Renta vitalicia inmediata sobre varias vidas pagadera por cuotas variables según las que sobrevivan

Por **D. Jacinto Fenoll Ceva,**
Subdirector de «Occidente, S. A.» de Seguros
y de «La Continental, S. A.» de Reaseguros.

La variación de las cuotas de Renta a pagar se establece partiendo del principio de que el grupo de cabezas ha sido dado en un orden, según el cual la que quede como primera de las que en cualquier momento sobrevivan marca como cabeza «dominante» el importe de la cuota de Renta a pagar, y perdurará este importe mientras subsista tal cabeza «dominante» y cualesquiera que sean las alteraciones que en el grupo se produzcan por fallecimiento de las otras cabezas.

Se considera como fórmula general la que establece el valor de la Renta «cuando vivan exactamente r cabezas de las m dadas», y generalizando la misma, por suma de los valores obtenidos al hacer variar a r, se tendrá la fórmula para «cuando vivan por lo menos t cabezas». De estas dos fórmulas se deducen directamente los casos particulares de una aparición más frecuente y, en su consecuencia, de una mayor aplicación.

I. Mientras vivan exactamente r cabezas.

Buscando la generalización establezcamos las fórmulas para los grupos de *dos, tres* y *cuatro* cabezas, utilizando ya directamente los símbolos de las Rentas, es decir, de las primas únicas de la Renta unidad.

1.° Sean DOS CABEZAS x, y; con unas cuotas, respectivamente, c_x, c_y, pagaderas en la siguiente forma:

c_x mientras subsista la cabeza x, ya sea conjuntamente con y o después de fallecer ésta.

c_y mientras subsista la cabeza y después de haber fallecido x.

a) El coste de la renta pagadera MIENTRAS VIVAN EXACTAMENTE LAS DOS CABEZAS, será:

$$c_x \ a_{xy} \qquad [1]$$

b) El coste de la renta pagadera MIENTRAS VIVA EXACTAMENTE UNA CABEZA, será: De un lado, $c_x\, a_x + c_y\, a_y$, de donde habrá que deducir la renta que se pagaría mientras vivan las dos cabezas, o sea una parte literal igual a a_{xy} y un coeficiente $c_x + c_y$, es decir, la suma de los coeficientes de todos los grupos de una cabeza que se pueden formar con las dos que han de intervenir en el substraendo: $(c_x + c_y)\, a_{xy}$, luego la fórmula es:

$$c_x\, a_x + c_y\, a_y - (c_x + c_y)\, a_{xy} \qquad [2]$$

2.º Sean TRES CABEZAS x, y, z con unas cuotas c_x, c_y, c_z sobre las que del mismo modo se establece una análoga relación.

c_x pagadera mientras viva x, ya sea con y, z, es decir, viviendo los tres; ya sea viviendo con y después de muerto z, o viviendo con z después de fallecer y; o viviendo sólo x después de fallecer y, z.

c_y pagadera mientras viva y después de fallecer x, ya sea viviendo con z, o viviendo solamente y después de morir z.

c_z pagadera mientras viva z después de fallecidos x, y.

a) El coste de la renta pagadera MIENTRAS VIVAN LAS TRES CABEZAS x, y, z, será:

$$c_x \ a_{xyz} \qquad [3]$$

b) MIENTRAS VIVAN EXACTAMENTE DOS de ellas, será:

$$c_x\, a_{xy} + c_x\, a_{xz} + c_y\, a_{yz}$$

deduciendo la parte correspondiente a la renta que se pagaría cuando vivan las tres juntas, y del mismo modo la parte literal será a_{xyz} con un coeficiente igual a la suma de los correspondientes a todos los grupos de dos cabezas que pueden formarse con las tres dadas:

$$(c_x + c_x + c_y)\ a_{xyz}$$

Por tanto, la fórmula será:

$$c_x\, a_{xy} + c_x\, a_{xz} + c_y\, a_{yz} - (2\, c_x + c_y)\, a_{xyz} \qquad [4]$$

