Ajuste racional de la curva de distribución de los ingresos en una colectividad profesional

(Tesis presentada para la colación del Grado de Actuario.)

Por **Ismael Warleta Fernández,**
del Servicio Actuarial de "La Equitativa-Vida (Fundación Rosillo)".

Recientemente el Sr. Puig Adam ha publicado unos trabajos (*), en los que aborda el problema de la distribución por edades de los individuos en los Cuerpos y Colectividades profesionales, introduciendo como resultado de sus observaciones en ciertos Escalafones, la función que denomina *de dispersión de ingresos.*

El objeto de esta Memoria es el estudio de dicha función a los efectos de su aplicación práctica a las cuestiones actuariales, sugerida por los trabajos de curso de la asignatura "Teoría matemática de los Seguros".

1. Recogiendo y concretando la idea insinuada en los trabajos citados, puede estudiarse la dispersión de ingresos observando, en vez de la colectividad profesional ya constituída, el colectivo formado por los posibles futuros miembros del Escalafón.

En este supuesto, puede afirmarse que la probabilidad de ingreso aumenta proporcionadamente al incremento de preparación, el cual puede vincularse al crecimiento de la variable tiempo como causa primordial, es decir, que el número de ingresados es proporcional *a la edad,*

(*) "Curvas teóricas de distribución por edades de los individuos de una colectividad profesional" *(Anales de la Asociación Española para el progreso de las Ciencias,* año VII, número 1, 1942, pág. 5) y "Ensayo a una teoría matemática de escalafones cerrados y sus aplicaciones a problemas de Hacienda y Previsión" *(Revista Matemática Hispano-Americana,* 4.ª serie, tomo I, número 2, 1941, página 82).

dentro de los límites entre los que se producen los ingresos. Las restantes causas que deciden el ingreso escapan a toda posibilidad de individualización, y solamente puede decirse que, en su conjunto, son determinantes de un fenómeno regido por la ley de azar. Pudiera examinarse separadamente la supervivencia, pero es preferible incluirla entre la serie de causas componentes de la ley de azar, ya que la función de supervivencia experimenta alteraciones poco sensibles para las edades a que suelen producirse los ingresos en los distintos Cuerpos y, por otra parte, el hecho de morir antes de poder ingresar no es sino una causa secundaria entre las que limitan o condicionan de alguna forma el ingreso.

Por consiguiente, la ley que representa la dispersión de ingresos puede expresarse en la forma:

$$n(x) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, x\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

2. Supuesta la ley anterior, debe estudiarse el modo de efectuar el ajuste de los datos suministrados por la experiencia.

A este efecto se tendrá en cuenta que se opera en régimen medio teórico, es decir, suponiendo que las vacantes son provistas inmediatamente a su producción.

Y debe observarse que, en casi todos los casos, los datos que pueden servir de base para los cálculos suelen ser los correspondientes a la dispersión de ingresos de los individuos *en activo* en un momento dado.

Por esto debe tenerse en cuenta que si se supone que n(x) son los ingresados a la edad x en cada año, los supervivientes activos serán:

$$n_a(x) = n(x) \sum_{\zeta=x}^{\zeta=J} \frac{l_\zeta}{l_x} = \frac{n(x)}{l_x} \sum_{x}^{J} l_\zeta$$

siendo J la edad de jubilación.

Luego los valores empíricos de la serie de ingresados en cada año $\overline{n(x}$ se obtendrán de la serie observada de individuos *en activo* clasificados por edades de ingreso $\overline{n_a(x)}$, sin más que hacer:

$$\overline{n(x)} = \frac{\overline{n_a(x)} \cdot l_x}{\sum_{x}^{J} l_\zeta}$$

Y n(x) serán los valores que se trata de ajustar, según la ley anteriormente deducida.

3. Evidentemente, supuesto que la ley dada corresponda absolutamente a la realidad, puede utilizarse para este ajuste un procedimiento análogo al empleado para el ajuste de funciones de supervivencia, que permite encontrar las constantes de las expresiones de algunas leyes biométricas.

En efecto, tomando logaritmos en la expresión de n(x), se obtiene:

$$l\,n(x) = l\,\frac{K}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} + lx + \frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}$$

que puede ponerse:

$$l\,n(x) = l\,\frac{K}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} + lx + \left(\frac{-x^2}{2\sigma^2} + \frac{2ax}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{2\sigma^2}\right)$$

Bastaría, pues, formar la serie de los logaritmos neperianos de los valores empíricos $\overline{n(x)}$ y descomponerla en tres sumas parciales, obteniendo:

$$S_1 = \sum_1^t l\,\overline{n(x)} = t\,l\,\frac{K}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} + l\,\underline{|t} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^t x^2 + \frac{a}{\sigma^2}\sum_1^t x - t\,\frac{a^2}{2\sigma^2}$$

$$S_2 = \sum_{t+1}^{2t} l\,\overline{n(x)} = t\,l\,\frac{K}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} + l\,\frac{\underline{|2t}}{\underline{|t}} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t+1}^{2t} x^2 + \frac{a}{\sigma^2}\sum_{t+1}^{2t} x - t\,\frac{a^2}{2\sigma^2}$$

$$S_3 = \sum_{2t+1}^{3t} l\,\overline{n(x)} = t\,l\,\frac{K}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} + l\,\frac{\underline{|3t}}{\underline{|2t}} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{2t+1}^{3t} x^2 + \frac{a}{\sigma_2}\sum_{2t+1}^{3t} x - t\,\frac{a^2}{2\sigma^2}$$

