Estimación no paramétrica de procesos monótonos [1]

Por ANGEL VEGAS PEREZ

1. *Definición.*

Diremos que un proceso ξ_t es monótono si sus realizaciones o *puntos* muestrales X_t son funciones monótonas del parámetro t. Así pues, si

$$\Delta X_t = X_{t+h} - X_t \geqslant 0 \qquad h > 0$$

el proceso es *monótono creciente*, y si

$$\Delta X_t = X_{t+h} - X_t \leqslant 0 \qquad h > 0$$

es *monótono decreciente.*

En el caso en que la segunda diferencia no sea negativa el proceso se llamará *cóncavo*, en el caso en que no sea positiva se llamará *convexo.*

2. *Tipificación del proceso.*

Nos referiremos primero a los *procesos crecientes.*

Un proceso monótono creciente se puede considerar como un proceso de Markoff en el que la matriz estocástica se caracteriza porque la r^a fila tiene la forma

$$(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ P_{rr},\ P_{r,\,r+1},\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

lo que supone, evidentemente, que $P_{rr} + P_{r,r+1} = 1$.

Supondremos que la probabilidad de que en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$, se produzca la transición del estado E_r al E_{r+1} es

$$P_{r,\,r+1} = f(t)\Delta t + O(\Delta t)$$

(1) Publicado en la Revista «Trabajos de Estadística y de Investigación operativa».—Vol. XV, cuaderno I. Año 1964.

en la que $O(\Delta t)$ indica un infinitésimo de orden superior respecto a Δt. Se trata entonces de un proceso *aditivo* cuya función generatriz $\phi_t(s) = \Sigma s^r P_r(t)$ cumple la relación

$$\phi_{t+\Delta t}(s) = \phi_t(s) \; \{sf(t)\Delta t + [1 - f(t)\Delta t] + O(\Delta t)\}$$

por lo tanto,

$$\frac{\phi_{t+\Delta t}(s) - \phi_t(s)}{\Delta t} = \phi_t(s) \; f(t) \; (s - 1) + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

luego

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi_t(s) \; f(t) \cdot (s - 1)$$

de donde se deduce

$$\phi_t(s) = H(t) e^{\int f(t) \; (s-1) dt}$$

Si suponemos que el estado inicial es E_{n_0} se verificará

$$P_r(o) = \begin{cases} 1 & r = n_0 \\ 0 & r \neq n_0 \end{cases}$$

$$\phi_0(s) = s^{n_0}$$

y, por lo tanto,

$$\phi_t(s) = s^{n_0} \; e^{(s-1)} \int_0^t f(u) \cdot du = s^{n_0} \; e^{(s-\nu F(t))}$$

De todo lo anterior se deduce que la probabilidad de que haya n elementos en el sistema, en el tiempo t, es decir, E_n, será la siguiente

$$P_n(t) = e^{-F(t)} \; \frac{(F(t))^{n-n_0}}{\lfloor n - n_0}$$

Algunas veces puede ser conveniente hacer las formulaciones en términos *operativos,* es decir, referidas a lo que podríamos llamar *tiempo operativo,* definido por la transformación,

$$F(t) = \int_0^t f(u) du = r$$

en donde r es el *tiempo operativo.*

La interpretación de r es inmediata, basta reparar en que

$$E(r) = \left(\frac{\partial \, \phi_t \, (S)}{\partial \, S} \right)_{S=1} = n_0 + F(t) = n_0 + r$$

por lo tanto r es el valor medio del número de elementos ingresados en el sistema en el intervalo de timpo (0, t).

La probabilidad, pues, de que en el sistema haya n elementos es

$$P_n(r) = e^{-r} \frac{r^{n-n_0}}{\underline{|n - n_0}}$$

Si designamos por X_t la cantidad de elementos que existen en el sistema en el tiempo t, tendremos

$$E(X_t) = n_0 + F(t)$$

$$\frac{d\,E\,(X_t)}{d\,t} = f(t)$$

$$\frac{d^2\,E\,(X_t)}{d\,t^2} = f'(t)$$

Entonces, según se cumpla $f'(t) \geqslant 0$ o $f'(t) \leqslant 0$, es decir, que $f(t)$ sea creciente o decreciente, el proceso será *cóncavo* o *convexo*.