c) MIENTRAS VIVA EXACTAMENTE UNA CABEZA, será:

$$c_x\, a_x + c_y\, a_y + c_z\, a_z$$

menos la renta que en esta suma está comprendida y que se pagaría mientras vivan dos y mientras vivan las tres; es decir, la parte literal de [4] y [3], respectivamente, con unos coeficientes relativos a los grupos de una sola cabeza que estamos considerando; el término de corrección mientras vivan dos, será:

$$(c_x + c_y)\, a_{xy} + (c_x + c_z)\, a_{xz} + (c_y + c_z)\, a_{yz} - 2\,(c_x + c_y + c_z)\, a_{xyz}$$

y mientras vivan las tres:

$$(c_x + c_y + c_z)\, a_{xyz}$$

luego la fórmula será:

$$c_x\, a_x + c_y\, a_y + c_z\, a_z - [(c_x + c_y)\, a_{xy} + (c_x + c_z)\, a_{xz} +$$
$$+ (c_y + c_z)\, a_{yz} - 2\,(c_x + c_y + c_z)\, a_{xyz}] - (c_x + c_y + c_z)\, a_{xyz}$$

que simplificando queda:

$$\begin{aligned} & c_x\, a_x + c_y\, a_y + c_z\, a_z \\ & - [(c_x + c_y)\, a_{xy} + (c_x + c_z)\, a_{xz} + (c_y + c_z)\, a_{yz}] \\ & + (c_x + c_y + c_z)\, a_{xyz} \end{aligned} \qquad [5]$$

3.° Sean cuatro las cabezas *x, y, z, w* con unos importes, respectivamente, c_x, c_y, c_z, c_w que han de guardar la misma relación prevista en términos generales y aplicada en los casos anteriores.

a) El coste de la renta que habría de satisfacerse MIENTRAS VIVAN LAS CUATRO, es:

$$c_x\ a_{xyzw} \qquad [6]$$

b) MIENTRAS VIVAN EXACTAMENTE TRES de ellas:

$$c_x\, a_{xyz} + c_x\, a_{xyw} + c_x\, a_{xzw} + c_y\, a_{yzw}$$

deduciendo del mismo modo el coste de la renta cuando vivan las cuatro $(c_x + c_x + c_x + c_y)\, a_{xyzw}$

$$c_x\, a_{xyz} + c_x\, a_{xyw} + c_x\, a_{xzw} + c_y\, a_{yzw}$$

o sea:

$$-(3\, c_x + c_y)\, a_{xyzw} \qquad [7]$$

c) MIENTRAS VIVAN EXACTAMENTE DOS:

$$c_x\, a_{xy} + c_x\, a_{xz} + c_x\, a_{xw} + c_y\, a_{yz} + c_y\, a_{yw} + c_z\, a_{zw}$$

menos el coste de la que habría de pagarse cuando vivieran tres y cuando vivieran cuatro, es decir, la parte literal de [7] y de [6] con los correspondientes coeficientes.

La de tres, será:

$$(2\,c_x + c_y)\,a_{xyz} + (2\,c_x + c_y)\,a_{xyw} + (2\,c_x + c_z)\,a_{xzw} + $$
$$+ (2\,c_y + c_z)\,a_{yzw} - (6\,c_x + 4\,c_y + 2\,c_z)\,a_{xyzw}$$

la de cuatro, será:

$$(3\,c_x + 2\,c_y + c_z)\,a_{xyzw}$$

luego la expresión es:

$$c_x\,a_{xy} + c_x\,a_{xz} + c_x\,a_{xw} + c_y\,a_{yz} + c_y\,a_{yw} + c_z\,a_{zw}$$
$$-[(2\,c_x + c_y)\,a_{xyz} + (2\,c_x + c_y)\,a_{xyw} + (2\,c_x + c_z)\,a_{xzw} +$$
$$+ (2\,c_y + c_z)\,a_{yzw} - (6\,c_x + 4\,c_y + 2\,c_z)\,a_{xyzw}]$$
$$-(3\,c_x + 2\,c_y + c_z)\,a_{xyzw}$$