Y formando las diferencias:

$$\Delta S_1 = l\,\frac{\underline{|2t}}{(\underline{|t})^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{t+1}^{2t} x^2 - \sum_1^t x^2\right] + \frac{a}{\sigma^2}\left[\sum_{t+1}^{2t} x - \sum_1^t x\right]$$

$$\Delta S_2 = l\,\frac{\underline{|3t}\,\underline{|t}}{(\underline{|2t})^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{2t+1}^{3t} x^2 - \sum_{t+1}^{2t} x^2\right] + \frac{a}{\sigma^2}\left[\sum_{2t+1}^{3t} x - \sum_{t+1}^{2t} x\right]$$

que pueden ponerse, por figurar en el último término sumas de progresiones aritméticas:

$$\Delta S_1 = l\,\frac{\underline{|2t}}{(\underline{|t})^2} - \frac{1}{2\,\sigma^2}\left[\sum_{t+1}^{2t} x^2 - \sum_{1}^{t} x^2\right] + \frac{a}{\sigma^2}\left(\frac{3t^2+t}{2} - \frac{t^2+t}{2}\right) =$$

$$= l\,\frac{\underline{|2t}}{(\underline{|t})^2} - \frac{1}{2\,\sigma^2}\left[\sum_{t+1}^{2t} x^2 - \sum_{1}^{t} x^2\right] + \frac{a}{\sigma^2}\,t^2$$

$$\Delta S_2 = l\,\frac{\underline{|3t}\,\underline{|t}}{(\underline{|2t})^2} - \frac{1}{2\,\sigma^2}\left[\sum_{2t+1}^{3t} x^2 - \sum_{t+1}^{2t} x^2\right] + \frac{a}{\sigma^2}\left(\frac{5\,t^2+t}{2} - \frac{3t^2+t}{2}\right)$$

$$= l\,\frac{\underline{|3t}\,\underline{|t}}{(\underline{|2t})^2} - \frac{1}{2\,\sigma^2}\left[\sum_{2t+1}^{3t} x^2 - \sum_{t+1}^{2t} x^2\right] + \frac{a}{\sigma^2}\,t^2$$

Y finalmente:

$$\Delta^2 S_1 = l\,\frac{\underline{|3t}\,(\underline{|t})^3}{(\underline{|2t})^3} - \frac{1}{2\,\sigma^2}\left[\sum_{2t+1}^{3t} x^2 - 2\sum_{t+1}^{2t} x^2 + \sum_{1}^{t} x^2\right]$$

que nos permite determinar σ^2. Llevando este valor a ΔS_1 o ΔS_2 se puede despejar *a;* y, finalmente, *K* se deduciría de una de las ecuaciones en que intervienen las sumas parciales *S.* Con esto quedaría definida la función n(x).

Ahora bien, este método, aplicable siempre que se considere la función de dispersión representada exactamente por la ley enunciada, encierra la grave dificultad de lo laborioso de su aplicación, debido especialmente a la forma de la ley n(x), en la que figura una función exponencial, lo que hace difícil encontrar los valores ajustados, aun conocidos los parámetros, ya que han de utilizarse logaritmos neperianos, que no es fácil encontrar tabulados para los números que pueden obtenerse aplicando el método anterior a una serie empírica, lo cual puede ser causa de errores de importancia.

4. La mencionada dificultad aconseja utilizar otro procedimiento. Teniendo en cuenta las aplicaciones, cada vez más extendidas, de las funciones ortogonales a la representación de series estadísticas, puede considerarse la función:

$$n(x) = \frac{K}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, x\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\,\sigma^2}}$$

como una primera aproximación de la función que correspondería a la verdadera ley de distribución; y se buscaría una serie de funciones, ortogonales entre sí y respecto a la dada, que permitiesen representar la supuesta ley de distribución como combinación de ellas en el espacio de Hilbert.

El problema aparece, sin embargo, cuando se pretende formar la serie de funciones ortogonales con la n(x). En efecto, para que el desarrollo sea aplicable en la práctica, es preciso que las funciones halladas sean derivadas sucesivas de una función o de diversas funciones, siendo cada una de ellas igual a la n(x), multiplicada por un polinomio de grado igual al orden de derivación correspondiente. Además, en cada caso, las derivadas de orden inferior al que figura en el desarrollo (e incluso la función primitiva), multiplicadas por polinomios de grado inferior a su orden, han de anularse en los extremos del rango o campo de validez.

En caso contrario, el desarrollo, aunque fuese posible, sería inútil a efectos de aplicación estadística; y así puede verse que las condiciones dadas se cumplen en las series usuales de Charlier (polinomios de Hermite y polinomios Q) o de Romanovsky (polinomios de Jacobi, generalizados).

Ahora bien, para la función estudiada no es posible encontrar una serie de funciones ortogonales de la forma indicada. En efecto, siguiendo un método semejante al de Charlier, serían las derivadas del primer término de la serie las que habrían de cumplir las condiciones dadas.

Pero es fácil ver que las derivadas de la función n(x), presentada como primera aproximación, son:

$$n'(x) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - x\,\frac{x-a}{\sigma^2}\right],$$

$$n''(x) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{3x-2a}{\sigma^2} + x\,\frac{(x-a)^2}{\sigma^4}\right]$$

....

y así sucesivamente. Donde no aparece la función n(x) multiplicada por polinomios enteros de grado igual al orden de la derivada.