Estudiemos ahora los procesos decrecientes. Un proceso decreciente es un proceso de May Koff, cuya matriz estocástica viene caracterizada por el hecho de que la fila r^a tiene la forma

$$(0, \ldots, 0, P_{r,\,r-1}\, P_{r,\,r}, 0, \ldots, 0)$$

siendo la probabilidad de que en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ se produzca la transición $E_r \rightarrow E_{r-1}$ de la forma

$$P_{r_1,\,r-1} = f(t)\ \Delta t + O(\Delta t)$$

Como en el caso del proceso creciente es un *proceso aditivo* cuya función generatriz satisface la relación

$$\phi_{t+\Delta t}(S) = \phi_t(S)\ [S^{-1}\, f(t)\ \Delta t + (1 - f(t)\ \Delta t) + O(\Delta t)]$$

luego

$$\frac{\partial\, \phi_t(S)}{\partial\, t} = \phi_t(S)\ f(t)\ (S^{-1} - 1)$$

de donde

$$\phi_t(S) = H(t)\ e^{(S^{-1}-1)\int f(t)dt}$$

Si suponemos que en el origen la cantidad de elementos que hay en el sistema es n_0, tendremos

$$\phi_t(t) = s^{n_0}\ e^{(S^{-1}-1)\int_0^t f(u)du}$$

La probabilidad de que en el tiempo t el número de elementos que existen en el sistema sea n, tiene la forma

$$P_n(t) = e^{-F(t)} \frac{F(t)^{n_0-n}}{\underline{|n_0 - n}}$$

El valor medio de r es

$$E(r) = n_0 - F(t)$$

En este caso el *tiempo operativo* $r = F(t) = \int_0^t f(u)du$ es el valor medio de los elementos salidos del sistema en el tiempo (0, t).

Designando por X_t el número de elementos que hay en el sistema en t tendremos

$$\frac{d\,E(X_t)}{d\,t} = -\,f(t)$$

$$\frac{d^2\,E(X_t)}{d\,t^2} = -\,f'(t)$$

Lo que supone que según que $f(t)$ sea decreciente o creciente, el proceso será *cóncavo* o *convexo*.

3. *Estimación no paramétrica del proceso.*

Vamos a proceder a la estimación del valor medio del proceso partiendo exclusivamente de sus propiedades de monotonía y de concavidad o convexidad, es decir, prescindiendo de la formulación paramétrica de la función de probabilidad.

Según hemos visto $F(t) = \int_0^t f(u)du$ es el valor medio del número de elementos que han ingresado en el sistema en el intervalo de tiempo (0, t).

Si llamamos $G(t)$ a la probabilidad de que un elemento ingrese en el intervalo (0, t) y si el número de elementos que han ingresado en el intervalo muestran $(t_0 - tu)$ es $X_{t_n} - X_{t_0}$ tendremos,

$$F(t) = (X_{t_n} - X_{t_0})\; G(t)$$

de donde deducimos

$$F'(t) = (X_{t_n} - X_{t_0})\ G'(t)$$
$$F(t) = (X_{t_n} - X_{t_0})\ g(t)$$

siendo $g(t)$ la función de densidad correspondiente a $G(t)$, es decir, $g(t)\Delta t + O(\Delta t)$ es la probabilidad de que un elemento ingrese en el sistema de tiempo $(t, t + \Delta t)$.

Evidentemente que el proceso será cóncavo o convexo según sea creciente o decreciente $g(t)$.

