo estudiado en este capítulo, vamos a dar en el que sigue ejemplos de rentas sobre un grupo de tres vidas.

9. APLICACION A LAS RENTAS SOBRE UN GRUPO DE TRES VIDAS

De acuerdo con lo indicado en 8.5, la obtención de todas las rentas sobre los sucesos de A^*_3 es inmediata.

Como aplicación, vamos a deducir en 9.4 el valor de algunas de las rentas más utilizadas en la técnica del seguro.

Para simplificar la exposición, se suprimirá el enunciado del suceso determinante de las rentas, representado éstas mediante su notación internacional y la identificación de ésta a la forma booleana. A continuación se expresará el suceso en forma canónica, aplicando las reglas dadas en el capítulo II.

Se representarán, en lo que sigue, por X, Y, Z los tres generadores de A^*_3 por ser esta notación más usada en la técnica actuarial.

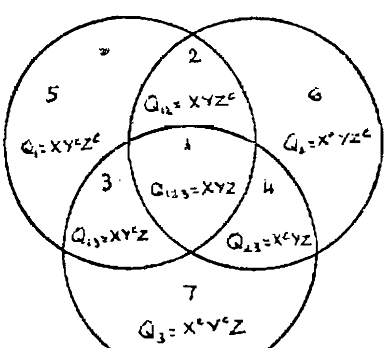
Iniciaremos el desarrollo calculando el valor de rentas sobre dos de las tres vidas dadas. En este caso, su cálculo sería más fácil considerando estas dos vidas como las variables del álgebra A^*_2, tal como se hará en el capítulo X; no obstante, se ha creído conveniente —para no alterar la sistemática del método utilizado— expresar los sucesos de dicha álgebra A_2^* en función de los átomos de A_3^*, es decir, como sucesos de esta A_3^* y, por tanto, calcular el valor de aquellas rentas sobre dos vidas como suma de las rentas de los átomos de A_3^*. Naturalmente, los resultados coinciden con los que luego se obtendrán de una forma más rápida al estudiar el álgebra A_2^*.

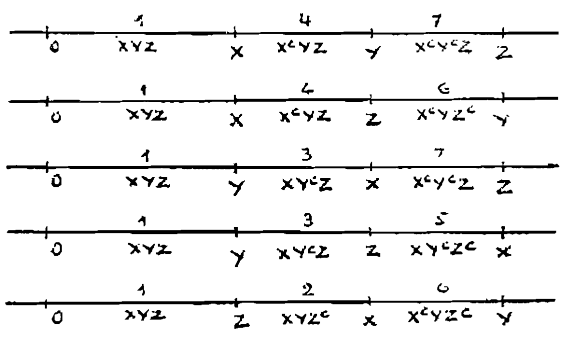
Por último, se darán ejemplos de la obtención de rentas cuando algunas de las vidas se sustituye por un grupo de ellas o "status".

9.1. Representación gráfica de los sucesos de A_3^*

Los sucesos de A_3^* pueden ser representados gráficamente por medio de los diagramas de Veen (fig. 1), y también considerando en la recta real los diferentes casos en que pueden sucederse los fallecimientos de las tres vidas x, y, z. En general, resulta más cómoda la primera representación; ahora bien, que nosotros sepamos, no ha sido utilizada en el Cálculo Actuarial.

Muchas veces resulta muy intuitiva la representación gráfica y con el fin de comprobar esta aseveración, se aplicará en 9.5 a los ejemplos sobre el cálculo simplificado de algunas rentas.





9.2. Rentas de los átomos de A_3^*

De la fórmula 8.3 para $m = 3$

$$\mu\, Q i_1 i_2 i_3 = \sum_{k=0}^{3-r} (-1)^k \sum_{\{j_1 \dots j_k\} \in J_{3-r}^k} \mu\left(\bigcap_{t=1}^{r} X_{i_t} \bigcap_{\nu=1}^{k} X_{j_\nu}\right)$$

se deducen inmediatamente las siguientes:

V.1.—$a(XYZ) = a_{xyz}$

V.2.—$a(XYZ^c) = a(XY) - a(XYZ) = a_{xy} - a_{xyz}$

V.3.—$a(XY^cZ) = a(XZ) - a(XYZ) = a_{xz} - a_{xyz}$

V.4.—$a(X^cYZ) = a(YZ) - a(XYZ) = a_{yz} - a_{xyz}$

V.5.—$a(XY^cZ^c) = a(X) - a(XY) - a(XZ) + a(XYZ) =$
$= a_x - a_{xy} - a_{xz} + a_{xyz}$

V.6.—$a(X^cYZ^c) = a(Y) - a(XY) - a(YZ) + a(XYZ) =$
$= a_y - a_{xy} - a_{yz} + a_{xyz}$

V.7.—$a(X^cY^cZ) = a(Z) - a(XZ) - a(YZ) + a(XYZ) =$
$= a_x - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz}$

9.3. Rentas de las funciones H

De las fórmulas dadas en 8.4, se deducen las siguientes expresiones:

$$a^{[1]}_{\overline{xyz}} = S(3,\ 1) - 2\ S(3,\ 2) + 3\ S(3,\ 3)$$

$$= a_x + a_y + a_z - 2(a_{xy} + a_{xz} + a_{yz}) + 3\ a_{xyz}$$

$$a^{[2]}_{\overline{xyz}} = S(3,\ 2) - 3\ S(3,\ 3)$$

$$= a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} - 3\ a_{xyz}$$

$$a^{1}_{\overline{xyz}} = S(3,\ 1) - S(3,\ 2) + S(3,\ 3)$$

$$= a_x + a_y + a_z - (a_{xy} + a_{xz} + a_{yz}) + a_{xyz}$$

$$a^{\;2}_{\overline{x\,y\,z}} = S(3,\,2) - 2\;S(3,\,3)$$

$$= a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} - 2\;a_{xyz}$$

Para los valores $r = 0$, $r = 1$ y $r = 3$, de 8.45, se tiene:

$$a^{\to 0}_{\overline{x\,y\,z}} = a^{[0]}_{\overline{x\,y\,z}} = 0$$

$$a^{3}_{\overline{x\,y\,z}} = a^{[3]}_{\overline{x\,y\,z}} = a_{x\,y\,z}$$

$$a^{0}_{\overline{x\,y\,z}} = a^{\to 3}_{\overline{x\,y\,z}} = a^{1}_{\overline{x\,y\,z}} = a_{\overline{x\,y\,z}}$$

$$a^{\to 1}_{\overline{x\,y\,z}} = a^{[1]}_{\overline{x\,y\,z}} = a_x + a_y + a_z - 2(a_{xy} + a_{xz} + a_{yz}) - 3a_{xyz}$$

9.4. Ejemplos de rentas de sucesos de A_3

Como se indicó al principio de este capítulo, vamos a dar la expresión de las rentas más típicas de la técnica actuarial, utilizando el método general, ya indicado repetidas veces en este trabajo. La sistemática seguida se resume con los siguientes apartados:

a) Identificación de la notación actuarial y la booleana.

b) Expresión del suceso en su forma canónica.

c) Valor de la renta como suma de rentas de átomos.

d) Sustitución de las rentas de los átomos por su valor en función de los monomios.

Con lo indicado anteriormente, creemos innecesario hacer aclaraciones particulares en los diferentes ejemplos que se van a dar, salvo la indicación, en algún caso, de la referencia de la propiedad del capítulo II que se utiliza.

