El Seguro mixto en función de las operaciones a término cierto

Por **D. José Antonio Estrugo Estrugo,**

Catedrático de Matemáticas Generales y Comerciales en la Escuela Central Superior de Comercio.

Una de las aplicaciones más notables de nuestra "sucesión financiera" (*) ha sido la ayuda prestada a la resolución del problema fundamental que nos proponemos resolver en este trabajo, explicándonos en forma concluyente la íntima conexión y unidad de las leyes del movimiento financiero, a las que se ajusta totalmente la citada sucesión.

En clásica matemática actuarial, el Seguro mixto es la yuxtaposición del Seguro temporal para caso de muerte y el de capital diferido; nuestro punto de vista es considerarlo en función de las cuotas constitutivas de un capital a término cierto y el Seguro temporal para caso de muerte a primas naturales sobre el capital pendiente de formación, de manera que las cuotas de capitalización sean variables según la ley que le impriman las dichas primas naturales.

La prima del Seguro mixto, considerado éste en función de las operaciones a término cierto, ha de ser suficiente en un año cualquiera:

(*) Véase nuestro trabajo "La sucesión financiera y sus aplicaciones a los préstamos y empréstitos", que recoge el número anterior de estos ANALES. En él llegamos a establecer que, dada una sucesión cuya ley de formación es: $y_{k+1} = y_k A_k + B_k$ donde A_k y B_k son dos funciones cualesquiera de k, un término cualquiera

$$y_{k+1} = \frac{y_{n+1}}{\overset{n}{\underset{k+1}{\pi}} A_k} + \overset{k}{\underset{1}{\pi}} A_k \sum_{k+1}^{n} \frac{-B_k}{\overset{k+1}{\underset{1}{\pi}} A_k}$$

1.º Para destinar una cantidad anual variable a constituir el capital unidad del término de los n años del Seguro; y

2.º Para cubrir el riesgo, caso de muerte del asegurado ese año. Este riesgo será, evidentemente, el capital pendiente de formación.

Es decir, siguiendo la "notation internationale" y denominando

α_k, a la anualidad correspondiente al año k, del seguro, que supondremos constante es igual a α.

c_{k+1} la cantidad constituída por el asegurado al comienzo del año $\overline{k+1}$ (instante anterior al pago de la $\overline{k+1}$ anualidad; por consiguiente, $c_1 = 0$ y $c_{n+1} = 1$), podemos escribir supuesta la distribución uniforme de fallecidos dentro del año:

$$\alpha_k = c_{k+1}\, v - c_k + [1 - c_{k+1}\, v^{\frac{1}{2}}]\, v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+k-1}$$

de donde,

$$\alpha = c_{k+1}\, v(1 - q_{x+k-1}) - c_k + v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+k-1} \quad ,, \quad \alpha = c_{k+1}\, v p_{x+k-1} - c_k + v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+k-1}$$

y de aquí:

$$c_{k+1} = c_k \frac{1}{v p_{x+k-1}} - \frac{v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+k-1} - \alpha}{v p_{x+k-1}}; \qquad [1]$$

que forma sucesión financiera de razón acumulativa $A_k = \dfrac{1}{v p_{x+k-1}}$ y aumentativa: $B_k = -\dfrac{v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+k-1} - \alpha}{v p_{x+k-1}}$; por consiguiente,

$$c_{k+1} = \frac{1}{\prod\limits_{k+1}^{n} \dfrac{1}{v p_{x+k-1}}} + \prod_{1}^{k} \frac{1}{v p_{x+k-1}} \sum_{k+1}^{n} \frac{\dfrac{v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+k-1} - \alpha}{v p_{x+k-1}}}{\prod\limits_{1}^{k} \dfrac{1}{v p_{x+k-1}}} \qquad [2]$$

y teniendo en cuenta que $\prod\limits_{k+1}^{n} v p_{x+k-1} = v^{n-k}\, {}_{n-k}p_{x+k}$; $\prod\limits_{1}^{k} v p_{x+k-1} = v^{k}\, {}_{k}p_{x}$

y que $\dfrac{\prod\limits_{1}^{k} v p_{x+k-1}}{v p_{x+k-1}} = \prod\limits_{1}^{k-1} v p_{x+k-1} = v^{k-1}\, {}_{k-1}p_x$, se tendrá:

$$c_{k+1} = v^{n-k}\, {}_{n-k}p_{x+k} + \frac{1}{v^k\, {}_k p_x} \sum_{k+1}^{n} (v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+k-1} - \alpha)\, v^{k-1}\, {}_{k-1}p_x \,.$$

Sustituyendo las q en función de las p y observando que:

$v^{k-1}\,p_{x+k-1}\cdot{}_{k-1}p_x = v^{k-1}\cdot\frac{l_{x+k}}{l_{x+k-1}}\cdot\frac{l_{x+k-1}}{l_x} = v^{k-1}_{k}\,p_x$, podemos escribir:

$$c_{k+1} = v^{n-k}_{n-k}\,p_{x+k} + \frac{v^{\frac{1}{2}} - \alpha}{v^k_k\,p_x}\sum_{k+1}^{n} v^{k-1}_{k-1}\,p_x - \frac{v^{\frac{1}{2}}}{v^k_k\,p_x}\sum_{k+1}^{n} v^{k-1}_{k}\,p_x \qquad [3]$$

Desarrollando los sumatorios:

$$c_{k+1} = v^{n-k}_{n-k}\,p_{x+k} + \frac{v^{\frac{1}{2}} - \alpha}{v^k_k\,p_x}\left[v^k_k\,p_x + v^{k+1}_{k+1}\,p_x + \cdots + v^{n-1}_{n-1}\,p_x\right] -$$

$$- \frac{v^{-\frac{1}{2}}}{v^k_k\,p_x}\left[v^{k+1}_{k+1}\,p_x + v^{k+2}_{k+2}\,p_x + \cdots + v^n_n\,p_x\right]$$

y efectuando los productos indicados:

$$c_{k+1} = v^{n-k}_{n-k}\,p_{x+k} + \left[v^{\frac{1}{2}} - \alpha\right]\left[1 + v\,p_{x+k} + v^2_2\,p_{x+k} + \cdots + v^{n-k-1}_{n-k-1}\,p_{x+k}\right] -$$

$$- v^{-\frac{1}{2}}\left[v\,p_{x+k} + v^2_2\,p_{x+k} + \cdots + v^{n+k}_{n+k}\,p_{x+k}\right]$$

o lo que es lo mismo:

$$c_{k+1} = v^{n-k}_{n-k}\,p_{x+k} + v^{\frac{1}{2}}\,a_{x+k\,\overline{n-k|}} - \alpha\,a_{x+k\,\overline{n-k|}} - v^{-\frac{1}{2}}\,a_{x+k\,\overline{n-k|}} =$$

$$= v^{\frac{1}{2}}\left[a_{x+k\,\overline{n-k|}} - (1+i)\,a_{x+k\,\overline{n-k|}}\right] + v^{n-k}_{n-k}\,p_x - \alpha\,.\,a_{x+k\,\overline{n-k|}}$$

$$= v^{\frac{1}{2}}\left[1 + a_{x+k\,\overline{n-k-1|}} - a_{x+k\,\overline{n-k|}} - i\,a_{x+k\,\overline{n-k|}}\right] + v^{n-k}_{n-k}\,p_x + \alpha\,a_{x+k\,\overline{n-k|}}$$

$$= v^{\frac{1}{2}}\left[1 - v^{n-k}_{n-k}\,p_{x+k} - i\,a_{x+k\,\overline{n-k|}}\right] + v^{n-k}_{n-k}\,p_x - \alpha\,a_{x+k\,\overline{n-k|}} \qquad [4]$$

Como para $k = 0$, $C_1 = 0$, dando aquel valor en [4] y despejando α, se tendrá:

$$\alpha = \frac{v^{\frac{1}{2}}\left[1 - v^n_n\,p_x - i\,a_{x\,\overline{n|}}\right] + v^n_n\,p_x}{a_{x\,\overline{n|}}} = p_{x\,\overline{n|}} \qquad [5]$$

que no es otro valor que la prima pura del Seguro mixto.

Sustituyendo este valor en [4], obtenemos:

$$c_{k+1} = v^{\frac{1}{2}} \left[1 - v_{n-k}^{n-k} p_{x+k} - i\, a_{x+k\,\overline{n-k|}} \right] + v_{n-k}^{n-k} p_x - p_{x\,\overline{n|}}\, a_{x+k\,\overline{n-k|}}$$

$$= A_{x+k\,\overline{n-k|}} \quad p_{x\,\overline{n|}}\, a_{x+k\,\overline{n-k|}} = k\, V_{x\,\overline{n|}}\,; \qquad [6]$$

es decir, que la cantidad constituída al comienzo del año k + 1 del Seguro, para la formación del capital unidad, coincide exactamente con la denominada clásicamente "reserva matemática".

He aquí el desarrollo de un estado de situación de un Seguro mixto considerado en función de las operaciones a término cierto, sobre una cabeza de edad inicial (x).

Año	Anualidad (prima)	Cantidad destinada cada año a la constitución del capital unidad	Cantidad destinada a cubrir el riesgo	Cantidad constituída al final de cada año (Reserva)	Cantidad pendiente de constituir al final de cada año (Riesgo)
1	α	$c_z\, v$	$(1 - c_2 v^{\frac{1}{2}})\, v^{\frac{1}{2}}\, q_x$	c_2	$1 - c_2$
2	»	$c_3\, v - c_2$	$(1 - c_3 v^{\frac{1}{2}})\, v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+1}$	c_3	$1 - c_3$
3	»	$c_4\, v - c_3$	$(1 - c_4 v^{\frac{1}{2}})\, v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+2}$	c_4	$1 - c_4$
....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....
n	α	$c_{n+1}\, v - c_n = v - c_n$	$(1 - v^{\frac{1}{2}})\, v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+n-1}$	$c_{n+1} = 1$	$1 - c_{n+1} = 0$

Como puede observarse, basta para completarlo calcular la anualidad y seguir un método recurrente cualquiera para obtener las cantidades constituídas en cada año.