Si el proceso fuese decreciente tendríamos

$$E(X_t) = X_{t_0} - F(t) = X_{t_0} - (X_{t_0} - X_{t_u})\ G(t)$$

en la que $G(t)$ representa la probabilidad de que un elemento salga del sistema en el intervalo (0, t), por lo tanto, $g(t)\Delta t + O(\Delta t)$ la probabilidad de que un elemento salga del sistema en el intervalo $(t, t + \Delta t)$.

Procederemos ahora a la estimación de ambas clases de procesos.

a) *Procesos crecientes.*

Seguiremos el método de máxima verosimilidad. La función de verosimilitud de la muestra es:

$$L(X_{t_1}\ X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_u}) = g(t_1)^{x_{t_1} - x_{t_2}}\ g(t_2)^{X_{t_2} - X_{t_1}},\ \ldots,\ g(t_n)^{X_{t_n} - X_{t_n}}$$

Se trata de determinar las $g(t_r)$ que hagan máxima L, con las siguientes condiciones:

$$\int_{t_0}^{\infty} g(u)du = g(t_1)\ (t_1 - t_0) + \ldots + g(t_n)\ (t_n - t_{n-1}) = 1$$

y

$$g(t_0) \leqslant g(t_1) \leqslant (t_2) \leqslant \ldots \leqslant g(t_n)$$

Supongamos que esta ordenación monótona es de la siguiente forma:

$$g(t_1) = g(t_2) = \ldots = g(t_{r_1}) = \phi_1$$
$$g(t_{r_1+1}) = g(t_{r_{1}+2}) = \ldots = g(t_{r_2}) = \phi_2$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$g(t_{r_s+1}) = g(t_{r_s+2}) = \ldots = g(t_n) = \phi_{s+1}$$

En cuyo caso las anteriores relaciones adoptan la siguiente forma:

$$[L = \phi_1^{X_{t_{r_1}} - X_{t_0}} \phi_2^{X_{t_{r_2}} - X_{t_{r_1}}} \dots \phi_{s+1}^{X_{t_n} - X_{t_{r_s}}}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} f(u)du = \phi_1(t_{r_1} - t_0) + \phi_2(t_{r_2} - t_{r_1}) +$$

$$+ \dots + \phi_{s+1}(t_n - t_{r_s}) = 1$$

$$\phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{s+1}$$

El problema se plantea, por lo tanto, en los siguientes términos:

Determinar las ϕ_r que hacen máxima la función

$$\Phi = (X_{t_{r_1}} - X_{t_0}) \log \phi_1 + \dots + (X_{t_u} - X_{t_{r_s}}) \log \phi_{s+1} -$$

$$- \lambda[\phi_1(t_{r_1} - t_0) + \dots + \phi_{s+1}(t_n - t_{r_s}) - 1]$$

en la que λ es el multiplicador de Lagrange, con la condición

$$\phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{s+1}$$

Las derivadas parciales de Φ, adoptan la forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi_i} = \frac{X_{t_{r_i}} - X_{t_{r_{i-1}}}}{\phi_i} - \lambda(t_{r_i} - t_{r_{i-1}})$$

de donde se deduce igualando a cero y determinando λ por la condición $\Sigma\phi_i(t_{r_i} - t_{r_{i-1}}) = 1$, que los valores ϕ_i, tienen la siguiente forma:

$$\phi_1 = \frac{1}{X_{t_n} - X_{t_0}} \cdot \frac{X_{t_{r_1}} - X_{t_0}}{t_{r_1} - t_0}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{X_{t_n} - X_{t_0}} \cdot \frac{X_{t_{r_2}} - X_{t_{r_1}}}{t_{r_2} - t_{r_1}}$$

... ...

$$\phi_{s+1} = \frac{1}{X_{t_n} - X_{t_0}} \cdot \frac{X_{t_n} - X_{t_r}}{t_n - t_{r_s}}$$

La condición de monotonía de las ϕ_i exige que en el plano cartesiano (X, t) la solución sea una poligonal cuyos segmentos tienen una inclinación creciente (fig. 1).