Ejemplos

E. 1. $a_{xy} = a(XY)$

$$XY = XYZ + XYZ^c$$

$$a_{xy} = a(XYZ) + (XYZ^c)$$

$$\therefore\quad a_{xy} = a_{xy}$$

E. 2. $a_{\overline{xy}} = a(X \cup Y)$

$$X \cup Y = XYZ + XYZ^c + XY^cZ + X^cYZ + \\ + XY^cZ^c + X^cYZ^c + X^cY^cZ$$

$$a_{\overline{xy}} = a(XYZ) + a(XYZ^c) + a(XY^cZ) + a(X^cYZ) + \\ + a(XY^cZ^c) + a(X^cYZ^c) + a(X^cY^cZ)$$

$$\therefore \quad a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy}$$

E. 3. $a_{x/y} = a(X^cY)$

$$X^cY = X^cYZ + X^cYZ^c$$

$$a_{x/y} = a(X^cYZ) + a(X^cYZ^c)$$

$$\therefore \quad a_{x/y} = a_y - a_{xy}$$

E. 4. $a_{\overline{xy}}^{[1]} = a(X \,\Delta\, Y)$

$$X \,\Delta\, Y = XY^c \cup X^cY \\ = XY^cZ + XY^cZ^c + X^cYZ + \\ + X^cYZ^c$$

$$a_{\overline{xy}}^{[1]} = a(XY^cZ) + a(XY^cZ^c) + a(X^cYZ) + a(X^cYZ^c)$$

$$\therefore \quad a_{\overline{xy}}^{[1]} = a_x + a_y - 2a_{xy}$$

E. 5. $a_{x:\overline{yz}}^{[1]} = a[X(Y \,\Delta\, Z)]$

$$X(Y \,\Delta\, Z) = X(YZ^c \cup Y^cZ) \\ = XYZ^c + XY^cZ$$

$$a_{x:\overline{yz}}^{[1]} = a(XYZ^c) + a(XY^cZ)$$

$$\therefore \quad a_{x:\overline{yz}}^{[1]} = a_{xy} + a_{xz} - 2a_{xyz}$$

E. 6. $a_{x:\overline{yz}} = a[X(Y \cup Z)]$

$$X(Y \cup Z) = X(YZ \cup YZ^c \cup Y^cZ) \\ = XYZ + XYZ^c + XY^cZ$$

$$a_{x:\overline{yz}} = a(XYZ) + a(XYZ^c) + a(XY^cZ)$$

$$\therefore \quad a_{x:\overline{yz}} + a_{xy} + a_{xz} - a_{xyz}$$

E. 7. $a_{\overline{x\,:\,\widehat{yz}}} = a(X \cup YZ)$

$$X \cup YZ = XYZ + XYZ^c + XY^cZ + \\ + XY^cZ^c + X^cYZ$$

$$a_{\overline{x\,:\,\widehat{yz}}} = a(XYZ) + a(XYZ^c) + a(XY^cZ) + a(XY^cZ^c) + \\ + a(X^cYZ)$$

$$\therefore \quad a_{\overline{x\,:\,\widehat{yz}}} = a_x + a_{yz} - a_{xyz}$$

E. 8. $a_{\overline{x\,:\,(yz)_{[1]}}} = a[X \cup (Y \,\Delta\, Z)]$

$$\begin{aligned} X \cup (Y \,\Delta\, Z) &= X \cup YZ^c \cup Y^cZ \\ &= XYZ + XYZ^c + \\ &+ XY^cZ + XY^cZ^c + \\ &+ X^cYZ + X^cY^cZ \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{\overline{x\,:\,(yz)_{[1]}}} = a_x + a_y + a_z - a_{xy} - a_{xz} - 2a_{yz} + 2a_{xyz}$$

E. 9. $a_{\overline{x\,y\,z}} = a(X \cup Y \cup Z)$

$$X \cup Y \cup Z = XYZ + XYZ^c + XY^cZ + \\ + X^cYZ + XY^cZ^c + X^cYZ^c + \\ + X^cY^cZ$$

$$\therefore \quad a_{\overline{x\,y\,z}} = a_x + a_y + a_z - (a_{xy} + a_{yz} + a_{xz}) + a_{xyz}$$

E. 10. $a_{\overline{x\,:\,\overline{yz}}} = a[X \cup (Y \cup Z)]$

$$= a(X \cup Y \cup Z) \equiv \text{E. 9}$$

$$\therefore \quad a_{\overline{x\,:\,\overline{yz}}} = a_{\overline{x\,y\,z}}$$

E. 11. $a^{[1]}_{\overline{x\,:\,yz}} = a(X \,\Delta\, YZ)$

$$\begin{aligned} X \,\Delta\, YZ &= X(YZ)^c \cup X^cYZ \\ &= X(Y^c \cup Z^c) \cup X^cYZ \\ &= XY^cZ + XY^cZ^c + XYZ^c + \\ &+ X^cYZ \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a^{[1]}_{\overline{x\,:\,yz}} = a_x + a_{yz} - 2a_{xyz}$$

E. 12. $a^{[1]}_{\overline{x\,:\,(yz)_{[1]}}} = a[X \,\Delta\, (Y \,\Delta\, Z)]$

$$\begin{aligned} X \,\Delta\, (Y \,\Delta\, Z) &= X \,\Delta\, Y \,\Delta\, Z \\ &= XYZ + XY^cZ^c + \\ &+ X^cYZ^c + X^cY^cZ \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{\overset{[1]}{\overline{\mathrm{x}:(\mathrm{yz})_{[1]}}}} = a_{\mathrm{x}} + a_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}} - 2(a_{\mathrm{xy}} + a_{\mathrm{xz}} + a_{\mathrm{yz}}) + 4a_{\mathrm{xyz}}$$

E. 13. $a_{\overset{[1]}{\overline{\mathrm{x}:\overline{\mathrm{yz}}}}} = a[\mathrm{X}\ \Delta\ (\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z})]$

$$\begin{aligned} \mathrm{X}\ \Delta\ (\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}) &= \mathrm{X}(\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z})^c \cup \mathrm{X}^c(\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}) \\ &= \mathrm{XY^cZ^c} \cup \mathrm{X^cY} \cup \mathrm{X^cZ} \\ &= \mathrm{XY^cZ^c} + \mathrm{X^cYZ} + \mathrm{X^cYZ^c} + \\ &\quad + \mathrm{X^cY^cZ} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{\overset{[1]}{\overline{\mathrm{x}:\overline{\mathrm{yz}}}}} = a_{\mathrm{x}} + a_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}} - 2a_{\mathrm{xy}} - 2a_{\mathrm{xz}} - a_{\mathrm{yz}} + 2a_{\mathrm{xyz}}$$

E. 14. $a_{\overset{[1]}{\overline{\mathrm{xy}}}:\overset{[1]}{\overline{\mathrm{xz}}}} = a[(\mathrm{X}\ \Delta\ \mathrm{Y}) \cap (\mathrm{X}\ \Delta\ \mathrm{Z})]$

$$\begin{aligned} (\mathrm{X}\ \Delta\ \mathrm{Y})\ (\mathrm{X}\ \Delta\ \mathrm{Z}) &= (\mathrm{XY^c} \cup \mathrm{X^cY}) \\ &\quad\ (\mathrm{XZ^c} \cup \mathrm{X^cZ}) \\ &= \mathrm{XY^cZ^c} + \mathrm{X^cYZ} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{\overset{[1]}{\overline{\mathrm{xy}}}:\overset{[1]}{\overline{\mathrm{xz}}}} = a_{\mathrm{x}} - a_{\mathrm{xy}} - a_{\mathrm{xz}} + a_{\mathrm{yz}}$$