Tampoco el método de Romanovsky, generalizado para algunos tipos de distribución distintos del normal, puede aplicarse en este caso, ya que produce desarrollos de la forma:

$$y = A_0 u_0 + A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots$$

donde las sucesivas funciones ortogonales u_k son, en general: $u_k = D^k F_k(x)$, siendo F una función de x convenientemente elegida.

Pero puede comprobarse que, no obstante su mayor amplitud de criterio, no resulta aplicable en este caso.

Concretamente para el término u_1, y teniendo en cuenta que ha de ser:

$$u_1 = \frac{K}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} x(Ax + B) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

se tendrá como función primitiva:

$$F_1 = \frac{K}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} (Ax^2 + Bx)\, dx =$$

$$= \frac{\sigma K}{\sqrt{2\pi}} \int \left(e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \frac{-x+a}{2\sigma^2} \right) \frac{Ax^2 + Bx}{-x+a} dx =$$

$$= \frac{K\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{Ax^2 + Bx}{-x+a} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} + \right.$$

$$\left. + A \int e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx - e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} D\left(\frac{(B + Aa)\,x}{-x+a} \right) \right]$$

no siendo aplicable, puesto que ha aparecido un término de la forma $\frac{K\sigma A}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$, que no se anulara en el extremo superior $+\infty$ del campo de definición de x.

Por consiguiente, es imposible efectuar en las condiciones indicadas un desarrollo en serie para la ley de dispersión de ingresos estudiada, como ya es sabido que ocurre para otras leyes estadísticas, por ejemplo, los tipos IV, V y VI de las curvas de Pearson.

5. No obstante lo dicho, puede existir una serie de valores relacionada de algún modo con la dada y que pueda ajustarse a alguno de los tipos de curvas usuales en Estadística.

Existe, en efecto, el precedente del desarrollo en serie de Bruns, para frecuencias acumuladas, aplicable a series de valores que, en una primera aproximación, pueden ajustarse por la función normal de probabilidades totales $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, a pesar de que respecto a esta función no puede constituirse una serie de funciones ortogonales convenientes. Ahora bien, en este desarrollo se emplean para los coeficientes los momentos de una serie adaptable a la ley normal, y es una integración posterior, término a término, de la serie de funciones ortogonales la que permite encontrar los valores ajustados en función de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, y de sus derivadas sucesivas.

Teniendo esto en cuenta, pueden establecerse los siguientes supuestos, considerando una representación cartesiana de la función n(x) y tomando como origen la edad mínima de ingreso:

1.° Que existe una función simétrica a la dada respecto al eje de x, es decir, una función negativa de igual valor absoluto de la estudiada, para $x > 0$.

2.° Que para los valores negativos de la variable x existe una función simétrica a la dada respecto al eje de Y.

Es decir, supuesto que n(x) sea la ley de dispersión de ingresos (figura 1), se formará la función m(x) (indicada con trazo fuerte).

En estas condiciones, integrando la curva m(x) se obtiene una nueva función s(x) (fig. 2) simétrica respecto al eje de Y y que en primera aproximación puede representarse por la ley normal.

Por consiguiente, esta función s(x) puede ajustarse por el método de Charlier, mediante una serie de funciones ortogonales, en la forma:

$$s(x) = \varphi_0(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\left(-\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)\varphi_0^{\mathrm{III}}(x) + \frac{1}{\lfloor 4}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)\varphi_0^{\mathrm{IV}}(x) + \cdots$$

donde φ_0 es la función normal *reducida* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ y los μ son los momentos calculados respecto al primer momento como origen, habiéndose tomado $\mu_0 = 1$ y $\mu_2 = 1$ como es costumbre, ya que se miden los valores de x en unidades σ de desviación «standard».

En estas condiciones, por ser s(x) simétrica respecto al eje de Y, por construcción y aun para los valores empíricos, serán nulos todos los momentos de orden impar, y quedará:

$$s(x) = \varphi_{\cdot}(x) + \frac{1}{|4} \left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right) \varphi_0^{IV}(x) + \cdots$$

Y observando ahora que, para x > 0, es n(x) = — s'(x), podrá obtenerse para los valores ajustados de la ley de dispersión de ingresos:

$$n(x) = - \varphi_0'(x) - \frac{1}{|4} \left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right) \varphi_0^{V}(x) - \cdots$$

siendo la unidad la desviación "standard" de s(x) y utilizando para los coeficientes los momentos de esta misma serie.

6. En la práctica, los cálculos se reducen así notablemente. Bastará tomar los dos primeros términos de la serie, ya que en los sucesivos intervienen momentos superiores al cuarto.

Dados los valores empíricos $\overline{n(x)}$ se formará una serie de valores $\overline{n(-x)} = \overline{n(x)}$; y los valores empíricos de $\overline{s(x)}$ serán, para x < 0, los proporcionados por las integrales finitas:

$$\overline{s(x)} = \Sigma^{x}_{-\infty} \overline{n(x)} = \sum_{-\infty}^{x-1} \overline{n(x)}$$

Para x > 0 se pondrán valores simétricos a los anteriores $\overline{s(x)} = \overline{s(-x)}$.

Como los momentos impares son nulos en esta distribución, bastará calcular $\mu_2 = \sigma^2$ y μ_4.