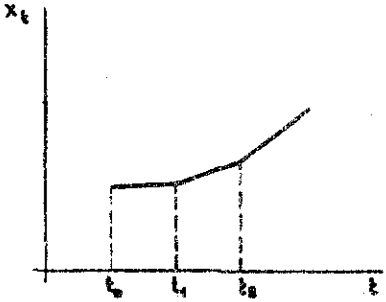

Fig 1

La estimación de $E(X, t)$ si $t_{r_{i-1}} < t < t_{r_i}$ tiene, pues, la forma

$$\overline{X}_t = X_{t_0} + (X_{t_n} - X_{t_0}) \int_{t_0}^{t} \overline{g}(u)du =$$

$$= X_{t_0} + (X_{\ n} - X_{t_0}) \left[\frac{1}{X_{t_n} - X_{t_0}} \cdot \frac{X_{t_{r_1}} - X_{t_0}}{t_{r_1} - t_0} \right. +$$

$$+ \frac{1}{X_{t_n} - X_{t_0}} \cdot \frac{X_{t_{r_2}} - X_{t_{r_1}}}{t_{r_2} - t_{r_1}} (t_{r_2} - t_{r_1}) + \dots +$$

$$\left. + \frac{1}{X_{t_n} - X_{t_0}} \cdot \frac{X_{t_{r_i}} - X_{t_{r_{i-1}}}}{t_{r_i} - t_{r_{i-1}}} (t - t_{r_{i-1}}) \right] =$$

$$= X_{t_0} - X_{t_0} + X_{t_{r_{i-1}}} + \frac{X_{t_{r_i}} - X_{t_{r_{i-1}}}}{t_{r_i} - t_{r_{i-1}}} (t - t_{r_{i-1}}) =$$

$$= X_{t_{r_{i-1}}} + \frac{X_{t_{r_i}} - X_{t_{r_{i-1}}}}{t_{r_i} - t_{r_{i-1}}} (t - t_{r_i})$$

Es claro, que si t coincide con la abscisa de un vértice de la poligonal, la estimación coincide con el valor muestral, es decir, $X_{t_{r_i}} = X_{t_{r_i}}$.

En el caso en que t esté comprendido entre $(t_{r_{i-1}}, t_{r_i})$ la estimación será la ordenada del punto perteneciente al segmento que une los vértices que corresponden a $X_{t_{r_{i-1}}}$ y $X_{t_{r_i}}$.

Hemos supuesto que conocemos los vértices de la poligonal, o sea los valores t_{r_1}, t_{r_2}, ..., t_{r_s}. Vamos ahora a determinar estos puntos partiendo de la muestra y del significado del criterio seguido para la estimación, es decir, el *de máxima verosimilitud.*

La poligonal, lugar geométrico de los valores estimados ha de caracterizarse porque no puede existir ningún valor muestral que sea ***menor*** *a su correspondiente estimación, es decir,*

$$\overline{X}_t \leqslant X_t$$

En efecto, si suponemos que esto no se cumple resulta que la estimación no hace máxima la función de verosimilitud.

Sea

$$X_{t_i} < \overline{X}_{t_i} \qquad \text{(fig. 2)}$$

$X_{t_i} < \overline{X}_{t_i}$ (fig 2).

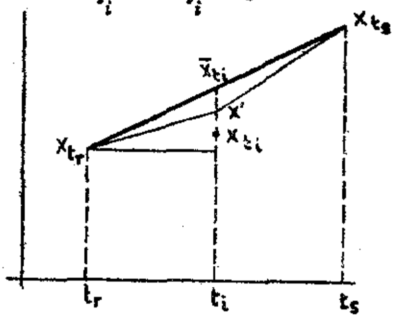

Fig 2

Habrá un X' tal que $X_{t_i} < X' < \overline{X}_{t_i}$ que tomaremos como vértice de una nueva poligonal cóncava para la que la función de verosimilitud toma un valor mayor. El factor que corresponde en la función de verosimilitud al segmento cuyos vértices son X_{t_r} y X_{t_s} es en la primera poligonal el siguiente:

$$g^{x_{t_r} - x_{t_s}}$$

Este factor se transforma al pasar a la nueva poligonal en

$$\left(g-\frac{\varepsilon}{t_i-t_r}\right)^{X_{t_i}-X_{t_r}}\left(g+\frac{\varepsilon}{t_s-t_i}\right)^{X_{t_s}-X_{t_i}}$$

en la que

$$\varepsilon=\overline{X}_{t_i}-X'=X_{t_s}-X''$$

Desarrollando las potencias de los binomios, tendremos:

$$\left[g^{X_{t_i}-X_{t_r}}-(X_{t_i}-X_{t_r})\frac{\varepsilon}{t_i-t_r}\,g^{X_{t_i}-X_{t_r}-1}+\ldots\right]$$

$$\left[g^{X_{t_s}-X_{t_i}}+(X_{t_s}-X_{t_i})\frac{\varepsilon}{t_s-t_i}\,g^{X_{t_s}-X_{t_i}-1}+\ldots\right]=$$

$$=g^{X_{t_s}-X_{t_r}}+\varepsilon\left(\frac{X_{t_s}-X_{t_i}}{t_s-t_i}-\frac{X_{t_i}-X_{t_r}}{t_i-t_r}\right)g^{X_{t_s}-X_{t_r}-1}+O(\varepsilon)$$

El paréntesis es positivo ya que

$$\frac{X_{t_s}(t_i-t_r)+X_{t_r}(t_s-t_i)}{t_s-t_r}=\overline{X}_{t_i}>X_{t_i}$$

Este resultado indica que eligiendo ε suficientemente pequeño para que el signo de $O(\varepsilon)$ no influya, cosa siempre posible, la función de verosimilitud es mayor en la nueva poligonal que incluye como vértice, donde se deduce que la poligonal primera no es una estimación por "máxima verosimilitud" en contra del supuesto. Así, pues, debe verificarse que $X_{t_i} \leqslant X_{t_i'}$ por lo tanto, de aquí surge la regla para la determinación de los vértices de la poligonal estimada. En la figura 3 aparece con línea de puntos la estimación errónea y con trazo continuo, la verdadera.

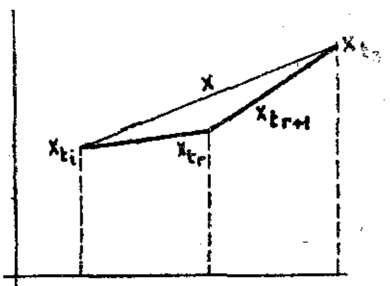

Fig 3

Nos hemos referido hasta ahora al proceso creciente *cóncavo*. Los mismos razonamientos nos sirven para los procesos *convexos*.

En éstos, al ser $f(t)$ decreciente, lo será $g(t)$ y, por lo tanto, el problema consiste en determinar $g(t)$ de tal forma, que la función de verosimilitud de la muestra tome el valor máximo con la condición de monotonía decreciente, es decir,

$$\text{máx } L = g(t_1)^{x_{t_1} - x_{t_0}} \cdot g(t_2)^{x_{t_2} - x_{t_1}} \ldots g(t_n)^{x_{t_n} - x_{t_{n-1}}}$$

con las condiciones

$$\Sigma g(t_i)\ (t_i - t_{i-1}) = 1$$

$$g(t_0) \geqslant g(t_1) \geqslant \ldots \geqslant g(t_n)$$

Procediendo de forma análoga a como se hizo para el proceso cóncavo, tendremos,

$$g(t_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots = g(t_{r_1}) = \phi_1$$

$$g(t_{r_1+1}) = \ldots\ldots\ldots = g(t_{r_2}) = \phi_2$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$g(t_{r_s+1}) = \ldots\ldots\ldots = g(t_n) = \phi_{s+1}$$

$$L = \phi_1^{X_{t_{r_1}} - X_{t_0}} \cdot \phi_2^{X_{t_{r_2}} - X_{t_{r_1}}} \ldots\ldots\ldots \phi_{s+1}^{X_{t_n} - X_{t_{r_s}}}$$