E. 15. $a_{\mathrm{x/yz}} = a[\mathrm{X^c(YZ)}]$

$$\mathrm{X^c(YZ)} = \mathrm{X^cYZ}$$

$$\therefore \quad a_{\mathrm{x/yz}} = a_{\mathrm{yz}} - a_{\mathrm{xyz}}$$

E. 16. $a_{\mathrm{yz/x}} = a[(\mathrm{YZ})^c\mathrm{X}]$

$$\begin{aligned} (\mathrm{YZ})^c\mathrm{X} &= (\mathrm{Y^c} \cup \mathrm{Z^c})\mathrm{X} \\ &= \mathrm{XY^c} \cup \mathrm{XZ^c} \\ &= \mathrm{XY^cZ} + \mathrm{XY^cZ^c} + \mathrm{XYZ^c} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{\mathrm{yz/x}} = a_{\mathrm{x}} - a_{\mathrm{xyz}}$$

E. 17. $a_{\mathrm{x}/\overline{\mathrm{yz}}} = a[\mathrm{X^c}(\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z})]$

$$\begin{aligned} \mathrm{X^c}(\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}) &= \mathrm{X^cY} \cup \mathrm{X^cZ} \\ &= \mathrm{X^cYZ} + \mathrm{X^cYZ^c} + \mathrm{X^cY^cZ} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{\mathrm{x}/\overline{\mathrm{yz}}} + a_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}} - a_{\mathrm{xy}} - a_{\mathrm{xz}} - a_{\mathrm{yz}} + a_{\mathrm{xyz}}$$

E. 18. $a_{\overline{\mathrm{yz}}/\mathrm{x}} = a[(\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z})^c\mathrm{X}]$

$$(\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z})^c\mathrm{X} = \mathrm{XY^cZ^c}$$

$$\therefore \quad a_{\overline{yz}/x} = a_x - a_{xy} - a_{xz} + a_{xyz}$$

E. 19. $a_{x/\overset{[1]}{\overline{yz}}} = a[X^c(Y \Delta Z)]$

$$X^c(Y \Delta Z) = X^c(YZ^c \cup Y^cZ)$$
$$= X^cYZ^c + X^cY^cZ$$

$$\therefore \quad a_{x/\overset{[1]}{\overline{yz}}} = a_y + a_z - a_{xy} - a_{xz} - 2a_{yz} + 2a_{xyz}$$

E. 20. $a_{\overset{[1]}{\overline{yz}}/x} = a[(Y \Delta Z)^cX]$

$$(Y \Delta Z)^cX = X(YZ \cup Y^cZ^c)$$
$$= XYZ + XY^cZ^c$$

$$\therefore \quad a_{\overset{[1]}{\overline{yz}}/x} = a_x - a_{xy} - a_{xz} + 2a_{xyz}$$

E. 21. $a_{\overline{yz}/\overline{xz}} = a[(Y \cup Z)^c(X \cup Z)]$

$$(Y \cup Z)^c(X \cup Z) = Y^cZ^c(X \cup Z)$$
$$= XY^cZ^c \equiv \text{E. } 18$$

$$\therefore \quad a_{\overline{yz}/\overline{xz}} = a_{\overline{yz}/x}$$

E. 22. $a_{\overline{xz:x/y}} = a[XZ \cup X^cY]$

$$XZ \cup X^cY = XYZ + XY^cZ + X^cYZ +$$
$$+ X^cYZ^c$$

$$\therefore \quad a_{\overline{xz:x/y}} = a_y + a_{xz} - a_{xy}$$

9.5. Aplicación de los "status" a la obtención de algunas rentas de A_3

Como aplicación de lo que se indicó en 8.2, vamos a deducir la expresión de algunas de las rentas obtenidas en los párrafos anteriores, considerando algunos grupos formando un "status" y aplicando a ellos las fórmulas E. 1, E. 2, E. 3 y E. 4 como si cada uno de estos grupos fuese una vida.

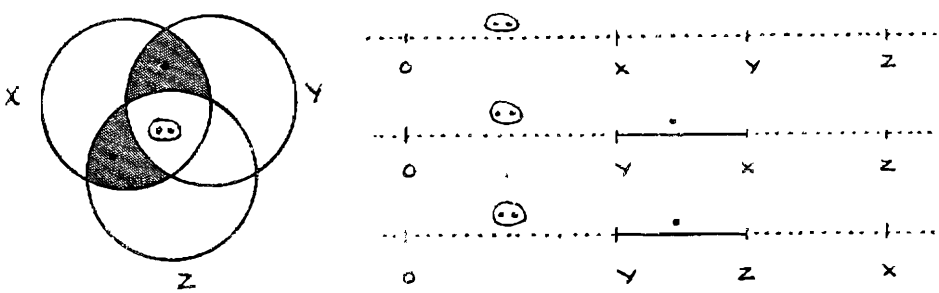
También utilizaremos los ejemplos que siguen para dar su representación mediante los diagramas de Venn y los esquemas lineales. En estas gráficas, la parte rayada del diagrama de Venn y la línea continua de los esquemas representan el subconjunto sobre el que se aplica la renta y para comprobar el resultado, se ha señalado con un punto los valores positivos de las rentas, de los que se han encerrado con un círculo pequeño para los valores negativos; con lo cual, los puntos libres de circulito representan el conjunto sobre el cual se aplica la renta dada.

E. 5. Renta pagadera mientras viva x y uno solo de los otros dos.

$$a_{x\,:\,\overline{yz}}^{[1]} = a[X(Y \;\Delta\; Z)]$$
$$= a[XY \;\Delta\; XZ] \;\ldots\; \text{Por E. 4.}$$

$$\therefore \quad a_{x\,:\,\overline{yz}}^{[1]} = a_{xy} + a_{xz} - 2a_{xyz}$$

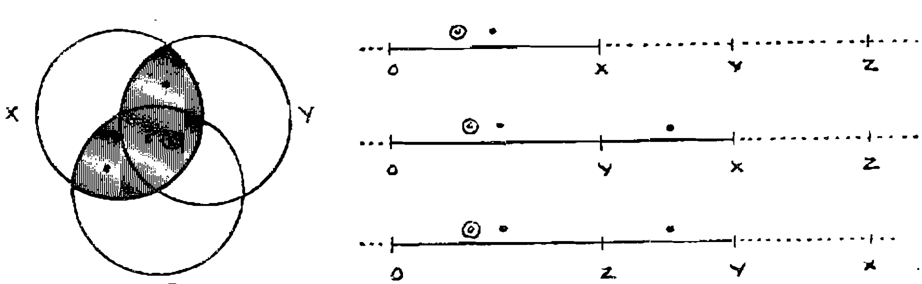
Esta renta equivale a la siguiente: $a_{\overline{xy\,:\,xz}}^{[1]} = a[XY \;\Delta\; XZ]$



E. 6. Renta pagadera mientras viva x "y" al menos uno (uno solo o bien los dos) de los otros dos.

$$a_{x\,:\,\overline{yz}} = a[X(Y \;\cup\; Z)]$$
$$= a(XY \;\cup\; XZ) \;\ldots\; \text{Por E. 2.}$$

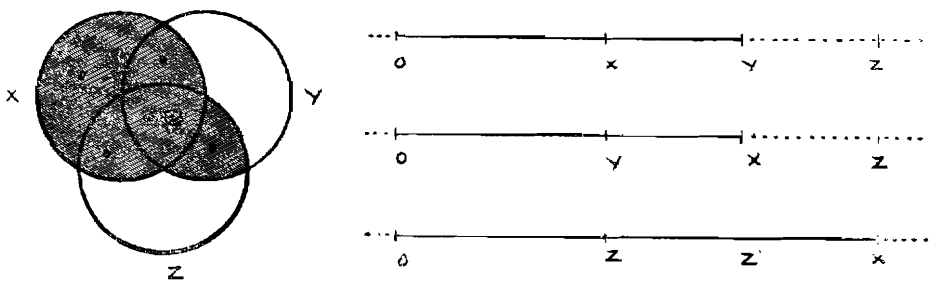
$$\therefore \quad a_{x\,:\,\overline{yz}} = a_{xy} + a_{xz} - a_{xyz}$$



