Obtención de fórmulas más generales en la teoría matemática de la variación

Por el Dr. Ubaldo NIETO DE ALBA

Catedrático.

Jefe de la Sección de Estudios Económicos y Actuariales de la Dirección General de Seguros (Ministerio de Hacienda).

I

INTRODUCCION

El presente trabajo contiene una generalización de las fórmulas y teoremas de variación. Se ha partido de un seguro general en donde las probabilidades que intervienen en la capitalización actuarial no coinciden, en general, con las que intervienen en el pago de capitales. Ello permite que sean de aplicación a operaciones de seguro también más generales.

La exposición se hace en estructura matemática unificada a base de funciones de seguro e integrales de Stieltjes-Schärf.

En las demostraciones y conclusiones se hace resaltar el significado actuarial de las fórmulas.

Al final se hacen algunas aplicaciones en donde se pone de manifiesto la generalidad del método.

II

NOTACIONES Y DEFINICIONES

En la exposición que sigue serán utilizadas las siguientes notaciones y definiciones.

a) Bases Técnicas

Las de primer orden las denotaremos por *B* y las de segundo orden por *B*^{0}. También distinguiremos las correspondientes al caso continuo y al caso discreto.

	B	*B*^{0}
Tasa de interés	$\delta(t)$, i	$\delta^0(t)$, i^0
Tasas y probabilidades asociadas a la capit. actuarial .... (r = 1, 2, ..., k)	$\nu^{(r)}_{x+t}$, $b^{(r)}_{x+t}$	$\nu^{0(r)}_{x+t}$, $b^{0(r)}_{x+t}$

Valor actual actuarial de una peseta en (0, t):

$$E(t) = \begin{cases} v^t tpx \\ e^{-\int_0^t \rho(x,\ \tau)d\tau} \end{cases} \qquad E^0(t) = \begin{cases} v^{0t} tp^0\ {}_{x+t} \\ e^{-\int_0^t \rho^0(x,\ \tau)d\tau} \end{cases}$$

siendo:

$$p_{x+t} = 1 - \sum_{r=1}^{k} b^{(r)}_{x+t} \qquad p^0_{x+t} = 1 - \sum_{r=1}^{k} b^{0(r)}_{x+t}$$

$$\rho(x,\ t) = \delta(t) + \sum_{r=1}^{k} \nu^{(r)}_{x+t} \qquad \rho^0(x,\ t) = \delta^0(t) + \sum_{r=1}^{k} \nu^{0(r)}_{x+t}$$

	B	B^0
Tasas y probabilidades asociadas al pago de capitales .... (r = 1, 2, ..., m)	$\mu^{(r)}_{x+t}$, $a^{(r)}_{x+t}$	$\mu^{0(r)}_{x+t}$, $a^{0(r)}_{x+t}$
Capitales asegurados	$S^{(r)}_{x+t}$	$S^{0(r)}_{x+t}$
Prima natural en (0, t)	$P^{(n)}_{(t)}$	$P^{0(n)}_{(t)}$
Prima pura media en (0, t)	$P(t)$	$P^0(t)$
Reservas matemáticas en (0, s) ...	$V(x, s)$	$V^0(x, s)$

Con arreglo a lo que precede y teniendo en cuenta la fórmula retrospectiva en estructura unitaria será:

$$V(x, s) = \frac{1}{E(s)} \left[V(x, 0) + \int_0^{(-)s} E(t) d \left[P(t) - P^{(n)}_{(t)} \right] \right]$$

$$V^0(x, s) = \frac{1}{E^0(s)} \left[V^0(x, 0) + \int_0^{(-)s} E^0(t) d \left[P^0(t) - P^{0(n)}_{(t)} \right] \right]$$

b) Funciones de variación y de beneficio

La fórmula que nos da la variación al pasar de las bases B a las bases B^0 la llamaremos *fórmula primal,* y la que nos da la correspondiente variación al pasar de B^0 a B la llamaremos *fórmula dual.*

Utilizaremos las siguientes notaciones:

Funciones de variación:	*Primal*	*Dual*
Variación de primas	$\Delta P = P^0 - P$	$\Delta P^0 = P - P^0$
Variación de prestaciones	$\Delta S = S^0 - S$	$\Delta S^0 = S - S^0$
Variación de reservas	$\Delta V = V^0 - V$	$\Delta V^0 = V - V^0$
Variación de la fuerza actuarial	$\Delta\rho = \rho^0 - \rho$	$\Delta\rho^0 = \rho - \rho^0$
Variación del factor de descuento actuarial	$\Delta(vp_{x+t}) = v^0p^0_{x+t} - vp_{x+t}$	$\Delta v^0p^0_{x+t} = vp_{x+t} - v^0p^0_{x+t}$
Variación del factor de descuento financiero	$\Delta V = V^0 - V$	$\Delta V^0 = V - V^0$

Funciones de beneficio:		
Beneficio en un período (t, t + dt) o bien [t, t + 1)	$d\,\Gamma(t) = \begin{cases} \Gamma'(t)dt \\ \gamma(t) \end{cases}$	$d\,\Gamma^0(t) = \begin{cases} \Gamma^{0\prime}(t)dt \\ \gamma^0(t) \end{cases}$
Beneficio en [0, s)	$H(s) = \int_0^{(-)s} E^0(t)d\,\Gamma(t)$	$H^0(s) = \int_0^{(-)s} E(t)d\,\Gamma^0(t)$
Beneficio en [k, s)	$H(s) - H(k) = \int_k^{(-)s} E^0(t)d\,\Gamma(t)$	$H^0(s) - H^0(k) = \int_k^{(-)s} E(t)d\,\Gamma^0(t)$

III

OBTENCION DE FORMULAS

El propósito es obtener fórmulas en que aparezcan relacionadas las variaciones anteriormente señaladas junto con la correspondiente función de beneficio.

En lo que sigue demostraremos la siguiente fórmula general para $k < s$:

Primal

$$E^0(s)\ \Delta V(x, s) = E^0(k)\ \Delta V(x, k) + \int_k^{(-)s} E^0(t) d \left[\Delta P(t) + \Gamma(t) \right]$$

siendo:

$$d\,\Gamma(t) = \frac{d\,(EV)}{E} - \frac{d\,(E^0V)}{E^0} - d\,(\Delta P^{(n)}_{(t)})$$

Dual

$$E(s)\ \Delta V^0(x, s) = E(k)\ \Delta V^0(x, k) + \int_k^{(-)s} E(t) d \left[\Delta P^0(t) + \Gamma^0(t) \right]$$

siendo:

$$d\,\Gamma^0(t) = \frac{d\,(E^0V^0)}{E^0} - \frac{d\,(EV^0)}{E} - d\,(\Delta P^{0(n)}_{(t)})$$

Demostraremos la primera puesto que la *dual* se obtiene por un simple cambio de notaciones.

Teniendo en cuenta la fórmula retrospectiva de la reserva y la definición del beneficio en $[0, s)$, será:

$$H(s) = V(x, 0) + \int_0^{(-)s} E^0(t) d \left[P(t) - P^{0(n)}_{(t)} \right] - E^0(s)\ V(x, s)$$

sustituyendo en esta fórmula:

$$V = V^0 - \Delta V \qquad y \qquad P = P^0 - \Delta P$$

se tiene:

$$H(s) = (V^0 - \Delta V) + \int_0^{(-)s} E^0(t)d\left[P^0(t) - P^{0(n)}_{(t)}\right] -$$

$$-\int_0^{(-)s} E^0(t)d\left(\Delta P(t)\right) - E^0(s)\ V(x,\ s)$$

Teniendo en cuenta la definición de reservas con bases B^0, es decir:

$$E^0(s)\ V^0(x,\ s) = V^0(x,\ 0) + \int_0^{(-)s} E^0(t)d\left[P^0(t) - P^{0(n)}_{(t)}\right]$$

se tiene:

$$H(s) = E^0(s)\ V^0(x,\ s) - \Delta V(x,\ 0) - \int_0^{(-)s} E^0(t)d\left(\Delta P(t)\right) -$$

$$- E^0(s)\ V(x,\ s)$$

$$= E^0(s)\ \Delta V(x,\ s) - \Delta V(x,\ 0) - \int_0^{(-)s} E^0(t)d\left(\Delta P(t)\right)$$