que simplificada, queda:

$$c_x\,a_{xy} + c_x\,a_{xz} + c_x\,a_{xw} + c_y\,a_{yz} + c_y\,a_{yw} + c_z\,a_{zw}$$
$$-[(2\,c_x + c_y)\,a_{xyz} + (2\,c_x + c_y)\,a_{xyw} + (2\,c_x + c_z)\,a_{xzw} +$$
$$+ (2\,c_y + c_z)\,a_{yzw}]$$
$$+ (3\,c_x + 2\,c_y + c_z)\,a_{xyzw} \qquad [8]$$

d) Mientras viva exactamente una:

$$c_x\,a_x + c_y\,a_y + c_z\,a_z + c_w\,a_w$$

menos el coste relativo a cuando exactamente vivan *dos, tres* y las *cuatro* que del mismo modo se formará sucesivamente con la parte literal de las fórmulas [8], [7] y [6], afectándolas de los coeficientes relativos a este caso:

Cuando vivan *dos:*

$$(c_x + c_y)\,a_{xy} + (c_x + c_z)\,a_{xz} + (c_x + c_w)\,a_{xw} + (c_y + c_z)\,a_{yz} +$$
$$+ (c_y + c_w)\,a_{yw} + (c_z + c_w)\,a_{zw}$$
$$-[2\,(c_x + c_y + c_z)\,a_{xyz} + 2\,(c_x + c_y + c_w)\,a_{xyw} +$$
$$+ 2\,(c_x + c_z + c_w)\,a_{xzw} + 2\,(c_y + c_z + c_w)\,a_{yzw}]$$
$$+ 3\,(c_x + c_y + c_z + c_w)\,a_{xyzw}$$

cuando vivan *tres:*

$$(c_x + c_y + c_z)\, a_{xyz} + (c_x + c_y + c_w)\, a_{xyw} + (c_x + c_z + c_w)\, a_{xzw} + \\ + (c_y + c_z + c_w)\, a_{yzw}$$

$$-\, 3\,(c_x + c_y + c_z + c_w)\, a_{xyzw}$$

cuando vivan *cuatro:*

$$(c_x + c_y + c_z + c_w)\, a_{xyzw}$$

luego la fórmula será, agrupando términos semejantes:

$$\begin{aligned}
& c_x\, a_x + c_y\, a_y + c_z\, a_z + c_w\, a_w \\
& - [(c_x + c_y)\, a_{xy} + (c_x + c_z)\, a_{xz} + (c_x + c_w)\, a_{xw} + (c_y + c_z)\, a_{yz} + \\
& \qquad + (c_y + c_w)\, a_{yw} + (c_z + c_w)\, a_{zw}] \\
& + 2\,[(c_x + c_y + c_z)\, a_{xyz} + (c_x + c_y + c_w)\, a_{xyw} + \\
& \qquad + (c_x + c_z + c_w)\, a_{xzw} + (c_y + c_z + c_w)\, a_{yzw}] \\
& - \quad [(c_x + c_y + c_z)\, a_{xyz} + (c_x + c_y + c_w)\, a_{xyw} + \\
& \qquad + (c_x + c_z + c_w)\, a_{xzw} + (c_y + c_z + c_w)\, a_{yzw}] \\
& - 3\,(c_x + c_y + c_z + c_w)\, a_{xyzw} \\
& + 3\,(c_x + c_y + c_z + c_w)\, a_{xyzw} \\
& - \quad (c_x + c_y + c_z + c_w)\, a_{xyzw}
\end{aligned}$$

y simplificando, tendremos:

$$\begin{aligned}
& c_x\, a_x + c_y\, a_y + c_z\, a_z + c_w\, a_w \\
& - [(c_x + c_y)\, a_{xy} + (c_x + c_z)\, a_{xz} + (c_x + c_w)\, a_{xw} + (c_y + c_z)\, a_{yz} + \\
& \qquad + (c_y + c_w)\, a_{yw} + (c_z + c_w)\, a_{zw}] \\
& + [(c_x + c_y + c_z)\, a_{xyz} + (c_x + c_y + c_w)\, a_{xyw} + (c_x + c_z + c_w)\, a_{xzw} + \\
& \qquad + (c_y + c_z + c_w)\, a_{yzw}] \\
& - (c_x + c_y + c_z + c_w)\, a_{xyzw} \qquad [9]
\end{aligned}$$

Al agrupar estos resultados, obtenidos sucesivamente, se forma el siguiente cuadro:

Coste de la renta pagadera sobre diversos grupos de cabezas, siendo éstas en total

Mientras vivan exactamente	2 (x ; y)	3 (x ; y ; z)	4 (x ; y ; z ; w)
1	$c_x a_x + c_y a_y$ $-(c_x + c_y) a_{xy}$	$c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z$ $-[(c_x + c_y) a_{xy} +$ $+(c_x + c_z) a_{xz} + (c_y + c_z) a_{yz}]$ $+(c_x + c_y + c_z) a_{xyz}$	$c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z + c_w a_w$ $-[(c_x + c_y) a_{xy} + (c_x + c_z) a_{xz} + (c_x + c_w) a_{xw} +$ $+(c_y + c_z) a_{yz} + (c_y + c_w) a_{yw} + (c_z + c_w) a_{zw}]$ $+[(c_x + c_y + c_z) a_{xyz} + (c_x + c_y + c_w) a_{xyw} +$ $+(c_x + c_z + c_w) a_{xzw} + (c_y + c_z + c_w) a_{yzw}]$ $-(c_x + c_y + c_z + c_w) a_{xyzw}$
2	$c_x a_{xy}$	$c_x a_{xy} + c_x a_{xz} + c_y a_{yz}$ $-(2 c_x + c_y) a_{xyz}$	$c_x a_{xy} + c_x a_{xz} + c_x a_{xw} + c_y a_{yz} + c_y a_{yw} + c_z a_{zw}$ $-[(2 c_x + c_y) a_{xyz} + (2 c_x + c_y) a_{xyw} +$ $+(2 c_x + c_z) a_{xzw} + (2 c_y + c_z) a_{yzw}]$ $+(3 c_x + 2 c_y + c_z) a_{xyzw}$
3		$c_x a_{xyz}$	$c_x a_{xyz} + c_x a_{xyw} + c_x a_{xzw} + c_y a_{yzw}$ $-(3 c_x + c_y) a_{xyzw}$
4			$c_x a_{xyzw}$

Buscando una expresión más simplificada se forma el segundo cuadro, designando por σ_m^n la suma de las rentas que pueden formarse con todas las combinaciones de *m* cabezas tomadas en orden *n*. Los coeficientes, afectados ahora por subíndice numérico, indican que habrán de sustituirse por el coeficiente o cuota de renta relativo a la cabeza que en la expresión literal figure en el lugar que este subíndice expresa.

Coste de la renta pagadera sobre diversos grupos de cabezas, siendo éstas en total

Mientras vivan exactamente	2	3	4
1	$c_1\,\sigma_2^1$ $-(c_1+c_2)\,\sigma_2^2$	$c_1\,\sigma_3^1$ $-(c_1+c_2)\,\sigma_3^2$ $+(c_1+c_2+c_3)\,\sigma_3^3$	$c_1\,\sigma_4^1$ $-(c_1+c_2)\,\sigma_4^2$ $+(c_1+c_2+c_3)\,\sigma_4^3$ $-(c_1+c_2+c_3+c_4)\,\sigma_4^4$
2	$c_1\,\sigma_2^2$	$c_1\,\sigma_3^2$ $-(2\,c_1+c_2)\,\sigma_3^3$	$c_1\,\sigma_4^2$ $-(2\,c_1+c_2)\,\sigma_4^3$ $+(3\,c_1+2\,c_2+c_3)\,\sigma_4^4$
3		$c_1\,\sigma_3^3$	$c_1\,\sigma_4^3$ $-(3\,c_1+c_2)\,\sigma_4^4$
4			$c_1\,\sigma_4^4$

