Ecuaciones de dimensión de las magnitudes actuariales

SUMARIO

1.—Sistemas de medida

1.1 Ecuaciones de dimensión

1.2 Unidades actuariales básicas

2.—Magnitudes biométricas derivadas. Sus ecuaciones de dimensión

2.1 La función d_x

2.2 Promedio anual de mortalidad

2.3 Intensidad de la mortalidad

2.4 Tasa de la mortalidad

2.5 Valores unitarios

3.—Tanto instantáneo de mortalidad

4.—Bibliografía

Ecuaciones de dimensión de las magnitudes actuariales

Por Rafael VELASCO LARA

Aunque en la Matemática del Seguro no es tan necesario como, por ejemplo, en Física, reseñar las magnitudes fundamentales y las principales magnitudes derivadas, resulta conveniente al definirlas, establecer sus ecuaciones de dimensión, aunque sólo sea para aclarar ciertas discrepancias en la designación de algunas de dichas magnitudes.

Para la obtención de las ecuaciones de dimensión de las unidades derivadas se seguirá el método utilizado por Gil Pelaez (4.4) para las magnitudes financieras.

1. SISTEMAS DE MEDIDAS

La relación por medio de la cual se deduce el valor de una *unidad* en función de las unidades fundamentales, viene dada por las llamadas dimensiones de la referida unidad. Así, la expresión de cualquier *cantidad* consta de dos partes: un número y la palabra o signo correspondiente al nombre de la unidad empleada. Por ejemplo: un capital se indica por el símbolo:

$$c[C]$$

Cuando se trata de una magnitud derivada su unidad dependerá de las unidades fundamentales y vendrá expresada por medio de un número seguido de las unidades fundamentales que lo definen.

1.1. Ecuaciones de dimensión

Una ecuación de la forma:

$$[X] = [C^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}]$$

que expresa la relación existente entre la unidad derivada y las unidades fundamentales de un sistema, se llama "ecuación de dimensión".

Estas ecuaciones de dimensión reportan las siguientes ventajas:

1.° Proporcionan el medio de poder convertir el valor de cualquier cantidad expresada en función de las unidades de un sistema absoluto en el de otro sistema absoluto.

2.° Facilitan la comprobación de la exactitud de una serie de razonamientos mediante los cuales se haya deducido una ecuación que ligue algunas magnitudes; ya que, las dimensiones de los dos miembros de una ecuación, que relacione entre si magnitudes, han de ser iguales.

3.° Caracterizan el verdadero significado de las unidades derivadas.

1.2. Unidades actuariales básicas

Las magnitudes actuariales fundamentales son: Capitales, sucesos asegurables y tiempo. Las unidades básicas pueden ser elegidas arbitrariamente, sin embargo, salvo indicación en contrario, adoptaremos para los capitales la unidad monetaria, para los sucesos el ente individualizado del colectivo hipotético asegurable y para el tiempo el año.

Este grupo de unidades lo representaremos por el sistema: [C. L. T.]

Para concretar la exposición nos referiremos al caso en que el suceso asegurable depende de la vida de una persona procedente de un grupo, considerado demográficamente homogéneo, de personas l_x, de edad (x). En este caso la unidad fundamental, L, del suceso asegurable será el individuo de dicho grupo.

2. MAGNITUDES BIOMETRICAS DERIVADAS

En la matemática actuarial suele considerarse como función biométrica básica la expresión l_x, que representa el número de personas que, de un grupo inicial dado, alcanza la edad x.

La serie de valores l_x, para valores enteros de x, constituye lo que se llama una tabla de supervivencia. A partir de los valores l_x, dados por una tabla de supervivencia, o bien, por una ley de supervivencia, se definen y obtienen las restantes funciones biométricas.

En la práctica se suelen seguir métodos indirectos para la construcción de una tabla de supervivencia, tomando como básica otra función biométrica, distinta de l_x; en este caso se toma, generalmente, como función biométrica fundamental el tanto anual de muerte, q_x.

2.1. La función d_x

Se representa por $d(x, x + \Delta x)$ el número de personas, procedentes del conjunto l_x, que fallecen en el intervalo $(x, x + \Delta x)$, o sea, después de cumplir la edad x y antes de alcanzar la edad $x + \Delta x$. Por tanto:

$$d(x, x + \Delta x) = l_x - l_{x+\Delta x} = - \Delta l_x$$

También se puede definir $d(x, x + \Delta x)$ como: la frecuencia absoluta del número de fallecidos entre las edades del intervalo $(x, x + \Delta x)$.