Dando a s el valor de $k < s$, será:

$$H(k) = E^0(k)\ \Delta V(x,\ k) - \Delta V(x,\ 0) - \int_0^{(-)k} E^0(t)\left(\Delta P(t)\right)$$

restando y teniendo en cuenta la definición de beneficio en $[k,\ s)$ se obtiene:

$$H(s) - H(k) = \int_k^{(-)s} E^0(t)d\ \Gamma(t) = E^0(s)\ \Delta V(x,\ s) -$$

$$- E^0(k)\ \Delta V(x,\ k) - \int_k^{(-)s} E^0(t)d\left(\Delta P(t)\right)$$

es decir:

$$E^0(s)\ \Delta V(x, s) = E^0(k)\ \Delta V(x, k) + \int_k^{(-)s} E^0(t) d\left[\Delta P(t) + \Gamma(t)\right]$$

c.q.d.

Para demostrar la segunda parte de la fórmula tendremos en cuenta que

$$E(t)\ V(x, t) = V(x, 0) + \int_0^{(-)t} E(\tau) d\left[P(\tau) - P^{(n)}_{(\tau)}\right]$$

$$E^0(t)\ V(x, t) = V(x, 0) + \int_0^{(-)t} E^0(\tau) d\left[P(\tau) - P^{0(n)}_{(\tau)}\right] - H(t)$$

es decir:

$$\begin{aligned} d\,(EV) &= E d[P - P^{(n)}] \\ d\,(E^0V) &= E^0 d[P - P^{0(n)}] - d\,H \end{aligned}$$

por tanto:

$$\frac{d\,(EV)}{E} - \frac{d\,(E^0V)}{E^0} = d\,[P^{0(n)} - P^{(n)}] + \frac{d\,H}{E^0}$$

es decir:

$$d\Gamma = \frac{dH}{E^0} = \frac{d\,(EV)}{E} - \frac{d\,(E^0V)}{E^0} - d\,(\Delta P^{(n)})$$

c.q.d.

Especificación de la función de beneficio elemental $d\,\Gamma(t)$:

a) *Caso continuo.*—Teniendo en cuenta que:

$$E(t) = e^{-\int_0^t \rho(x,\ \tau) d\tau} \qquad E^0(t) = e^{-\int_0^t \rho^0(x,\ \tau) d\tau}$$

será:

$$\frac{1}{E} \cdot \frac{d\,(EV)}{dt} = \frac{E'}{E} V + V' =$$
$$= - \rho(x, t)\, V(x, t) + V'(x, t)$$

$$\frac{1}{E^0} \cdot \frac{d\,(E^0V)}{dt} = \frac{E^{0\prime}}{E^0} V + V' =$$
$$= - \rho^0(x, t)\, V(x, t) + V'(x, t)$$

es decir:

$$\frac{d\,(EV)}{E\,dt} - \frac{1}{E^0\,dt}\,\frac{d\,(E^0V)}{E^0\,dt} = V(x,\ t)\left[\rho^0(x,\ t) - \rho(x,\ t)\right] =$$
$$= V(x, t)\, \Delta\rho(x, t)$$

Suponiendo que la función de la prima natural es:

$$\frac{d\,P^{(n)}_{(t)}}{dt} = r(t) + \sum_{r=1}^{m} S^{(r)}_{x+t}\ \mu^{(r)}_{x+t}$$

$$\frac{d\,P^{0(n)}_{(t)}}{dt} = r^0(t) + \sum_{r=1}^{m} S^{0(r)}_{x+t}\ \mu^{0(r)}_{x+t}$$

se tiene:

$$r'(t) = V(x,\ t)\left[\rho^0(x,\ t) - \rho(x,\ t)\right] - \Delta r(t) -$$
$$- \sum_{r=1}^{m} [S^{0(r)}_{x+t}\ \mu^{0(r)}_{x+t} - S^{(r)}_{x+t}\ \mu^{(r)}_{x+t}]$$