A la vista de la ley de formación que se desprende de las fórmulas encontradas, vamos a demostrar que la fórmula general es del tipo:

$$(\mathrm{Va})\ \frac{[r]}{x_1\,x_2\ldots x_m} = \sum_{k=1}^{m-r+1} (-1)^{k-1} \sum_{p=1}^{k} \binom{r-1+k-p}{r-1} c_p\, \sigma_m^{r+k-1} \qquad [10]$$

Por inducción, suponiendo dicha fórmula cierta para *m* cabezas, mientras vivan exactamente *r*, demostrar que es igualmente ciertas para $m+1$ cabezas, mientras vivan también exactamente *r*.

El desarrollo de la fórmula para *m* cabezas, mientras vivan exactamente *r* tiene la siguiente expresión:

$$
\binom{r-1}{r-1} c_1 \left|
\begin{array}{l}
a_{x_1 x_2 \cdots x_{r-1} x_r} \\
+ a_{x_1 x_2 \cdots x_{r-1} x_{r+1}} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ a_{x_1 x_2 \cdots x_{r-1} x_m} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ a_{x_{m-r+1} x_{m-r+2} \cdots x_{m-1} x_m}
\end{array}\right.
- \left[\binom{r}{r-1} c_1 + \binom{r-1}{r-1} c_2\right] \left|
\begin{array}{l}
a_{x_1 x_2 \cdots x_r x_{r+1}} \\
+ a_{x_1 x_2 \cdots x_r x_{r+2}} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ a_{x_1 x_2 \cdots x_r x_m} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ a_{x_{m-r} x_{m-r+1} \cdots x_{m-1} x_m}
\end{array}\right. + \ldots
$$

$$
\ldots + (-1)^{s-1} \left[\binom{r+s-2}{r-1} c_1 + \binom{r+s-3}{r-1} c_2 + \ldots + \binom{r+s-(d+1)}{r-1} c_d + \ldots + \binom{r-1}{r-1} c_s\right] \left|
\begin{array}{l}
a_{x_1 \cdots x_{r+s-2} x_{r+s-1}} \\
+ a_{x_1 \cdots x_{r+s-2} x_{r+s}} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ a_{x_1 \cdots x_{r+s-2} x_m} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ a_{x_{m-r-s+2} \cdots x_{m-1} x_m}
\end{array}\right.
+ \ldots + (-1)^{m-r} \left[\binom{m-1}{r-1} c_1 + \ldots + \binom{m-d}{r-1} c_d + \ldots + \binom{r-1}{r-1} c_{m-r+1}\right] a_{x_1 \ldots x_m}
$$

En esta suma alternada, de $m-r+1$ términos, cada uno se compone de dos elementos: coeficiente y parte literal. *La parte literal* de cada término es la suma de las Rentas que pueden formarse combinando las *m* cabezas dadas, en orden o grado *r* (el número de cabezas que han de vivir exactamente) para el primer término de la fórmula general y creciendo el orden de unidad en unidad hasta ser *m* para el último término. *El coeficiente,* en cada término, es también una suma de valores de *c* afectados por eulerianas. *Las eulerianas* son todas de orden o denominador igual al número de cabezas que han de vivir exactamente disminuído en una unidad. Los numeradores comienzan en cada término por el número de cabezas que en él se consideran, disminuído en una unidad y decrecen hasta llegar al valor del orden o denominador.