Aunque es poco empleado en la técnica actuarial, algunos autores, entre ellos Insolera (4.5) consideran la expresión anterior en función del número acumulativo de fallecimientos.

Llamando $F(x)$ al número de personas fallecidas del grupo inicial $l_0 = N$, antes de alcanzar la edad x, se tendrá:

$$F(x) = l_0 - l_x \qquad F(x + \Delta x) = l_0 - l_{x+\Delta x}$$

de donde resulta:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = l_x - l_{x+\Delta x} = - \Delta l_x$$

por consiguiente:

$$d(x, x + \Delta x) = - \Delta l_x = \Delta F(x)$$

Siendo por definición, $d(x, x + \Delta x)$, un conjunto de personas su ecuación de dimensión será:

$$[d] = [C^0 \cdot L^1 \cdot T^0]$$

2.2. Promedio anual de mortalidad

Si se supone que los fallecimientos se distribuyen uniformemente durante el año, el promedio anual de fallecidos en el año, procedentes del grupo l_x, referido al período Δx, será:

$$v(x, x + \Delta x) = \frac{d(x, x + \Delta x)}{\Delta x} = - \frac{\Delta l_x}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

La expresión anterior puede interpretarse mecánicamente diciendo que $v(x, x + \Delta x)$ mide la velocidad media anual de fallecimientos, referida al período Δx.

Su ecuación de dimensiones es:

$$[v] = [C^0 \cdot L^1 \cdot T^{-1}]$$

2.3. Intensidad media de la mortalidad

Refiriendo el promedio anual, de período Δx, al número de personas consideradas en el momento inicial, l_x, se obtiene la densidad relativa o intensidad de la mortalidad referida al período Δx. Representándola por r, resulta:

$$r(x, x + \Delta x) = \frac{v(x, x + \Delta x)}{l_x} = \frac{1}{l_x} \cdot \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

o también

$$r(x, x + \Delta x) = - \frac{1}{l_x} \cdot \frac{\Delta l_x}{\Delta x}$$

Su ecuación de dimensiones será:

$$[r] = [C^0 \cdot L^0 \cdot T^{-1}]$$

2.4. Tasa de la mortalidad

Se llama tanto medio o tasa de mortalidad referida al período Δx, al producto de la intensidad por dicho período de tiempo. Si se representa por $q(x, x + \Delta x)$ dicho tanto, se tiene:

$$q(x, x + \Delta x) = r(x, x + \Delta x) \cdot \Delta x = - \frac{\Delta l_x}{l_x}$$

y su ecuación de dimensiones será:

$$[q] = [C^0 \cdot L^0 \cdot T^0]$$

Este tanto, así definido, es de dimensión nula, o sea, es un número abstracto y, por tanto, puede también designarse como *el coeficiente, de período* Δx, *de la mortalidad.*

2.5. Valores unitarios

Cuando se toma como período la unidad de tiempo, se obtienen los siguientes valores:

$$\Delta x = 1 \Rightarrow$$

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad ,, \quad [d_x] = [C^0 L^1 T^0]$$

$$v(x, x + 1) = d_x \quad ,, \quad [v_x] = [C^0 L^1 T^{-1}]$$

$$q_x = r(x, x + 1) = \frac{v_x}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} \quad ,, \quad q_x = [C^0 \cdot L^0 \cdot T^0]$$

En estas expresiones pueden observarse las ventajas del uso de las ecuaciones de dimensión, que dan las dimensiones de las expresiones definidas que, cuando están referidas al período unitario no aparecen explícitamente en las fórmulas.

Al tratar más adelante del tanto instantáneo se pondrá mejor de manifiesto la idea anterior.

El tanto anual o tasa de mortalidad, q_x, es de dimensión nula y puede ser considerado como la frecuencia relativa de la mortalidad.