Los valores de $\phi(t)$ que hacen máxima la función

$$\Phi = (X_{t_{r_1}} - X_{t_0}) \log \phi_1 + \ldots\ldots\ldots + (X_{t_n} - X_{t_{r_s}}) \log \phi_{s+1} -$$

$$- \lambda [\phi_1(t_{r_1} - t_0) + \ldots\ldots\ldots + \phi_{s+1}(t_n - t_{r_s}) - 1]$$

serán

$$\phi_1 = \frac{1}{X_{t_n} - X_{t_0}} \cdot \frac{X_{t_{r_1}} - X_{t_0}}{t_{r_1} - t_0}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{X_{t_n} - X_{t_0}} \cdot \frac{X_{t_{r_2}} - X_{t_{r_1}}}{t_{r_2} - t_{r_1}}$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\phi_{s+1} = \frac{1}{X_{t_n} - X_{t_0}} \cdot \frac{X_{t_n} - X_{t_{r_s}}}{t_n - t_{r_s}}$$

puesto que

$$\phi_1 > \phi_2 > \ldots\ldots\ldots > \phi_{s+1}$$

Se tratará de una poligonal convexa en el plano cartesiano

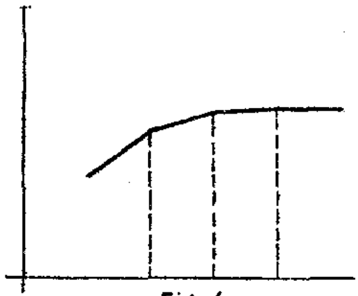

Fig 4

La estimación de $E(X_t)$, $t_{r_{i-1}} < t < t_{r_i}$ será entonces

$$\overline{X}_t = X_{t_0} + \frac{X_{t_n} - X_{t_0}}{X_{t_n} - X_{t_0}} \left[\frac{X_{t_{r_1}} - X_{t_0}}{t_{r_1} - t_0} (t_{r_1} - t_0) + \ldots\ldots\ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{X_{t_{r_0}} - X_{t_{r_{i-1}}}}{t_{r_i} - t_{r_{i-1}}} (t - t_{r_{i-1}}) \right]$$

Lo que indica que, como antes, el valor estimado coincide con el muestral en los vértices, y en otro caso está en el lado correspondiente de la poligonal. También aquí puede demostrarse que el hecho de que la poligonal sea una estimación por máxima verosimilitud, lleva consigo, en este caso, que el valor estimado no puede ser menor que el muestral, es decir, $\overline{X}_t \geqslant X_t$ lo que conduce a la determinación de los vértices de la poligonal estimada.

En la figura 5 aparecerá con línea de trazo continuo la estimación verdadera, y con trazo de puntos, la errónea.

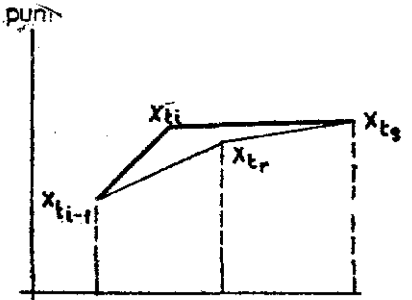

Fig 5

Hasta aquí nos hemos referido a procesos con una concavidad o convexidad permanente, es decir, cuando es constante el signo de $f'(t)$, y, por lo tanto, cuando no cambia el sentido de la monotonía de $f(t)$.