sustituyendo

$$\left[\rho^0(x,\ t) - \rho(x,\ t)\right] = \left[\delta^0(t) - \delta(t)\right] +$$
$$+ \sum_{r=1}^{k} \gamma^{0(r)}_{x+t} - \sum_{r=1}^{k} \gamma^{(r)}_{x+t}$$

se tiene:

$$\Gamma^1(t) = V(x, t) \left[\delta^0(t) - \delta(t)\right] +$$

$$+ V(x, t) \left[\sum_{r=1}^{k} \nu^{0(r)}_{x+t} - \sum_{r=1}^{k} \nu^{(r)}_{x+t}\right] - \Delta r(t)$$

$$- \sum_{r=1}^{m} [S^{0(r)}_{x+t}\ \mu^{0(r)}_{x+t} - S^{(r)}_{x+t}\ \mu^{(r)}_{x+t}]$$

En el caso de que $m = k$ y las $\nu^{(r)}_{x+t}$ sean igual a las $\mu^{(r)}_{x+t}$ se tiene, como caso particular, la fórmula:

$$\Gamma^1(t) = V(x, t) \left[\delta^0(t) - \delta(t)\right] - \Delta r(t) -$$

$$- \sum_{r=1}^{m} \left\{\left[S^{0(r)}_{x+t} - V(x, t)\right] \mu^{0(r)}_{x+t} - \left[S^{(r)}_{x+t} - V(x, t)\right] \mu^{(r)}_{x+t}\right\}$$

b) *Caso discreto.*—En este caso supondremos que operamos con primas anuales y por tanto:

$$\Delta P^{(n)} = \Delta r_t + v^0 \sum_{1}^{m} S^{0(r)}_{x+t}\ a^{0(r)}_{x+t} - v \sum_{1}^{m} S^{(r)}_{x+t}\ a^{(r)}_{x+t}$$

por otra parte se tiene:

$$\frac{\Delta(EV)}{E} = \Delta V(x, t) + V(x, t+1) \frac{\Delta E}{E}$$

$$\frac{\Delta(E^0V)}{E^0} = \Delta V(x, t) + V(x, t+1) \frac{\Delta E^0}{E^0}$$

Con lo cual resulta:

$$\gamma(t) = V(x, t+1)\left[\frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta E^0}{E^0}\right] - \Delta r_t -$$

$$- \left[v^0 \sum_{1}^{m} S^{0(r)}_{x+t}\, a^{0(r)}_{x+t} - v \sum_{1}^{m} S^{(r)}_{x+t}\, a^{(r)}_{x+t}\right]$$

Calculando separadamente:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x - v^t\,{}_tp_x}{v^t\,{}_tp_x} = vp_{x+t} - 1$$

$$\frac{\Delta E^0}{E^0} = \frac{v^{0t+1}\ {}_{t+1}p^0_x - v^{0t}\,{}_tp^0_x}{v^{0t}\,{}_tp^0_x} = v^0 p^0_{x+t} - 1$$

es decir:

$$\frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta E^0}{E^0} = Vp_{x+t} - V^0 p^0_{x+t}$$

y sustituyendo en la fórmula de $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = V(x, t+1)\,[vp_{x+t} - v^0 p^0_{x+t}] - \Delta r_t -$$

$$- \left[v^0 \sum_{1}^{m} S^{0(r)}_{x+t}\, a^{0(r)}_{x+t} - v^0 \sum_{1}^{m} S^{(r)}_{x+t}\, a^{(r)}_{x+t}\right]$$

En el caso particular en que las $b^{(r)}$ coinciden con las $a^{(r)}$, es decir:

$$p_{x+t} = 1 - \sum_{1}^{k} b^{(r)}_{x+t} = 1 - \sum_{1}^{m} a^{(r)}_{x+t}$$

$$p^0_{x+t} = 1 - \sum_{1}^{k} b^{0(r)}_{x+t} = 1 - \sum_{1}^{m} a^{0(r)}_{x+t}$$

se tiene, como caso particular, la fórmula:

$$\gamma(t) = V(x, t+1)\left[v\left(1 - \sum_1^m a^{(r)}_{x+t}\right) - \right.$$