Cuando los valores de l_x son deducidos de una ley de probabilidad de supervivencia, el coeficiente o tanto anual de mortalidad, q_x, representará la probabilidad anual de muerte, expresión con la que también suele ser designado. No obstante, según Insolera (4.5): "rigurosamente hablando, cuando exista probabilidad, q_x es una valoración empírica del verdadero valor de la probabilidad desconocida". Esta afirmación, procede de que en su teoría de la supervivencia "prescinde, sin desecharlos, de los postulados de Bohlmann, que supondrían para un individuo la existencia, en cada caso, de una probabilidad matemática constante en cada edad; probabilidad cuya existencia se admite para algunos grupos demográficos con la misma licitud con que se rechaza para otros". No obstante, una gran mayoría de autores de Matemática Actuarial suponen, aunque sólo sea formalmente, la existencia de la probabilidad de muerte para cada edad, con lo que se puede hacer referencia al cálculo de probabilidades al tratar de los problemas inherentes a la técnica de los seguros.

3. TANTO INSTANTANEO DE MORTALIDAD

Si en la expresión de la intensidad de la mortalidad se considera la edad $x + t$ y el período Δt, resulta:

$$r(x + t, x + t + \Delta t) = -\frac{1}{l_{x+t}} \cdot \frac{\Delta l_{x+t}}{\Delta t}$$

y supuesta la función l_{x+t}, continua y derivable, respecto a t, se tiene:

$$\lim_{\Delta t \to 0} r(x + t, x + t + \Delta t) = -\frac{1}{l_{x+t}} \cdot \frac{dl_{x+t}}{dt}$$

Este límite se representa por μ_{x+t}, siendo, por tanto:

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}} \cdot \frac{dl_{x+t}}{dt} = -\frac{d \ln l_{x+t}}{dt}$$

La ecuación de μ_{x+t} será:

$$[\mu] = [C^0 \cdot L^0 \cdot T^{-1}]$$

La función μ_{x+t} puede ser interpretada como la intensidad de reducción del conjunto de los supervivientes, l_{x+t}, en el instante $x + t$. De Finetti, llama a μ_{x+t} "intensidad de la mortalidad", y hace observar que su recíproco es un tiempo, no un número como q_{x+t}.

En particular, si se considera el período Δx y se parte del grupo lx de edad (x), se obtiene:

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{d\, l_x}{dx} = -\frac{d \ln l_x}{dx}$$

El valor μ_x suele designarse, también, como el tanto instantáneo de mortalidad, o en forma más explícita tanto anual de mortalidad, para la edad x, en período infinitésimo, es decir, válido en el intervalo infinitesimal $(x, x + dx)$ o, abreviadamente, válido en el instante x del tiempo.

El actuario inglés Woolhouse le dió el nombre de *fuerza o intensidad de la mortalidad*, ya que μ_x no es una probabilidad como haría creer el nombre de tasa o tanto. La probabilidad de defunción de una persona de edad x, al cumplir esta edad sería $\mu_x\, dx$, por lo que, según Richard (4.7) sería más apropiado llamar a μ_x *coeficiente instantáneo de mortalidad*. Con esta designación, algo imprecisa, se elude la caracterización del significado de la función μ_x y se le asigna la categoría de coeficiente, que suele ser reservada para números abstractos.

Por otra parte, según Insolera (4.5), "la escuela actuarial inglesa suele atribuir a μ_x las características biológicas propias de la fuerza de mortalidad e identifica ésta con aquél. Pero, si se considera el conjunto de supervivientes como una masa en movimiento, el tanto anual en período instantáneo equivale a una velocidad angular y no parece recomendable, al menos desde el punto de vista de la mecánica, una sistemática identificación entre una fuerza agente y la velocidad del movimiento".

Ahora bien, una vez conocido el significado de μ_x, su expresión analítica y sus dimensiones, no creemos exista inconveniente en utilizar la designación clásica de tanto instantáneo de mortalidad.

4. BIBLIOGRAFIA

4.1. ALIPRANDI, G.: *Matematica finanziaria ed attuariale*. Padova, 1954.

4.2. DE FINETTI, B.: *Lezioni di Matematica Attuariale*. Roma, 1957.

4.3. GALABRUN, H.: *Assurance sur la Vie*. Paris, 1924.

4.4. GIL PELÁEZ, L.: *Matemática de las operaciones financieras*. Madrid, 1964.

4.5. INSOLERA, F.: *Curso de Matemática financiera y actuarial*. Madrid, 1950.

4.6. LASHERAS, A.: *Matemática del Seguro*. Madrid, 1948.

4.7. RICHARD, P. J.: *Théorie et Prat. des operations d'assurances*. París, 1944.

4.8. SIBIRANI, F.: *Matematica generale e financiaria*, vol. III. Padova, 1944.

4.9. SPURGEON, E. F.: *Life Contingencies*. Cambridge, 1945.