E. 7. Renta pagadera mientras viva x "o" hasta la disolución del grupo formado por yz.

$$a_{\overline{x\,:\,\widehat{yz}}} = a(X \cup YZ \; \ldots \; \text{Por E. 2.}$$

$$\therefore \quad a_{\overline{x\,:\,\widehat{yz}}} = a_x + a_{yz} - a_{xyz}$$

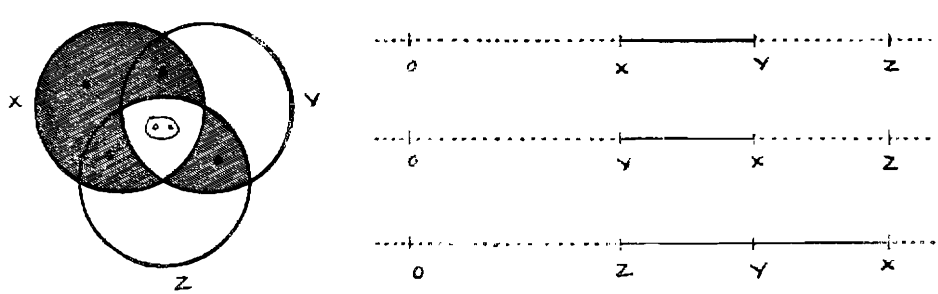


E. 11. Renta pagadera mientras vive x "o bien" z e y conjuntamente.

Esta renta es la complementaria de la pagable mientras viven las tres o una sola de z e y

$$a^{[1]}_{\overline{x\,:\,yz}} = a(X \;\Delta\; X^cZ) \; \ldots \; \text{Por E. 4.}$$

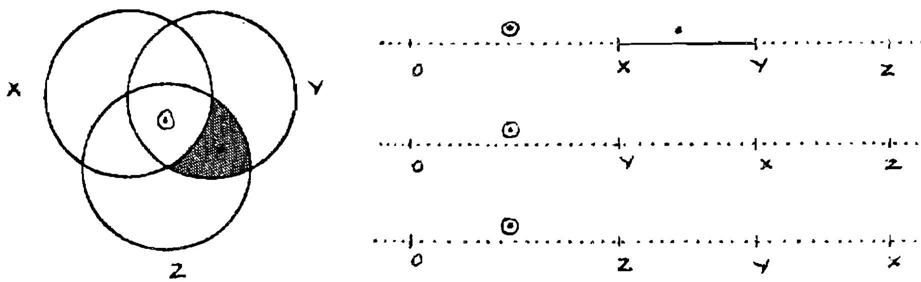
$$\therefore \quad a^{[1]}_{\overline{x\,:\,yz}} = a_x + a_{yz} - 2a_{xyz}$$



E. 15. Renta pagadera a partir de la muerte de x y mientras vivan conjuntamente z e y

$$a_{x/yz} = a[X^c(YZ)] \quad \ldots \text{ Por E. 3.}$$
$$= a(YZ) - a(XYZ)$$

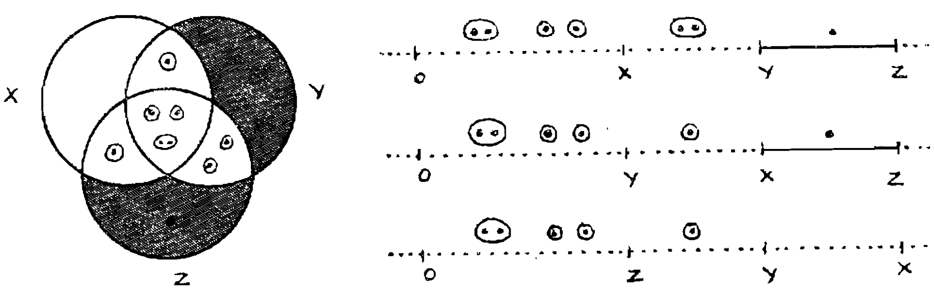
$$\therefore \quad a_{x/yz} = a_{yz} - a_{xyz}$$



E. 19. Renta pagadera a partir del fallecimiento de x y mientras vive solamente una de las otras dos.

$$a_{x/\overline{yz}}^{[1]} = a[X^c(Y \,\Delta\, Z)]$$
$$= a(X^cY \,\Delta\, X^cZ) \quad \ldots \text{ Por E. 4.}$$
$$= a(X^cY) + (X^cZ) - 2a(X^cYZ)$$

$$\therefore \quad a_{x/\overline{yz}}^{[1]} = a_y + a_z - a_{xy} - a_{xz} - 2a_{yz} - 2a_{xyz}$$



10. APLICACION AL ESTUDIO DEL ALGEBRA ACTUARIAL A_2

En los capítulos anteriores, se ha indicado el método para obtener las expresiones de las probabilidades y de las rentas sobre grupos de m personas. Como ejemplo de aplicación de esta sistemática, vamos a desarrollar ampliamente, aun exponiéndonos a ciertas repeticiones, el estudio del álgebra actuarial A_2.

Como se ha señalado ya, la única dificultad que se presenta para las álgebras de orden superior procede de que el número de funciones booleanas crece muy rápidamente al aumentar m. Así, para $m = 3$, el número de dichas funciones es $2^{2^3} = 256$ y para $m = 4$ es $2^{2^4} = 65536$.

El método que se seguirá consiste en dar sucesivamente:

a) El significado actuarial de los generadores, átomos, monomios y demás funciones booleanas.

b) La expresión de las funciones H_α en función de los átomos.

c) Las operaciones $\cap$, $\cup$, Δ, $/$, como sumas de átomos.

d) Probabilidades de los átomos en función de las de los monomios.

e) Probabilidades de los sucesos de A_2.

f) Probabilidades de las funciones H.

g) Estudio y representación de los sucesos de A_2^*

h) Rentas sobre un grupo de dos personas.

10.1. SIGNIFICADO ACTUARIAL DE LAS FUNCIONES BOOLEANAS DE A_2

10.11. *Los generadores de A_2.*—El significado actuarial de los generadores es:

X_1 = Suceso de que la persona (x_1) alcance la edad $x_1 + t$.
X_2 = El mismo suceso sobre x_2.
X_1^c = Que x_1 fallezca antes de alcanzar la edad $x_1 + t$.
X_2^c = El anterior referido a x_2.

10.12. *Atomos de A_2.*—El número de átomos es $2^2 = 4$ y su significado actuarial es:

$Q_0 = X_1^c \cap X_2^c$ = Que ambas personas hayan fallecido antes de transcurrir el tiempo t.
$Q_1 = X_1 \cap X_2^c$ = Que X_1 alcance la edad $x_1 + t$ y X_2 fallezca antes de cumplir la edad $x_2 + t$.
$Q_2 = X_1^c \cap X_2$ = Que X_2 viva a la edad $x_2 + t$ y X_1 haya fallecido antes de transcurrir el tiempo t.
$Q_{12} = X_1 \cap X_2$ = Que ambas vivan t años más.

10.13. *Monomios.*—Los monomios coinciden con expresiones ya definidas, siendo innecesario repetir su significado. El número de ellos es $2^2 = 4$ y la expresión de dichos monomios es:

$$R_1 = X_1 \quad ; \quad R_2 = X_2 \quad ; \quad R_{12} = Q_{12} = X_1X_2 \quad ; \quad R_0 = \Omega$$

10.14. *Las funciones booleanas de A_2.*—El significado actuarial de las restantes funciones booleanas se indicará al expresar el suceso sobre el cual daremos sus probabilidades en el apartado correspondiente, con lo cual se evitarán repeticiones.