Hecho esto, se aplicará la fórmula:

$$n(x) = - \varphi_0'(x) - \frac{1}{|4} \left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \right) \varphi_0^{V}(x)$$

empleando las tablas de las derivadas sucesivas de la ley normal reducida y teniendo cuidado de referir los valores de la variable x a unidades σ de desviación "standard".

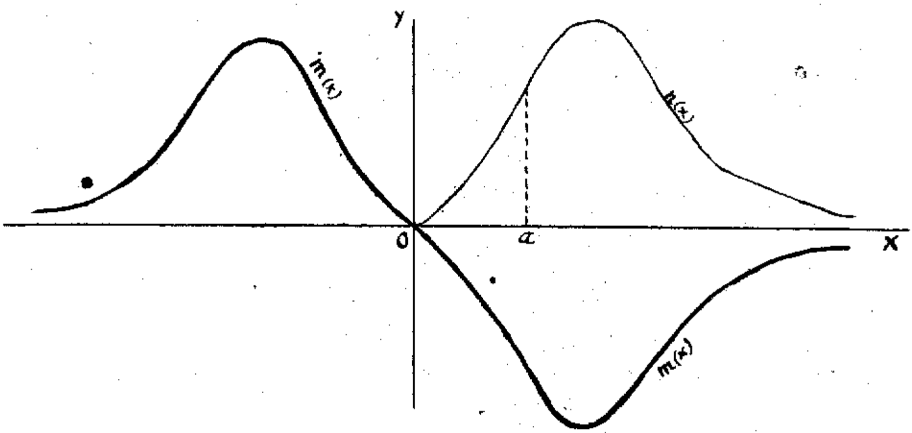

Fig. 1

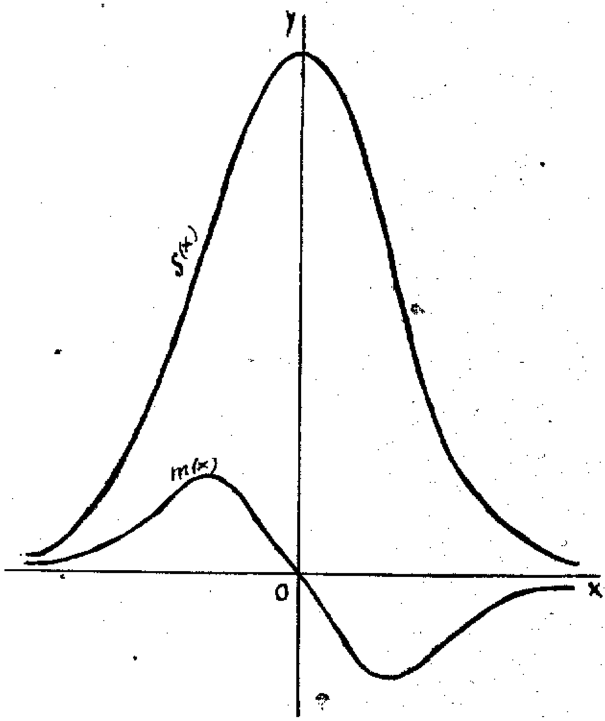

Fig. 2

APENDICE PRIMERO

Aplicación al Escalafón de Catedráticos de Escuelas de Comercio.

Como aplicación práctica de la teoría anterior se ofrecen los resultados obtenidos partiendo de la distribución por edades de ingresos de 140 Catedráticos de Escuelas de Comercio.

En el cuadro I aparece la determinación de los valores empíricos $\overline{n(x)}$ que han de ser ajustados. Se ha empleado la tabla R F para las funciones de supervivencia l_x.

CUADRO I

Edad	$\overline{n_a(x)}$	$\overline{n_a(x)}\, l_x$	$\sum_x^{69} l_\zeta$	$\overline{n(x)}$
21	1	818 471	31 368 902	0,026
22	4	3 261 236	30 550 431	0,107
23	9	7 265 439	29 737 622	0,244
24	6	4 811 556	28 930 351	0,166
25	11	8 764 646	28 128 425	0,311
26	6	4 750 680	27 331 639	0,174
27	10	7 867 130	26 539 859	0,296
28	7	5 471 046	25 753 146	0,212
29	5	3 881 840	24 971 568	0,111
30	7	5 397 525	24 195 200	0,223
31	9	6 891 210	23 424 125	0,294
32	9	6 841 827	22 658 435	0,302
33	6	4 527 636	21 898 232	0,207
34	8	5 991 096	21 143 626	0,283
35	6	4 458 216	20 394 739	0,219
36	4	2 948 156	19 651 703	0,150
37	0	....	....	......
38	7	5 071 892	18 183 780	0,279
39	5	3 590 210	17 459 224	0,206
40	5	3 556 620	16 741 182	0,212

Edad	$\overline{n_a(x)}$	$\overline{n_a(x)}\, l_x$	$\sum_{x}^{69} l_\zeta$	$\overline{n(x)}$
41	2	1 408 772	16 029 858	0,088
42	3	2 091 630	15 325 472	0,136
43	2	1 379 554	14 628 262	0,094
44	1	682 067	13 938 485	0,049
45	0	....	....	......
46	5	3 328 645	12 582 360	0,264
47	2	1 314 112	11 916 631	0,110
	140			4,763

Se aplica:

$$\overline{n(x)} = \frac{\overline{n_a(x)}\; l_x}{\sum_{x}^{69} l_\zeta}$$

En el cuadro II se dan los valores de $\overline{s(x)}$ para $x > 0$ y los productos $x^2\ \overline{s(x)}$, $x^4\ \overline{s(x)}$ que han de servir para determinar los momentos.