Es interesante hacer notar las analogías que tiene con un cuadro de amortización o constitución de capital.

Puede ser generalizado el procedimiento para otras modalidades de Seguro, siendo ya fácil poderlas establecer. Así, por ejemplo, si extendemos el sumatorio de k + 1 a ∞, se obtendrá la fórmula del Seguro vida entera por primas vitalicias.

La fórmula general de la anualidad para la modalidad término fijo, es la siguiente:

$$a_k = c_{k+1}\, v - c_k + \left[v^{n-k+1} - c_{k+1}\, v \right] q_{x+k-}$$

fácil de deducir, ya que, caso de fallecimiento del asegurado dentro del k-ésimo año del Seguro, el capital a depositar en este caso por la Compañía no es la unidad como en el Seguro mixto, sino v^{n-k+1}.

Siguiendo idéntico proceso al de antes con [7], llegaríamos a las fórmulas clásicas de este Seguro.

Igualmente, la expresión [7] es independiente del momento en que fallezca el asegurado dentro del año, puesto que el depósito se efectuará a final del mismo.

Un ejemplo curioso de aplicación de nuestra idea fundamental resulta al considerar desde el punto de vista que nos hemos propuesto al Seguro de capital diferido, sin reembolso.

La prima k-ésima del Seguro diferido la podemos considerar formada por:

a) Una cantidad destinada a constituir el capital unidad al final del n-ésimo año.

Y teniendo en cuenta que caso de fallecer el asegurado y no percibir cantidad alguna, habiendo, sin embargo, constituído a mitad de ese año $c_{k+1}\, v^{\frac{1}{2}}$.

b) Un término sustractivo equivalente al valor actual al comienzo del año de la cantidad constituída, por la probabilidad de que ocurra la muerte del asegurado. Es decir:

$$\alpha_k = c_{k+1}\, v - c_k - c_{k+1}\, v^{\frac{1}{2}}\, v^{\frac{1}{2}}\, q_{x+k-1}$$

o bien, supuesta la anualidad constante:

$$\begin{aligned} \alpha &= c_{k+1}\, v - c_k - c_{k+1}\, v\, q_{x+k-1} \\ &= c_{k+1}\, v\,(1 - q_{x+k-1}) - c_k = c_{k+1}\, v\, p_{x+k-1} - c_k \end{aligned}$$

de donde fácilmente se deduce:

$$c_{k+1} = c_k \frac{1}{v\, p_{x+k-1}} + \frac{\alpha}{v\, p_{x+k-1}}$$

y de aquí:

$$c_{k+1} = \frac{1}{\prod\limits_{k+1}^{n} \dfrac{1}{v\, p_{x+k-1}}} - \prod_{1}^{k} \frac{1}{v\, p_{x+k-1}} \sum_{k+1}^{n} \frac{\dfrac{\alpha}{v\, p_{x+k-1}}}{\prod\limits_{1}^{k} \dfrac{1}{v\, p_{x+k-1}}}$$

y efectuando idénticas transformaciones que en las fórmulas [2] para llegar a [4], se tiene:

$$c_{k+1} = v_{n-k}^{n-k}\, p_{x+k} - \frac{\alpha}{v_k^k\, p_x} \sum_{k+1}^{n} v_{k-1}^{k-1}\, p_x = v_{n+k}^{n+k}\, p_x - \frac{\alpha}{v_k^k\, p_x} \left[v_k^k\, p_x + \cdots v_{n-1}^{n-1}\, p_x \right]$$

$$= v_{n\ k}^{n-k}\, p_x - \alpha\, a_{x+k\, \overline{n-k|}} \, . \qquad [8]$$

Haciendo ahora $k = 0$ y sustituyendo este valor en [8], se tiene, despejando α,

$$\alpha = \frac{v_n^n\, p_x}{a_{x\, \overline{n|}}} = \frac{{}_n E_x}{a_{x\, \overline{n|}}}$$

que es la *fórmula clásica.*

Lo indicado (*) creemos es suficiente para dar una idea de la utilidad de la sucesión financiera a los problemas de la matemática financiera en su aspecto elemental y superior; mas su campo creemos es aún más extenso, puesto que hemos efectuado algunos trabajos de investigación que permiten aplicarla a varias teorías de matemática pura, y deducir su posible utilización en el ajuste previo para la formación de las tablas de mortalidad, cuyos resultados expondremos en otra ocasión.

(*) Nos referimos también a nuestro anterior trabajo "La sucesión financiera y sus aplicaciones a los préstamos y empréstitos", de la que el presente es continuación.