10.15. *Expresión de las f.b. de A_2.*—La expresión de las $2^{2^2} = 16$ funciones booleanas de A_2, en función de los átomos, es:

$$F_1 = Q_{12} = X_1X_2$$
$$F_2 = Q_1 = X_1X_2^c$$
$$F_3 = Q_2 = X_1^cX_2$$
$$F_4 = Q_0 = X_1^cX_2^c$$
$$F_5 = Q_{12} + Q_1 = X_1X_2 + X^cX_2$$
$$F_6 = Q_{12} + Q_2 = X_1X_2 + X_1^cX_2$$
$$F_7 = Q_{12} + Q_0 = X_1X_2 + X_1^cX_2^c$$

$$
\begin{aligned}
F_8 &= Q_1 + Q_2 &&= X_1X_2^c + X_1^cX_2 \\
F_9 &= Q_1 + Q_0 &&= X_1X_2^c + X_1^cX_2^c \\
F_{10} &= Q_2 + Q_0 &&= X_1^cX_2 + X_1^cX_2^c \\
F_{11} &= Q_{12} + Q_1 + Q_2 &&= X_1X_2 + X_1X_2^c + X_1^cX_2 \\
F_{12} &= Q_{12} + Q_1 + Q_0 &&= X_1X_2 + X_1X_2^c + X_1^cX_2^c \\
F_{13} &= Q_{12} + Q_2 + Q_0 &&= X_1X_2 + X_1^cX_2 + X_1^cX_2^c \\
F_{14} &= Q_1 + Q_2 + Q_0 &&= X_1X_2^c + X_1^cX_2 + X_1^cX_2^c \\
F_{15} &= Q_{12} + Q_1 + Q_2 + Q_0 &&= X_1X_2 + X_1X_2^c + X_1^cX_2 + X_1^cX_2^c \\
F_{16} &= \phi
\end{aligned}
$$

10.16. Expresión de las funciones H_α en función de los átomos:

$$
\begin{aligned}
H_{[0]} &= Q_0 &&= F_4 \\
H_{[1]} &= Q_1 + Q_2 &&= F_8 \\
H_{[2]} &= Q_{12} &&= F_1 \\
H_{(0)} &= Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_{12} &&= F_{15} \\
H_{(1)} &= Q_1 + Q_2 + Q_{12} &&= F_{11} \\
H_{(2)} &= Q_{12} &&= F_1 \\
H_{\vec{(0)}} &= Q_0 &&= F_4 \\
H_{\vec{(1)}} &= Q_0 + Q_1 + Q_2 &&= F_{14} \\
H_{\vec{(2)}} &= Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_{12} &&= F_{15}
\end{aligned}
$$

10.17. *Las operaciones $\cap$, $\cup$, Δ y / en función de los átomos.*

$$
\begin{aligned}
X_1 &= X_1X_2 + X_1X_2^c &&= F_5 \\
X_1^c &= X_1^cX_2 + X_1^cX_2^c &&= F_{10} \\
X_2 &= X_1X_2 + X_1^cX_2 &&= F_6 \\
X_2^c &= X_1X_2^c + X_1^cX_2^c &&= F_9 \\
X_1X_2 &= X_1X_2 &&= F_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(X_1X_2)^c &= X_1X_2^c + X_1^cX_2 + X_1^cX_2^c &&= F_{14}\\
X_1 \cup X_2 &= X_1X_2 + X_1X_2^c + X_1^cX_2 &&= F_{11}\\
(X_1 \cup X_2)^c &= X_1^cX_2^c &&= F_4\\
X_1 \,\Delta\, X_2 &= X_1X_2^c + X_1^cX_2 &&= F_8\\
(X_1 \,\Delta\, X_2)^c &= X_1X_2 + X_1^cX_2^c &&= F_7\\
X_1/X_2 &= X_1^cX_2 &&= F_3\\
(X_1/X_2)^c &= X_1X_2 + X_1X_2^c + X_1^cX_2^c &&= F_{12}\\
X_2/X_1 &= X_1X_2^c &&= F_2\\
(X_2/X_1)^c &= X_1X_2 + X_1^cX_2 + X_1^cX_2^c &&= F_{13}\\
\Omega &= X_1X_2 + X_1X_2^c + X_1^cX_2 + X_1^cX_2^c &&= F_{15}\\
\Omega^c &= \phi &&= F_{16}
\end{aligned}
$$

10.2. Probabilidades de los átomos en función de las probabilidades de los monomios

De 8.3 se deducen las siguientes fórmulas para las probabilidades de los átomos:

$$
\begin{aligned}
P(Q_{12}) &= P(X_1X_2) = {}_tp_{x_1x_2}\\
P(Q_1) &= P(X_1X_2^c) = P(X_1) - P(X_1X_2) = {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_1x_2}\\
P(Q_2) &= P(X_1^cX_2) = P(X^2) - P(X_1X_2) = {}_tp_{x_2} - {}_tp_{x_1x_2}\\
P(Q_0) &= P(X_1^cX_2^c) = P(\Omega) - P(X_1) - P(X_2) + P(X_1X_2) =\\
&= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_1x_2} = {}_tq_{\overline{x_1x_2}}
\end{aligned}
$$

10.3. Probabilidades de los sucesos definidos por las funciones booleanas de A_2

A continuación daremos la expresión de dichas probabilidades: pero antes haremos unas aclaraciones de tipo general:

a) Cuando el suceso sea uno de los monomios, se dará directamente su probabilidad, pues no es necesario deducirla de los átomos.

b) En primer término se indicará la notación actuarial.

c) Se han ordenado de forma que las de lugar par son las probabilidades del suceso "contrario" al definido en el impar inmediatamente anterior. Por tanto, la probabilidad de aquéllas será el complemento a uno de sus anteriores; no obstante, se obtienen también directamente de los átomos.

Insistimos que también aquí se pueden simplificar y suprimir algunos de los detalles que se ponen; sin embargo, se han indicado con el fin de dar las diversas formas de enunciar el mismo suceso y sus relaciones con las funciones F_i y con los átomos.

Probabilidad de que al final del tiempo t:

1. Viva X_1: $F_5 = X_1$

$$ {}_tp_{x_1} = P(X_1) $$

2. Haya fallecido X_1: $F_{10} = X_1^c$

$$ \begin{aligned} {}_tq_{x_1} &= P(X_1^c) = P(X_1^c X_2 + X_1^c X_2^c) \\ &= P(Q_2) + P(Q_0) \\ {}_tq_{x_1} &= 1 - {}_tp_{x_1} \end{aligned} $$

3. Viva X_2: $F_6 = X_2$

$$ {}_tp_{x_2} = P(X_2) $$

4. Haya fallecido X_2: $F_9 = X_2^c$

Análogamente a la 2:

$$ {}_tq_{x_2} = 1 - {}_tp_{x_2} $$

5. Vivan las dos: $F_1 = X_1X_2$

Este suceso equivale a que vivan por lo menos dos.

$$ {}_tp_{x_1x_2} = {}_tp^{[2]}_{\overline{x_1x_2}} = {}_tp^{2}_{\overline{x_1x_2}} $$

6. Al menos haya fallecido una: $X_1^c \cup X_2^c$, o sea, que a lo sumo viva una: F_{14}

$$ {}_tq_{x_1x_2} = {}_tp^{\to 1}_{\overline{x_1x_2}} = P(X_1^c \cup X_2^c) = P(Q_1) + P(Q_2) + P(Q_0) $$

$${}_tq_{x_1x_2} = 1 - {}_tp_{x_1x_2}$$

7. Viva al menos una: $F_{11} = X_1 \cup X_2$

$${}_tp_{\overline{x_1x_2}} = {}_tp^{\;1}_{\overline{x_1x_2}} = P(X_1 \cup X_2) = P(Q_{12}) + P(Q_1) + P(Q_2)$$
$$= {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_1x_2}$$