Para estos valores positivos es: $\overline{s(x)} = \sum_{x+1}^{+\infty} \overline{n(x)}$

CUADRO II

Edad	x	$\overline{s(x)}$	x^2	$x^2\ \overline{s(x)}$	$x^4\ \overline{s(x)}$
20	0	4,763	0	....	....
21	1	4,737	1	4,737	4,737
22	2	4,630	4	18,520	74,080
23	3	4,386	9	39,474	355,266
24	4	4,220	16	67,520	1 080,320
25	5	3,909	25	97,725	2 443,125
26	6	3,735	36	134,460	4 840,560
27	7	3,439	49	168,511	8 257,039
28	8	3,227	64	206,528	13 217,792
29	9	3,116	81	252,396	20 444,076

Edad	x	$\overline{s(x)}$	x^2	$x^2\, s(x)$	$x^4\, s(x)$
30	10	2,893	100	289,300	28 930,000
31	11	2,599	121	314,479	38 051,959
32	12	2,297	144	330,768	47 630,592
33	13	2,090	169	353,210	59 692,490
34	14	1,807	196	354,172	69 417,712
35	15	1,588	225	357,300	89 392,500
36	16	1,438	256	368,128	94 240,768
37	17	1,438	289	415,582	120 103,198
38	18	1,159	324	375,516	121 667,184
39	19	0,953	361	344,033	124 195,913
40	20	0,741	400	296,400	118 560,000
41	21	0,653	441	287,973	126 996,093
42	22	0,517	484	250,228	121 110,352
43	23	0,423	529	223,767	118 372,743
44	24	0,374	576	215,424	124 084,224
45	25	0,374	625	233,750	146 093,750
46	26	0,110	676	74,360	50 267,360
47	27	0,000	729	....	....
		61,626		6 074,261	1 640 523,823

Con estos valores pueden determinarse fácilmente las constantes. Se hará:

$$m_0 = \sum_{-27}^{+27} \overline{s(x)} = 2 \sum_{0}^{27} \overline{s(x)} - \overline{s(o)} = 118{,}469$$

$$m_2 = \sum_{-27}^{+27} \overline{s(x)}\, x^2 = 2 \sum_{0}^{27} x^2\, \overline{s(x)} = 12\ 148{,}522$$

$$m_4 = 2 \sum_{0}^{27} x^4\, \overline{s(x)} = 3\ 281\ 047{,}646$$

Y haciendo $m_0 = 1$:

$$\mu_2 = \sigma^2 = \frac{12\,148{,}522}{118{,}469} = 102{,}546$$

$$\sigma = 10{,}13 \text{ (Nueva unidad.)}$$

$$\frac{1}{\sigma} = 0{,}0987$$

$$\mu_4 = \frac{3\,281\,047{,}646}{118{,}469} = 27\,696{,}25$$

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 2{,}62754 - 3 = -\,0{,}37246$$

$$-\frac{1}{\lfloor 4}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right) = -\,\frac{-\,0{,}37246}{24} = 0{,}01552$$

Por consiguiente, resulta la función ajustada:

$$n(x) = -\,\varphi_0'(x) + 0{,}01522\,\varphi_0^{\mathrm{v}}(x)$$

El cuadro III da los valores que resultan de aplicar esta fórmula, para los valores de x medidos en unidades σ.

La última columna da los valores empleados en el ajuste gráfico que resultan de repartir la suma de los $\overline{n(x)}$ empíricos entre los n(x) teóricos, suponiendo, como suele hacerse en estos casos, que el campo de validez de la variable se limita a la extensión en que se han obtenido observaciones empíricas.

En este caso, los valores ajustados son:

$$n(x)\,\frac{\Sigma\,\overline{n(x)}}{\Sigma\,n(x)} = \frac{4{,}763}{3{,}77172}\,n(x) = 1{,}26\,n(x)$$

CUADRO III

Edad	$\frac{x}{\sigma}$	$-\varphi_0'(x)$	$0{,}01552\ \varphi_0^{V}(x)$	n (x)	Ajuste gráfico
21	0,10	0,03969	—0,00918	0,03051	0,039
22	0,20	0,07821	—0,01772	0,06049	0,077
23	0,30	0,11442	—0,02505	0,08937	0,113
24	0,39	0,14419	—0,03021	0,11398	0,144
25	0,49	0,17337	—0,03405	0,13932	0,176
26	0,59	0,19777	—0,03573	0,16204	0,205
27	0,69	0,21696	—0,03524	0,18172	0,229
28	0,79	0,23068	—0,03275	0,19793	0,250
29	0,89	0,23895	—0,02858	0,21037	0,265
30	0,99	0,24195	—0,02313	0,21882	0,276
31	1,08	0,24046	—0,01753	0,22293	0,281
32	1,18	0,23465	—0,01098	0,22367	0,282
33	1,28	0,22509	—0,00454	0,22055	0,278
34	1,38	0,21245	0,00137	0,21382	0,270
35	1,48	0,19749	0,00645	0,20394	0,257
36	1,58	0,18091	0,01048	0,19139	0,242
37	1,68	0,16343	0,01334	0,17677	0,223
38	1,78	0,14566	0,01502	0,16068	0,203
39	1,87	0,12983	0,01560	0,14543	0,184
40	1,97	0,11288	0,01533	0,12821	0,162
41	2,07	0,09692	0,01427	0,11119	0,140
42	2,17	0,08220	0,01265	0,09485	0,120
43	2,27	0,06887	0,01066	0,07953	0,101
44	2,37	0,05702	0,00851	0,06553	0,083
45	2,47	0,04666	0,00636	0,05302	0,067
46	2,57	0,03773	0,00435	0,04208	0,053
47	2,67	0,03086	0,00272	0,03358	0,043
				3,77172	4,763