$$\left. - v^0\left(1 - \sum_1^m a^{0(r)}_{x+t}\right)\right] - \Delta r_t -$$

$$- \left[v^0 \sum_1^m S^{0(r)}_{x+t}\, a^{0(r)}_{x+t} - v \sum_1^m S^{(r)}_{x+t}\, a^{(r)}_{x+t}\right] =$$

$$= - V(x, t+1)\,\Delta v - \Delta r_t -$$

$$- \sum_1^m \left[v^0\left(S^{0(r)}_{x+t} - V(x, t+1)\right) a^{0(r)}_{x+t} - \right.$$

$$\left. - v\left(S^{(r)}_{x+t} - V(x, t+1)\right) a^{(r)}_{x+t}\right]$$

IV

ALGUNAS APLICACIONES

Para la aplicación de estas fórmulas a los problemas de variación de las Reservas, Rentas, etc., es conveniente introducir los llamados índices de variación que designaremos por $\alpha(t)$:

$$d\,\alpha(t) = d\,[\Delta P + \Gamma]$$

Según estemos en el campo continuo, con $\Delta P' = \Delta p$ o en el campo discreto en que $d\,(\Delta P) = \Delta p$ sea la variación de la prima correspondiente al período de seguro, se tiene:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \Delta p(t) + \Gamma'(t) & \text{(caso continuo)} \\ \Delta p(t) + \gamma(t) & \text{(caso discreto)} \end{cases}$$

Con esta introducción la fórmula general de variación será:

$$E^0(s)\ \Delta V(x, s) = E^0(k)\ \Delta V(x, k) + \int_k^{(-)s} E^0(t) d\ \alpha(t)$$

con el *índice de variación*:

$$d\,\alpha(t) = d\,(\Delta P) + d\,\Gamma =$$

$$= \left[d\,(\Delta P) - d\,(\Delta P^{(n)})\right] + \left[\frac{d\,(EV)}{E} - \frac{d\,(E^0V)}{E^0}\right]$$

en donde el primer corchete es la diferencia entre las variaciones de las primas (media y natural) y el segundo corchete es:

$$\frac{d\,(EV)}{E} - \frac{d\,(E^0V)}{E^0} =$$

$$= \begin{cases} V(x, t)\ \Delta\rho(x, t)dt & \text{(caso continuo)} \\ -V(x, t+1)\ \Delta(vp_{x+t}) & \text{(caso discreto)} \end{cases}$$

y que podía ser interpretado como la *variación del rédito actuarial* de las reservas en el período considerado.

En las aplicaciones a los problemas de invarianza la condición $d\,\alpha(t) = 0$ se puede expresar diciendo que la diferencia en la variación de primas ha de resultar igual al rédito actuarial de las Reservas, es decir:

$$d(\Delta P^{(n)}) - d(\Delta P) = \frac{d\,(EV)}{E} - \frac{d\,(E^0V)}{E^0}$$

Supongamos, por ejemplo, que:

$$\Delta P = 0$$
$$\Delta V(x, 0) = 0$$

haciendo $k = 0$, tendremos:

$$E^0(s)\ \Delta V(x, s) = \int_0^{(-)s} E^0(t)\ d\,\alpha(t)$$

la condición de *invarianza* de las reservas será:

$$d\,(\Delta P^{(a)}) = \frac{d\,(EV)}{E} - \frac{d\,(E^0V)}{E^0}$$

En el caso continuo tendremos:

$$\Delta r(t) + \sum_{1}^{m} S^{0(r)}_{x+t}\,\mu^{0(r)}_{x+t} - \sum_{1}^{m} S^{(r)}_{x+t}\,\mu^{(r)}_{x+t} = V(x, t)\,\Delta\rho(x, t)$$