8. Hayan fallecido las dos: $F_4 = X_1^cX_2^c$

$${}_tq_{\overline{x_1x_2}} = {}_tp^{[0]}_{\overline{x_1x_2}} = {}_tp^{\to 0}_{\overline{x_1x_2}} = P(X_1^cX_2^c) = P(Q_0)$$
$$= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_1x_2}$$

9. Viva eactamente una: $F_8 = X_1 \,\Delta\, X_2$

$${}_tp^{[1]}_{\overline{x_1x_2}} = P(X_1 \,\Delta\, X_2) = P(Q_1) + P(Q_2)$$
$$= {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} - 2{}_tp_{x_1x_2}$$

10. Vivan las dos "o bien" hayan fallecido ambas: F_7

$$F_7 = X_1X_2 + X_1^cX_2^c$$

$$1 - {}_tp^{[1]}_{\overline{x_1x_2}} = P(X_1X_2) + P(X_1^cX_2^c) = P(Q_{12}) + P(Q_0)$$
$$= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_2} + 2{}_tp_{x_1x_2}$$

11. Viva X_1 y haya fallecido X_2: $F_2 = X_1X_2^c$

$${}_tp_{x_1} \cdot {}_{/t}q_{x_2} = {}_tp_{x_2/x_1} = P(X_1X_2^c) = P(Q_1)$$
$$= {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_1x_2} = {}_{/t}q_{x_1x_2} - {}_{/t}q_x$$

12. Viva X_2 "o" haya fallecido X_1: $F_{13} = X_1^c \cup X_2$

$$1 - {}_tp_{x_2/x_1} = P(X_1^c \cup X_2) = P(Q_{12}) + P(Q_2) + P(Q_0)$$
$$= 1 - {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_1x_2}$$

13. Viva X_2 y haya fallecido X_1: $F_3 = X_1^cX_2$

Análogamente a la 11, cambiando los subíndices:

$${}_tp_{x_2} \cdot {}_tq_{x_1} = {}_tp_{x_1/x_2} = {}_tp_{x_2} - {}_tp_{x_1x_2}$$

14. Viva X_1 "o" haya fallecido X_2: $F_{12} = X_1 \cup X_2^c$

Cambiando los subíndices de 12:

$$1 - {}_tp_{x_1/x_2} = 1 - {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_1x_2}$$

15. Vivan a lo sumo dos, o por lo menos 0, o sea, el suceso cierto:

$F_{15} = \Omega$

$$P(\Omega) = {}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{(0)} = {}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{\to 2} = 1$$

16. Cualquier caso que dé el suceso vacío: $F_{16} = \phi$

$$P(\phi) = 0$$

10.4. Probabilidades de las funciones H_α

Las probabilidades de las funciones H_α deducidas de las fórmulas 7.4 a 7.7, son:

$$\begin{aligned}{}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{[0]} &= P\ H_{[0]} = P\Omega - S(2, 1) + S(2, 2) = \\ &= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_1x_2}\end{aligned}$$

$${}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{[1]} = P\ H_{[1]} = S(2, 1) - 2S(2, 2) = {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} - 2{}_tp_{x_1x}$$

$${}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{[2]} = P\ H_{[2]} = S(2, 2) = {}_tp_{x_1x_2}$$

$${}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{0} = P\ H_0 = S(2, 0) = 1$$

$${}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{1} = P\ H_1 = S(2, 1) - S(2, 2) = {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} - 2{}_tp_{x_1x_2}$$

$${}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{2} = P\ H_2 = S(2, 2) = {}_tp_{x_1x_2}$$

$${}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{\to 0} = P\ H_{\overrightarrow{(0)}} = P\ H_{[0]}$$

$${}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{\to 1} = P\ H_{\overrightarrow{(1)}} = S(2, 0) - S(2, 2) = 1 - {}_tp_{x_1x_2}$$

$${}_tp_{\overline{x_1x_2}}^{\to 2} = P\ H_{\overrightarrow{(2)}} = P(\Omega) = 1$$

10.5. Estudio del álgebra "reducida" A_2^*

De acuerdo con la definición y propiedades dadas en 6.4, se tiene para A_2^*:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{2} X_i = X_1 \cup X_2 \quad " \quad \Rightarrow Q_0 = \phi$$

Las relaciones entre las funciones F_i y sus expresiones como suma de átomos, su forma simplificada y, en su caso, la función H_j que las representan, son:

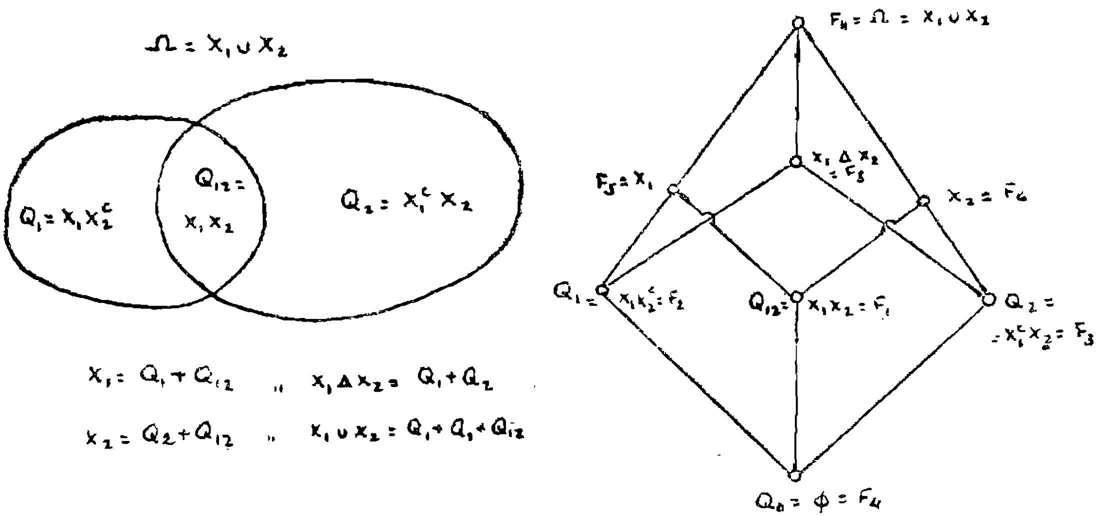
$$\begin{array}{llllll}
F_1 & = F_7 & = Q_{12} & = X_1X_2 & & = H_{[2]} \\
F_2 & = F_9 & = Q_1 & = X_1X_2^c & & \\
F_3 & = F_{10} & = Q_2 & = X_1^cX_2 & & \\
F_4 & = F_{16} & = Q_0 & = \phi & & = H_{[0]} \\
F_5 & = F_{12} & = Q_{12} + Q_1 & = X_1X_2 + X_1X_2^c & & = X_1 \\
F_6 & = F_{13} & = Q_{12} + Q_2 & = X_1X_2 + X_1^cX_2 & & = X_2 \\
F_8 & = F_{14} & = Q_1 + Q_2 & = X_1X_2^c + X_1^cX_2 & & = H_{[1]} \\
F_{11} & = F_{15} & = Q_{12} + Q_1 + Q_2 & = X_1X_2 + X_1X_2^c + X_1^cX_2 & & = H_{(1)}
\end{array}$$

Entre las expresiones anteriores, existen las siguientes relaciones:

$$F_2 + F_3 = F_8 \quad " \quad F_1 + F_2 = F_{15}$$

$$F_1 + F_3 = F_6 \quad " \quad F_1 + F_8 = F_{11}$$

REPRESENTACION DEL ALGEBRA A_2^*



10.6. Rentas unitarias sobre un grupo de dos personas

Según se acaba de ver, en el álgebra A_2^* el número de sucesos distintos es ocho, siendo, por tanto, igual número, el total de rentas que se pueden definir sobre un grupo de dos personas, exceptuando las de supervivencia compuesta.