En el gráfico (fig. 3) puede verse la buena aproximación obtenida con el ajuste efectuado, no obstante lo deficiente de la base estadística, debido al escaso número de miembros del Escalafón.

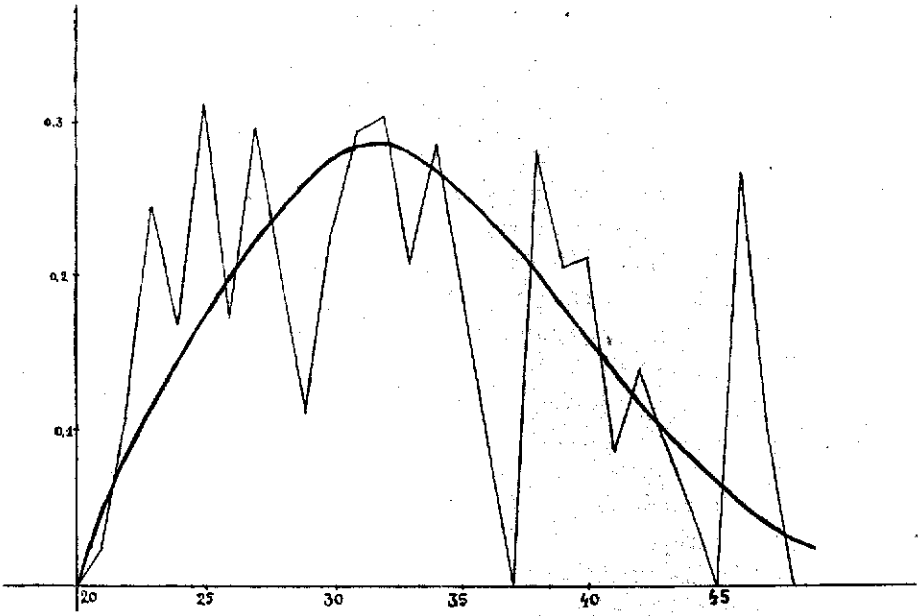

Fig. 3

APENDICE II

Tablas de $\varphi_0'(x)$ y de $\varphi_0^{v}(x)$

En la fórmula encontrada para n(x) se utilizan las derivadas primera y quinta de la función normal de probabilidad reducida

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dichas derivadas no se encuentran tabuladas hasta ahora, al menos en las obras de que pueden disponer en la actualidad nuestros Actuarios. Solamente φ_0^{v} está tabulada entre las *Tables of applied mathematics in Finance, Insurance, Statistics,* publicadas por James W. Glover, Profesor de Matemáticas y Seguros en la Universidad de Michigan, y editadas en Ann Arbor en 1930.

Esta obra contiene la función φ_0 y sus derivadas desde la segunda hasta la octava, pero no incluye la primera.

Las conocidas tablas de Charlier comprenden la función y sus derivadas tercera y cuarta, ya que las dos primeras no se emplean en su desarrollo en serie.

Ello explica la ausencia de tablas convenientes, puesto que la primera derivada φ_0' no se ha aplicado hasta ahora a los ajustes estadísticos.

Por esto se ofrecen a continuación los valores de $\varphi_0'(x)$ calculados desde x = 0 hasta x = 3 de centésima en centésima, y para 3,5, 4 y 4,5. Los valores superiores a 3 no suelen presentarse, ya que supondrían edades de ingreso excesivamente avanzadas y, en general, desviaciones muy altas.

A dichos valores se adjuntan los correspondientes de $\varphi_0^{v}(x)$ tomados de la citada tabla de Glover.