El teorema de Cantelli es un caso particular de este resultado general. En efecto, para

$$\Delta r(t) = 0 \quad ; \quad \delta^0(t) = \delta(t)$$

$$\Delta\rho(x, t) = \sum_{1}^{m} \mu^{0(r)}_{x+t} - \sum_{1}^{m} \mu^{(r)}_{x+t}$$

sustituyendo se tiene la condición,

$$\sum_{1}^{m} \left[\left(S^{0(r)}_{x+t} - V(x, t) \right) \mu^{0(r)}_{x+t} - \left(S^{(r)}_{x+t} - V(x, t) \right) \mu^{(r)}_{x+t} \right] = 0$$

haciendo

$$\mu^{(r)}_{x+t} = (1 + \eta^{(r)})\,\mu^{0(r)}_{x+t}$$

tendremos para $r = 1, 2, \ldots, m$:

$$\left(S^{0(r)}_{x+t} - V(x, t) \right) \mu^{0(r)}_{x+t} = \left(S^{(r)}_{x+t} - V(x, t) \right) (1 + \eta^{(r)})\,\mu^{0(r)}_{x+t}$$

de donde:

$$S^{0(r)}_{x+t} = \left[S^{(r)}_{x+t} - V(x, t) \right] \eta^{(r)} + S^{(r)}_{x+t}$$

es decir, los capitales asegurados $S^{0(r)}$ que con tantos de mortalidad $\mu^{0(r)}$ proporcionan las mismas reservas que los capitales asegurados $S^{(r)}$ son los tantos de mortalidad $\mu^{(r)} = (1 + \eta^{(r)})\,\mu^{0(r)}$.

Veamos ahora el caso de la *Renta vitalicia cuando varía el tipo de interés.*

Partiendo de los siguientes datos:

		caso continuo	caso discreto
$V(x, 0)$	$=$	$\bar{a}_x$	a_x
$V(x, t)$	$=$	$\bar{a}_{x+t}$	a_{x+t}

Teniendo en cuenta que $\Delta P = 0$ (por ser prima única) y que sólo hay variaciones por interés, los índices de variación serán:

$$d\,\alpha(t) = \begin{cases} (\delta^0 - \delta)\ V(x, t)d & \text{(caso continuo)} \\ -p_{x+t}\ V(x, t+1)\ \Delta v & \text{(caso discreto)} \end{cases}$$

Sustituyendo en la fórmula general para $k = 0$ y $s = \omega$ (siendo $V(x, \omega) = 0$), será:

$\Delta V(x, 0) =$

$$= \begin{cases} \Delta \bar{a}_x = -\displaystyle\int_0^\omega E^0(t)d\ \alpha(t) = -(\delta^0 - \delta)\int_0^\omega E^0(t)\ \bar{a}_{x+t}\ dt \\ \Delta a_x = \Delta v \displaystyle\sum_0^\omega E^0(t)\ p_{x+t}\ a_{x+t+1} \end{cases}$$

En la de tipo discreto, Saxer (4) hace la siguiente aproximación:

$$\Delta a_x = \Delta v \sum_0^\omega \frac{D^0_{x+t}}{D^0_x} \cdot \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} =$$

$$= \frac{\Delta v}{v} \sum_0^\omega \left(\frac{v^0}{v}\right)^t \cdot \frac{N_{x+t+1}}{D_x}$$

$$\simeq \frac{\Delta v}{v} \sum_0^\omega \frac{N_{x+t+1}}{D_x} = \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

admitiendo:

$$\frac{V^0}{V} \simeq 1$$

Utilizando la fórmula *dual* para el caso continuo vamos a obtener la ecuación integral de la función $Q_x = \bar{a}^0_x/\bar{a}_x$ que utiliza Meidell (3) para hacer las aproximaciones. Es decir,

$$\Delta\bar{a}^0_x = -(\delta - \delta^0) \int_0^\omega E(t)\ \bar{a}^0_{x+t}\ dt =$$

$$= (\delta^0 - \delta) \int_0^\omega \frac{\bar{D}_{x+t}}{\bar{D}_x} \cdot \frac{\bar{N}^0_{x+t}}{\bar{D}_{x+t}}\ dt =$$

$$= \frac{1}{\bar{D}_x} (\delta^0 - \delta) \int_0^\omega \frac{\bar{D}_{x+t}}{\bar{D}_{x+t}} \cdot \frac{\bar{N}^0_{x+t}}{\bar{N}_{x+t}} \cdot \bar{N}_{x+t}\ dt$$

$$= \frac{(\delta^0 - \delta)}{\bar{D}_x} \int_0^\omega Q_{x+t} \cdot \bar{N}_{x+t}\ dt$$