Supongamos que en tn el proceso pasa de cóncavo o convexo (el caso contrario se trata de forma totalmente análoga). Tendremos entonces:

$$g(t_0) \leqslant g(t_1) \leqslant \ldots\ldots \leqslant g(t_{h-1}) \leqslant g(t_h) \geqslant g(t_{h+1}) \geqslant \ldots\ldots \geqslant g(t_n)$$

Mediante el procedimiento anterior, determinaremos los valores de $g(t)$ suponiendo que el proceso es permanentemente cóncavo, obteniendo

$$g^*(t_0) \leqslant g^*(t_1) \leqslant \ldots \leqslant g^*(t_{h-1}) \leqslant g^*(t_h) \leqslant g^*(t_{h+1}) \leqslant \ldots \leqslant g^*(t_n)$$

Consideramos ahora la función de verosimilitud

$$L = g^*(t_h)^{X_{t_h} - X_{t_{h-1}}} \cdot g(t_{h-1})^{X_{t_{h+1}} - X_{t_h}} \ldots\ldots\ldots g(t_n)^{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}$$

y las condiciones

$$g^*(t_h) \geqslant g(t_{h+1}) \geqslant \ldots\ldots\ldots \geqslant g(t_n)$$

$$\int_{t_h}^{\infty} g(u)du = 1 - \int_{t_0}^{t_h} g^*(u)du$$

es decir,

$$\sum_{i=h}^{n} g(t_i)(t_i - t_{i-1}) = 1 - \frac{1}{X_{t_n} - X_{t_0}} (X_{t_h} - X_{t_0}) = \frac{X_{t_n} - X_{t_h}}{X_{t_n} - X_{t_0}}$$

En la figura 6 aparece la poligonal estimada

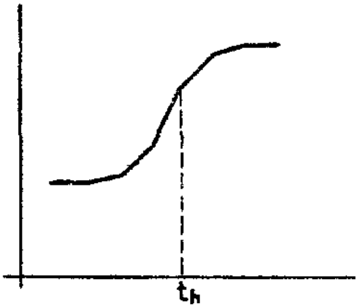

Fig 6

Hemos supuesto que t_h es conocido, en el caso en que así no fuera, habrá que estimarle. Para ello repararemos en que el cambio de concavidad a convexidad en t_h exige que $\Delta^2 X_{t_{h-1}} > 0$ $\Delta^2 X_{t_{h+1}} < 0$.

Por lo tanto, bastará con calcular para los diferentes valores h el signo de las expresiones

$$\Delta^2 X_{t_{h+1}} = X_{t_{h+3}} - 2X_{t_{h+2}} + X_{t_{h+1}}$$

$$\Delta^2 X_{t_{h-1}} = X_{t_{h+1}} - 2X_{t_h} + X_{t_{h-1}}$$

En el caso en que la primera sea negativa y la segunda positiva tendremos que en t_h el proceso pasa de cóncavo a convexo, en el caso contrario, de convexo a cóncavo.

b) *Procesos decrecientes.*

Vamos a ocuparnos ahora de los procesos monótonos decrecientes, es decir, lo que se caracteriza por las siguientes propiedades

$$\Delta X_t \leqslant 0$$

$$E(X_t) = X_{t_0} - F(t) = X_{t_0} - (X_{t_n} - X_{t_0})G(t)$$

En este caso la diferencia $X_{t_h} - X_{t_{h+1}}$ representa el número de elementos que han salido del sistema en el intervalo de tiempo (t_h, t_{h_1}).

Razonaremos de forma análoga a como lo hemos hecho en el caso de los procesos crecientes.

$$g(t_1) = g(t_2) = \dots\dots\dots\dots = g(t_{r_1}) = \phi_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g(t_{r_s+1}) = g(t_{r_s+2}) = \dots\dots\dots = g(t_n) = \phi_{s+1}$$

La función de verosimilitud será

$$L = \phi_1^{X_{t_0} - X_{t_{r_1}}} \cdot \phi_2^{X_{t_{r_1}} - X_{t_{r_2}}} \dots\dots\dots \cdot \phi_{s+1}^{X_{t_{r_s}} - X_{t_n}}$$