Aunque en el caso de un grupo de dos personas, la obtención de las fórmulas es muy simple, se seguirá el método general aplicable a un grupo de m personas. En primer lugar se dará la expresión de las rentas pagaderas al primer fallecimiento (monomios), luego, la de los átomos en función de las anteriores y, finalmente, las restantes deducidas de las correspondientes a los átomos.

1. Renta pagadera mientras viva $X_1 = a_{x_1}$.
2. Renta pagadera mientras viva $X_2 = a_{x_2}$.

3. Renta pagadera mientras vivan X_1 y $X_2 = a_{x_1x_2}$.

$$a_{x_1x_2} = a(X_1X_2) = a(Q_{12})$$

4. Renta pagadera a X_1 a partir de la muerte de $X_2 = a_{x_2/x_1}$.

$$\begin{aligned} a_{x_2/x_1} &= a(X_1X_2^c) = a(Q_1) = a(X_1) - a(X_1X_2) \\ &= a_{x_1} - a_{x_1x_2} \end{aligned}$$

5. Renta pagadera a X_2 a partir de la muerte de $X_1 = a_{x_1/x_2}$. Análoga a la anterior, cambiando los subíndices:

$$a_{x_1/x_2} = a_{x_2} - a_{x_1x_2}$$

6. Renta pagadera mientras viva al menos una $= a_{\overline{x_1x_2}}$

$$\begin{aligned} a_{\overline{x_1x_2}} &= a(X_1 \cup X_2) = a(Q_{12}) + a(Q_1) + a(Q_2) \\ &= a_{x_1} + a_{x_2} - a_{x_1x_2} \end{aligned}$$

7. Renta pagadera mientras viva exactamente una de ellas $= a_{\overline{x_1x_2}}^{[1]}$

$$\begin{aligned} a_{\overline{x_1x_2}}^{[1]} &= a(X_1 \,\Delta\, X_2) = a(Q_1) + a(Q_2) \\ &= a_{x_1} + a_{x_2} - a_{x_1x_2} \end{aligned}$$

8. Renta pagadera después de la muerte de ambas: $a_{\overline{x_1x_2}}^{[0]}$

$$a_{\overline{x_1x_2}}^{[0]} = a(Q_0) = a(\phi) = 0$$

También se podrían haber reducido, de las fórmulas dadas en 8.4, las rentas de los sucesos de la forma H_α.

11. NOTA SOBRE LOS SEGUROS APLICADOS A UN GRUPO DE *m* VIDAS

En el párrafo 6.12, se indicó que los seguros pueden ser expresados en función de las rentas y también, que podría obtenerse la expresión de los seguros de los diferentes sucesos de un retículo distributivo, en función de los seguros al primer fallecimiento.

Sobre esta cuestión, sólo vamos a dar las definiciones de los tipos de seguros más sencillos; estudiando después, someramente, el caso de un grupo formado por tres personas.

11.1. Retículo actuarial: R_m

En el espacio muestral $\Omega(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ dado en 6.2, se pueden definir la relación $\subset$ y las operaciones $\cap$ y $\cup$ como sigue:

1) El suceso de que X_j no fallezca antes que X_i se indicará por:

$$X_i \subset X_j$$

2) Dadas dos vidas de Ω, X_i y X_j, el suceso representativo del primer fallecimiento será: $X_i \cap X_j$.

3) El suceso que representa el último fallecimiento será:

$$X_i \cup X_j$$

Es inmediato que el sistema R_m engendrado por $X_1, X_2, \ldots, X_m$, satisface a los axiomas A_1 al A_6 del capítulo II, y, por tanto, es un retículo distributivo.

11.2. Seguros sobre R_m

A los elementos del retículo R_m se les puede aplicar una valoración A, que representa el valor de un seguro unitario sobre dichos elementos.

Utilizando la notación actuarial, se pueden definir los siguientes tipos de seguros:

Seguro unitario pagadero al fallecimiento de X_i:

$$A_{x_i} = A(X_i)$$

Seguro unitario pagadero al primer fallecimiento de un grupo de m vidas:

$$A_{x_1, x_2, \ldots, x_m} = A\left(\bigcap_{i=1}^{r} X_i\right)$$

Seguro unitario pagadero al $m - r + 1$ fallecimiento de un grupo de vidas de Ω.

$$A_{\overline{x_1, x_2, \ldots, x_m}}^{\;r} = A\left(\bigcup_{I \in I_m^r} \bigcap_{i \in I} X_i\right)$$

Seguro pagadero al último fallecimiento:

$$A_{x_1, x_2, \ldots, x_m} = A\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right)$$

11.3. Aplicación a los seguros sobre un grupo de tres personas

11.31. *Retículo actuarial de tres generadores.*—El retículo distributivo R_3 engendrado por los tres generadores X_1, X_2, X_3 consta de los 18 elementos siguientes:

$\rho_1 = X_1$	$\rho_7 = X_1 \cup X_2$	$\rho_{13} = X_1(X_2 \cup X_3)$
$\rho_2 = X_2$	$\rho_8 = X_1 \cup X_3$	$\rho_{14} = X_2(X_1 \cup X_3)$
$\rho_3 = X_3$	$\rho_9 = X_2 \cup X_3$	$\rho_{15} = X_3(X_1 \cup X_2)$
$\rho_4 = X_1X_2$	$\rho_{10} = X_1 \cup X_1X_3$	$\rho_{16} = X_1X_2 \cup X_1X_3 \cup X_2X_3$
$\rho_5 = X_1X_3$	$\rho_{11} = X_2 \cup X_1X_3$	$\rho_{17} = X_1X_2X_3$
$\rho_6 = X_2X_3$	$\rho_{12} = X_3 \cup X_1X_2$	$\rho_{18} = X_1 \cup X_2 \cup X_3$

11.32. *Expresión de los seguros unitarios.*—Los diferentes tipos de seguros en el caso de un grupo formado por las tres personas X_1, X_2 y X_3 son:

a) Seguro pagadero al fallecimiento de una persona determinada (3 casos)

$$A_{x_i} = A(X_i) \qquad '' \qquad i = 1, 2, 3 \Leftrightarrow i \in I_3^1$$

b) Seguro pagadero al primer fallecimiento de dos de ellas (3 casos)

$$A_{x_i x_j} = A(X_i X_j) \quad \text{"} \quad (i, j) \in I_3^2$$

c) Seguro pagadero al primer fallecimiento (1 caso)

$$A_{x_1 x_2 x_3} = A(X_1 X_2 X_3)$$

d) Seguro pagadero al segundo fallecimiento de dos de ellas (3 casos)

$$A_{\overline{x_i x_j}} = A(X_i \cup X_j) = A_{x_i} + A_{x_j} - A_{x_i x_j} \quad \text{"} \quad (i, j) \in I_3^2$$

e) Seguro pagadero al fallecimiento de una determinada "o" al primer fallecimiento de los dos restantes (3 casos)

$$A_{\overline{x_1 : x_2 x_3}} = A(X_1 \cup X_2 X_3) = A_{x_1} + A_{x_2 x_3} - A_{x_1 x_2 x_3}$$

f Seguro pagadero al fallecimiento de X_1 si éste ocurre antes de la extinción del grupo formado por las otras dos y, en caso contrario, a la extinción de este grupo (3 casos)

$$A_{x_1 : \overline{x_2 x_3}} = A\left[X_1(X_2 \cup X_3)\right] = A(X_1 X_2 \cup X_1 X_3)$$
$$= A_{x_1 x_2} + A_{x_1 x_3} - A_{x_1 x_2 x_3}$$

También se podría haber enunciado este seguro así: Seguro pagadero a X_1 si fallece la primera y. en caso contrario, al segundo fallecimiento.

g) Seguro pagadero al segundo fallecimiento de las tres personas (1 caso)

$$A_{\overline{x_1 x_2 x_3}}^{\;2} = A(X_1 X_2 \cup X_1 X_3 \cup X_2 X_3)$$
$$= A_{x_1 x_2} + A_{x_1 x_3} + A_{x_2 x_3} - 2A_{x_1 x_2 x_3}$$

h) Seguro pagadero al tercer fallecimiento (1 caso)

$$A_{\overline{x_1 x_2 x_3}} = A(X_1 \cup X_2 \cup X_3)$$
$$= A_{x_1} + A_{x_2} + A_{x_3} - (A_{x_1 x_2} + A_{x_1 x_3} + A_{x_2 x_3}) +$$
$$+ A_{x_1 x_2 x_3}$$

Como puede observarse, el número de casos de seguros considerados son los 18 correspondientes a los elementos del retículo actuarial.