teniendo en cuenta

$$\Delta\bar{a}^0_x = \bar{a}_x - \bar{a}^0_x = \bar{a}_x \left(1 - \frac{\bar{a}^0_x}{\bar{a}_x}\right) = \bar{a}_x\ (1 - Q_x)$$

$$= \frac{\bar{N}_x}{\bar{D}_x}\ (1 - Q_x)$$

será:

$$\frac{\bar{N}_x}{\bar{D}_x}\ (1 - Q_x) = \frac{(\delta^0 - \delta)}{\bar{D}_x} \int_0^\omega Q_{x+t} \cdot \bar{N}_{x+t}\ dt$$

es decir:

$$Q_x = 1 - \frac{(\delta^0 - \delta)}{\bar{N}_x} \int_0^\omega Q_{x+t} \cdot \bar{N}_{x+t}\ dt$$

que es la ecuación integral citada.

Aplicación a la variación del tipo de interés en la renta pagadera a la cabeza (x) actualmente activa a partir de su invalidez y mientras viva en tal estado. Es decir,

$$V(x, 0) = a_x^{ai} \quad " \quad V(x, t) = a_{x+t}^{ai}$$

en el caso discreto será:

$$\Delta a_x^{ai} = - \sum_0^{\omega} E^0(t) \; \Delta \; \alpha(t)$$

en donde

$$E^0(t) = v^{0t} \frac{l_{x+t}^{aa}}{l_x^{aa}}$$

y el índice de variación será:

$$\Delta \alpha(t) = - [\Delta P^{(a)} + \Delta v \; V(x, t+1) \; p_{x+t}^{aa}]$$

$$- \Delta \alpha(t) = [v^0 S^0{}_{x+t} i_{x+t} - v \; S_{x+t} \; i_{x+t}] + \Delta v \cdot V(x, t+1) \cdot p_{x+t}^{aa}$$

$$= v^0 \; S^0{}_{x+t} i_{x+t} - v \; S_{x+t} \; i_{x+t} +$$

$$+ \; \Delta v \left[(1+i) \; V(x, t) - S_{x+t} \; i_{x+t} \right]$$

$$= (1+i) \, \Delta v \; V(x, t) + i_{x+t} \left[v^0 \; S^0{}_{x+t} - \right.$$

$$\left. - \; v \; S_{x+t} - (v^0 - v) \; S_{x+t} \right]$$

$$= (1+i) \; \Delta v \; V(x, t) + i_{x+t} \, v^0 \, \Delta S_{x+t}$$

teniendo en cuenta que $S_{x+t} = a^i{}_{x+t}$ y tomando la aproximación

$$\Delta \; S_{x+t} \simeq \frac{\Delta v}{v} \; \frac{S^i{}_{x+t+1}}{D^i{}_{xt+}}$$ se tiene:

$$\Delta a_x^{ai} \simeq \frac{\Delta v}{v} \sum_0^{\omega} E^0(t) \left[a_{x+t}^{ai} + v^0 \frac{S^i{}_{x+t+1}}{D^i{}_{x+t}} \; i_{x+t} \right]$$

Las fórmulas generales obtenidas se muestran interesantes en el estudio del beneficio y la obtención de fórmulas de contribución. Pero ello se sale de los límites impuestos a este trabajo.

V

BIBLIOGRAFIA

1. BERGER, A.: Uber die Berechnung der Leibrent bei Veränderung des Zinsfusses. SKAN. AKT., 1932.
2. LASHERAS SANZ, A.: Matemática del Seguro.
3. MEIDELL, B.: Zur Abschätzung des Einflusses einer Zinsänderung auf die Leibrentenwerte. SKAN. AKT., 1954.
4. SAXER, W.: Versicherungsmathematik.
5. SÖDERSTRÖM, L. C.: Valution of the Fund and Analysis of its Development. SKAN. AKT., 1957.
6. VAJDA, S.: Calculation of Policy Values for different Rates of Interest. SKAN. AKT., 1945.
7. ZWINGGI, E.: — Versicherungsmathematik.
   — A Study of the dependence of the premium on the rate of interest. SKAN. AKT., 1950.