x	$\varphi_0'(x)$	$\varphi_0^{\mathrm{V}}(x)$	x	$\varphi_0'(x)$	$\varphi_0^{\mathrm{V}}(x)$
0,00	—0,00000	—0,00000	0,40	—0,14731	—1,97770
,01	—0,00399	—0,05983	,41	—0,15038	—2,00717
,02	—0,00798	—0,11963	,42	—0,15341	—2,03531
,03	—0,01196	—0,17934	,43	—0,15639	—2,06212
,04	—0,01594	—0,23892	,44	—0,15934	—2,08758
,05	—0,01992	—0,29834	,45	—0,16224	—2,11168
,06	—0,02389	—0,35754	,46	—0,16509	—2,13441
,07	—0,02786	—0,41650	,47	—0,16720	—2,15575
,08	—0,03181	—0,47517	,48	—0,17065	—2,17570
,09	—0,03576	—0,53350	,49	—0,17337	—2,19426
0,10	—0,03969	—0,59146	0,50	—0,17603	—2,21141
,11	—0,04362	—0,64901	,51	—0,17865	—2,22715
,12	—0,04753	—0,70611	,52	—0,18121	—2,24148
,13	—0,05143	—0,76272	,53	—0,18373	—2,25440
,14	—0,05531	—0,81879	,54	—0,18620	—2,26589
,15	—0,05917	—0,87429	,55	—0,18862	—2,27597
,16	—0,06302	—0,92919	,56	—0,19099	—2,28464
,17	—0,06685	—0,98345	,57	—0,19330	—2,29188
,18	—0,07065	—1,03702	,58	—0,19556	—2,29772
,19	—0,07444	—1,08987	,59	—0,19777	—2,30214
0,20	—0,07821	—1,14197	0,60	—0,19993	—2,30517
,21	—0,08195	—1,19328	,61	—0,20204	—2,30679
,22	—0,08567	—1,24377	,62	—0,20409	—2,30703
,23	—0,08935	—1,29340	,63	—0,20609	—2,30589
,24	—0,09303	—1,34214	,64	—0,20804	—2,30337
,25	—0,09667	—1,38997	,65	—0,20993	—2,29949
,26	—0,10028	—1,43684	,66	—0,21177	—2,29426
,27	—0,10386	—1,48272	,67	—0,21355	—2,28770
,28	—0,10741	—1,52760	,68	—0,21528	—2,27981
,29	—0,11093	—1,57143	,69	—0,21696	—2,27061
0,30	—0,11442	—1,61420	0,70	—0,21857	—2,26012
,31	—0,11787	—1,65587	,71	—0,22014	—2,24834
,32	—0,12129	—1,69642	,72	—0,22165	—2,23531
,33	—0,12467	—1,73582	,73	—0,22311	—2,22104
,34	—0,12802	—1,77406	,74	—0,22451	—2,20554
,35	—0,13133	—1,81110	,75	—0,22585	—2,18883
,36	—0,13461	—1,84693	,76	—0,22714	—2,17095
,37	—0,13784	—1,88152	,77	—0,22837	—2,15190
,38	—0,14104	—1,91486	,78	—0,22956	—2,13171
,39	—0,14419	—1,94692	,79	—0,23068	—2,11040

x	$\varphi_0'(x)$	$\varphi_0^{V}(x)$	x	$\varphi_0'(x)$	$\varphi_0^{V}(x)$
0,80	—0,23175	—2,08800	1,20	—0,23303	—0,62301
,81	—0,23277	—2,06454	1,21	—0,23215	—0,58098
,82	—0,23373	—2,04002	1,22	—0,23124	—0,53910
,83	—0,23463	—2,01449	1,23	—0,23030	—0,49742
,84	—0,23548	—1,98797	1,24	—0,22932	—0,45594
,85	—0,23628	—1,96048	1,25	—0,22831	—0,41471
,86	—0,23703	—1,93205	1,26	—0,22727	—0,37374
,87	—0,23772	—1,90271	1,27	—0,22619	—0,33306
,88	—0,23836	—1,87249	1,28	—0,22509	—0,29269
,89	—0,23895	—1,84141	1,29	—0,22394	—0,25266
0,90	—0,23948	—1,80951	1,30	—0,22278	—0,21300
,91	—0,23996	—1,77681	1,31	—0,22159	—0,17372
,92	—0,24039	—1,74335	1,32	—0,22036	—0,13485
,93	—0,24076	—1,70916	1,33	—0,21910	—0,09641
,94	—0,24108	—1,67426	1,34	—0,21783	—0,05842
,95	—0,24136	—1,63869	1,35	—0,21651	—0,02090
,96	—0,24157	—1,60247	1,36	—0,21518	0,01613
,97	—0,24175	—1,56565	1,37	—0,21383	0,05265
,98	—0,24187	—1,52824	1,38	—0,21245	0,08865
,99	—0,24195	—1,49029	1,39	—0,21104	0,12409
1,00	—0,24197	—1,45182	1,40	—0,20962	0,15897
1,01	—0,24194	—1,41287	1,41	—0,20817	,19328
1,02	—0,24187	—1,37347	1,42	—0,20669	,22698
1,03	—0,24175	—1,33364	1,43	—0,20520	,26008
1,04	—0,24159	—1,29343	1,44	—0,20370	,29255
1,05	—0,24137	—1,25286	1,45	—0,20217	,32439
1,06	—0,24113	—1,21197	1,46	—0,20063	,35557
1,07	—0,24081	—1,17079	1,47	—0,19907	,38609
1,08	—0,24046	—1,12934	1,48	—0,19749	,41593
1,09	—0,24007	—1,08767	1,49	—0,19589	,44509
1,10	—0,23963	—1,04580	1,50	—0,19428	0,47355
1,11	—0,23916	—1,00377	1,51	—0,19264	,50130
1,12	—0,23864	—0,96159	1,52	—0,19100	,52834
1,13	—0,23808	—0,91932	1,53	—0,18935	,55466
1,14	—0,23747	—0,87697	1,54	—0,18769	,58025
1,15	—0,23683	—0,83458	1,55	—0,18601	,60510
1,16	—0,23614	—0,79217	1,56	—0,18433	,62921
1,17	—0,23541	—0,74979	1,57	—0,18262	,65257
1,18	—0,23465	—0,70744	1,58	—0,18091	,67518
1,19	—0,23386	—0,66518	1,59	—0,17919	,69703