La estimación se hará maximinando

$$\Phi = (X_{t_0} - X_{t_{r_1}}) \log \phi_1 + \dots + (X_{t_{r_s}} - X_{t_n}) \log \phi_{s+1} -$$

$$- \lambda [\phi_1(t_{r_1} - t_0) + \phi_2(t_{r_2} - t_{r_1}) + \dots + \phi_{s+1}(t_n - t_{r_s})]$$

con la condición

$$\phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{s+1}$$

si el proceso es cóncavo, o cuando el proceso sea convexo.

$$\phi_1 > \phi_2 > \dots > \phi_{x+1}$$

El máximo de Φ se cumple para los valores:

$$\phi_1 = \frac{1}{X_{t_0} - X_{t_n}} \cdot \frac{X_{t_0} - X_{t_r}}{t_{r_1} - t_0}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\phi_{s+1} = \frac{1}{X_{t_0} - X_{t_n}} \cdot \frac{X_{t_r} - X_{t_n}}{t_n - t_{r_s}}$$

En el plano cartesiano X_t, t tendríamos una poligonal, cóncava o convexa, según las condiciones impuestas (figs. 7 y 8).

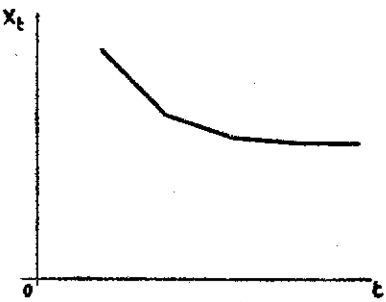

Fig 7

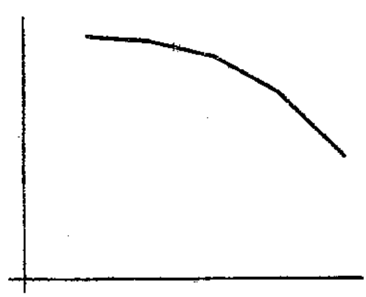

Fig 8

La estimación de $E(X_t)$ será, por lo tanto,

$$\overline{X}_t = X_{t_0} - \frac{X_{t_0} - X_{t_n}}{X_{t_0} - X_{t_n}} \left[\frac{X_{t_0} - X_{t_{r_1}}}{t_{r_1} - t_0} (t_{r_1} - t_0) + \dots\dots\dots + \right.$$

$$\left. + \frac{X_{t_{i-1}} - X_{t_i}}{t_i - t_{i-1}} (t - t_{i-1}) \right] = X_{t_{i-1}} + \frac{X_{t_{0-1}} - X_{t_i}}{t_i - t_{i-1}} (t - t_{i-1})$$

que nos indica que si t corresponde a un vértice el valor estimado es el mismo valor muestral en caso contrario, el valor estimado está en un lado de la poligonal.

Los resultados, como era de esperar, son análogos a los obtenidos en el caso de que el proceso sea creciente.

También cabe aquí suponer que el proceso decreciente sea mixto, es decir, cóncavo en un intervalo de tiempo y convexo en otro, siendo la solución análoga también a la obtenida para el proceso creciente.

En resumen, la estimación de los procesos monótonos vendrá dada por una poligonal cuyos vértices son (t_0, X_{t0}) $(t_{r1}, X_{t_{r_1}})$ ..., (t_n, X_{tn}) y, por lo tanto, de ecuación,

$$|t - t_0| + a_1 |t - t_{r1}| + \dots + a_{s-1} |t - t_{r_{s-1}}| - (aX_t + bt + c) = 0$$

en la que las a_i, a, b, c, vienen determinadas por las coordenadas de los vértices.

La estimación de X_t será, pues,

$$\overline{X}_t = \frac{1}{a} \left[|t - t_0| + a_1 |t - t_{r1}| + \dots + a_{s-1} |t - t_{r_{i-1}}| - bt - c \right]$$

BIBLIOGRAFIA

DOOB: *Stochastic Processes.*

BARTHELES: *Introduction of sticharts processes.*

SRENANDER: *Od the theory of mortality mesurement.*