12. BIBLIOGRAFIA

12.1. Teoría de la medida y Álgebra de Boole

1. Birkhoff, G.: *Lattice Theory*, American Mathematical Society, New York, 1948.
2. Birkhoff y Mac Lane: *Algebra Moderna*, versión de la 12.ª ed. inglesa por R. Rodríguez Vidal, Ed. Teide, Barcelona, 1954.
3. Bourbaki, N.: *Théorie des ensembles*, L. 1, Chap. 4, Actualités Scientifiques et Industrielles, n.º 1258.
4. Carvallo, M.: *Monographie des treillis et algèbre de Boole*, Gauthier Villars et Cie., París, 1962.
5. Dubreil, P.; Dubreil-Jacotin, M. L.: *Leçons d'Algèbre Moderne*, Dunod, París, 1961.
6. Eldon Whitesitt, J.: *Boolean Algebra and its aplications Addison Wesley*, Massachusetts, U.S.A., 1961.
7. Halmos, P. R.: *Measure theory*, Van Nostrand, 4.ª ed., New York, 1956.
8. Pi Calleja: *Sobre la teoría de la medida*, Actas de la primera R.A.M.E. Publicaciones de la Sección Matemática de la Universidad de Madrid, 1961.
9. Rutherford, D. E.: *Introduction to Lattice Theory*, Oliver and Boyd, London, 1965.
10. Ville, J. A.: *Elements d'algèbre de Boole*, Publications de l'Institut de Statistiques, París, 1955.

12.2. Cálculo de probabilidades y estadística matemática

11. Craamer, H.: *Mathematical methods of Statistics Princeton University Press*, 9.ª ed., 1961.
12. Feller, W.: *An introduction to probability*, J. Wiley, 2.ª ed. 1957.

13. FRECHET, M.: *Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants,* Actualités Scientifiques et Industrielles, n.° 859, París, 1940.

14. GUMBEL, E. J.: *Gli eventi compatibili,* Giornale Istituto Italiano degli Attuari, Anno IX, 1938.

15. JORDAN, Ch.: *Problèmes de la Probabilité des épreuves répétées dans le cas général,* Bull. Soc. Mat. France, 1939 t. 67.

16. LOEVE, M.: *Probability theory,* Van Nostrand, 3.ª ed., 1963.

17. NEVEU, J.: *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités,* Masson et Cie., París, 1964.

18. TORTRAT, A.: *Calcul des Probabilités,* Masson et Cie., París, 1963.

19. YULE-KENDALL: *Introducción a la Estadística,* Trad. por J. Ros Jimeno de la 14.ª ed. inglesa, Aguilar, S. A., Madrid, 1954.

12.3. MATEMÁTICA DEL SEGURO

20. DUBOURDIEU, J.: *Les principes fondamentaux du Calcul des Probabilités et la Théorie de l'Assurance-Maladie,* Monographies des Probabilités par E. Borel, Gauthiers-Villars, París, 1939.

21. GALBRUN, H.: *Assurances sur la Vie,* Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications, par E. Borel, t. III, Gauthiers-Villars, París, 1924.

22. GONZÁLEZ GALE, J.: *Elementos de Cálculo Actuarial,* El Ateneo, 2.ª ed., Buenos Aires, 1945.

23. HOOKER, P. F. and LONGLEY-COOK, L. H.: *Life and other contingencies,* Pub. Institut of Actuaries and the Fa culty of Actuaries University Press, Cambridge, 1957.

24. INSOLERA, F.: *Trattato de Scienza Attuariale,* Torino, 1949-1950.

25. KING, G.: *Life Contingencies,* Text-book of the Institute of Actuaries, II, London, 1902.

26. LASHERAS SANZ, A.: *Matemática del Seguro,* Dossat, S. A., Madrid, 1948.

27. RICHARD, P. J.: *Théorie et Prat. des Opérations d'assurance,* G. Doin et Cie., París, 1944.
28. SAXER, W.: *Versicherungs-mathematik,* Springer-Verlag, Berlín, 1955.
29. SIBIRANI, F.: *Matematica Generales e Finanziaria, V. III,* Cedam, Padova, 1944.
30. SPURGEON, E. F.: *Life Contingencies,* University Press, Cambridge, 1945.
31. STEFFENSEN: *On Stieltjes integral and its applications to actuarial questions,* J. I. A., núm. 307, 1932.
32. URECH, A.: *Considérations sur la probabilité.*

$$ {}_{n}p^{[r]}_{\overline{x,\, y,\, z,\, \ldots,\, w(m)}} $$

que, de m *têtes*: x, y, z, ..., w: r *exactement soient en vie après* n *années,* Bull. de l'Assoc. des Actuaries suisses, Bern, 1962.
33. ZWINGGI, E.: *Versicherungsmathematik,* Verlag Birkchäuser-Basel, 1945.

INDICE

I

Introducción

II

Antecedentes

III

ALGEBRA BOOLEANA DE *m* GENERADORES

IV

MEDIDA DE LAS FUNCIONES BOOLEANAS

4.3. Medida de $\bigcup_{i=1}^{m} X_i$.

4.4. Medida de los átomos en función de las medidas de los monomios.

4.41. Casos particulares: $r = o$ y $r = m$.

4.5. Medida de $H_{[m, r]}$.

4.51. Casos particulares.

4.6. Medida de $H_{(m, r)}$.

4.61. Casos particulares.

4.7. Medida de $H_{\overrightarrow{(m, r)}}$.

4.71. Casos particulares.

4.8. Relaciones entre las medidas de las H_α para $r = 0$, $r = 1$ y $r = m$.

V

APLICACIÓN AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

5.1. Probabilidades de las funciones H_α.

5.11. Probabilidad de que de *m* sucesos dados se verifique al menos uno: $P\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right)$.

5.12. Idem exactamente r: $P_{[r]}$

5.13. Idem al menos r: $P_{(r)}$.

5.2. Caso en que los sucesos son independientes.

5.21. Esquema de Poisson.

5.22. Esquema de Bernoulli.

VI

TEORÍA ACTUARIAL DE LOS GRUPOS DE *m* VIDAS

6.1. Estructura booleana de los sucesos asegurables.

6.11. Las operaciones actuariales como medidas de los elementos de un álgebra.

6.12. Restricción del estudio a los grupos de *m* vidas.

VII

Probabilidades sobre grupos de vidas

VIII

Rentas sobre un grupo de *m* vidas

IX

Aplicación a las rentas sobre un grupo de tres vidas

X

Aplicación al estudio del álgebra actuarial A_2

XI

Nota sobre los seguros aplicados a un grupo de m vidas

XII

Bibliografía