x	$\varphi_0'(x)$	$\varphi_0^{\mathrm{v}}(x)$	x	$\varphi_0'(x)$	$\varphi_0^{\mathrm{v}}(x)$
1,60	—0,17747	0,71813	2,00	—0,10798	0,97184
1,61	—0,17573	,73846	2,01	—0,10637	,96567
1,62	—0,17400	,75803	2,02	—0,10476	,95905
1,63	—0,17224	,77683	2,03	—0,10316	,95199
1,64	—0,17049	,79486	2,04	—0,10159	,94451
1,65	—0,16873	,81213	2,05	—0,10002	,93662
1,66	—0,16698	,82863	2,06	—0,09847	,92833
1,67	—0,16521	,84437	2,07	—0,09692	,91966
1,68	—0,16343	,85935	2,08	—0,09539	,91063
1,69	—0,16166	,87356	2,09	—0,09386	,90124
1,70	—0,15988	0,88702	2,10	—0,09236	0,89150
1,71	—0,15811	,89972	2,11	—0,09088	,88144
1,72	—0,15633	,91167	2,12	—0,08940	,87107
1,73	—0,15454	,92288	2,13	—0,08793	,86040
1,74	—0,15277	,93334	2,14	—0,08648	,84944
1,75	—0,15099	,94307	2,15	—0,08503	,83821
1,76	—0,14937	,95207	2,16	—0,08361	,82672
1,77	—0,14742	,96034	2,17	—0,08220	,81499
1,78	—0,14566	,96790	2,18	—0,08079	,80302
1,79	—0,14387	,97475	2,19	—0,07941	,79083
1,80	—0,14211	0,98090	2,20	—0,07803	0,77844
1,81	—0,14035	0,98636	2,21	—0,07669	,76586
1,82	—0,13857	0,99113	2,22	—0,07535	,75310
1,83	—0,13683	0,99523	2,23	—0,07401	,74017
1,84	—0,13507	0,99866	2,24	—0,07271	,72709
1,85	—0,13331	1,00134	2,25	—0,07141	,71386
1,86	—0,13158	1,00356	2,26	—0,07013	,70051
1,87	—0,12983	1,00505	2,27	—0,06887	,68704
1,88	—0,12810	1,00592	2,28	—0,06760	,67346
1,89	—0,12638	1,00617	2,29	—0,06636	,65979
1,90	—0,12468	1,00583	2,30	—0,06516	0,64604
1,91	—0,12296	1,00489	2,31	—0,06394	,63222
1,92	—0,12127	1,00337	2,32	—0,06276	,61834
1,93	—0,11956	1,00128	2,33	—0,06158	,60441
1,94	—0,11789	0,99864	2,34	—0,06042	,59044
1,95	—0,11620	0,99545	2,35	—0,05927	,57645
1,96	—0,11454	0,99174	2,36	—0,05813	,56244
1,97	—0,11288	0,98751	2,37	—0,05702	,54842
1,98	—0,11124	0,98277	2,38	—0,05591	,53441
1,99	—0,10961	0,97754	2,39	—0,05483	,52041

x	$\varphi_0'(x)$	$\varphi_0^{v}(x)$
2,40	—0,05374	0,50642
2,41	—0,05268	,49248
2,42	—0,05164	,47857
2,43	—0,05062	,46471
2,44	—0,04960	,45091
2,45	—0,04861	,43717
2,46	—0,04762	,42351
2,47	—0,04666	,40993
2,48	—0,04568	,39643
2,49	—0,04474	,38303
2,50	—0,04382	0,36974
2,51	—0,04289	,35655
2,52	—0,04201	,34348
2,53	—0,04111	0,33053
2,54	—0,04026	,31771
2,55	—0,03940	,30502
2,56	—0,03855	,29247
2,57	—0,03773	,28007
2,58	—0,03692	,26781
2,59	—0,03610	,25571
2,60	—0,03531	0,24376
2,61	—0,03453	,23198
2,62	—0,03377	,22036
2,63	—0,03303	,20892
2,64	—0,03229	,19764
2,65	—0,03156	,18655
2,66	—0,03086	,17563
2,67	—0,03017	,16490
2,68	—0,02948	,15435
2,69	—0,02881	,14399
2,70	—0,02813	0,13381
2,71	—0,02748	,12383
2,72	—0,02685	,11405
2,73	—0,02623	,10446
2,74	—0,02562	,09506
2,75	—0,02500	,08586
2,76	—0,02443	,07687
2,77	—0,02385	,06807
2,78	—0,02327	,05947
2,79	—0,02271	,05107
2,80	—0,02218	0,04287
2,81	—0,02164	0,03488
2,82	—0,02109	0,02708
2,83	—0,02057	0,01949
2,84	—0,02008	0,01209
2,85	—0,01958	0,00490
2,86	—0,01910	—0,00210
2,87	—0,01863	—0,00890
2,88	—0,01817	—0,01549
2,89	—0,01771	—0,02190
2,90	—0,01725	—0,02810
2,91	—0,01682	—0,03412
2,92	—0,01641	0,03994
2,93	—0,01597	—0,04557
2,94	—0,01558	—0,05101
2,95	—0,01516	—0,05626
2,96	—0,01477	—0,06133
2,97	—0,01440	—0,06621
2,98	—0,01403	—0,07091
299	—0,01366	—0,07543
3,00	—0,01329	—0,07977
3,50	—0,00290	—0,13000
4,00	—0,00052	—0,05942
4,50	—0,00009	—0,01601