Los correspondientes valores de c que multiplican a cada euleriana siguen en cada término el orden natural en los subíndices a partir de 1. Puede apreciarse que la suma de las eulerianas, prescindiendo de los valores de c, es exactamente el número de combinaciones de orden r de un número de elementos igual en cada término al grado u orden de la parte literal. De este modo, por ejemplo, en el término de lugar 2, la parte literal es la suma de todas las rentas formadas de $r+1$ en $r+1$ entre las m cabezas.

El coeficiente según lo expuesto contendrá la euleriana $\binom{r+1}{r}$, o sea denominador r (el número de cabezas que consideramos han de vivir exactamente) y numerador el grado u orden de la parte literal, $r+1$.

Esta euleriana se descompone $\binom{r+1}{r} = \binom{r}{r-1} + \binom{r-1}{r-1}$ y para formar, finalmente, el coeficiente habrá que afectar a estas eulerianas de los correspondientes valores de c, que serán c_1 y c_2, luego el coeficiente será:

$$\binom{r}{r-1} c_1 + \binom{r-1}{r-1} c_2$$

La demostración por el método inductivo supone que partiendo de que la fórmula es exacta para m cabezas, veamos qué sucede al considerar una cabeza más.

Si el grupo inicial que tenemos es $x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_m$ al incluir una cabeza más el grupo será $x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_m ; x_{m+1}$

La fórmula que se supone cierta para m es, en resumen, una suma de todas las combinaciones que pueden formarse con las m cabezas en todos los grados u órdenes que varían desde r hasta m, y para establecer estas combinaciones se tienen en cuenta lógicamente todas las cabezas dadas. Al considerar una cabeza más, forzosamente deberá aparecer en todos los términos de distinto grado que componen la fórmula formando parte de las combinaciones con las m anteriores, luego debe incluirse en ellos pero sin alterar el orden inicial de grado r para el primero, puesto que aun cuando se consideran ahora $m+1$ cabezas se continúa con la condición de que «vivan exactamente r»; lo que sucederá es que existirá un término más, puesto que hay que considerar el término o sumando en el que viven todas las cabezas que antes era de orden m y ahora ha de ser de $m+1$ porque éste es el número de vidas consideradas.

Sucesivamente se tendrá: En el *primer término*, la parte literal es la suma de todas las rentas posiblemente formadas entre las m dadas, tomándolas de r en r; ahora al tener una cabeza más han de añadirse a las ya formadas todas las rentas de r cabezas en que entre el nuevo elemento y que son las combinaciones que pueden formarse con los m elementos anteriores en orden $r-1$ para que al añadir el nuevo quede en el orden r deseado y que son $\binom{m}{r-1}$ que sumadas a las ya formadas $\binom{m}{r}$ da un total de $\binom{m+1}{r}$ que es el número de combinaciones de orden r entre $m+1$ elementos.

Con respecto al coeficiente, el que allí tenemos $\binom{r-1}{r-1} c_1$, o sea $\binom{r}{r} c_1$ representa una euleriana de numerador igual al número de cabezas que entran en cada renta de la parte literal y por orden el número de cabezas que exactamente necesitamos que vivan para pagar la renta, afectada por c_1 importe correspondiente a la cabeza que figure en primer lugar en cada renta, que es la que marca el importe a pagar; ahora son $m+1$ las cabezas, pero el grado de la parte literal no ha sufrido ninguna variación, luego el numerador de la euleriana sigue siendo el mismo, r y el número de cabezas que necesitamos vivan para pagar la renta es también el mismo, luego tampoco varía el orden de la euleriana, que se repite aquí $\binom{r}{r}$, o sea $\binom{r-1}{r-1}$ igualmente multiplicado por c_1, ya que la primer cabeza que en cada renta figure ha de ser del mismo modo la que señale el importe a pagar. Por tanto, el primer término, al considerar $m+1$ cabezas podemos escribirle

$$\binom{r-1}{r-1} c_1 \left| \begin{array}{l} a_{x_1 x_2 \cdots x_{r-1} x_r} \\ + a_{x_1 x_2 \cdots x_{r-1} x_{r+1}} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{x_1 x_2 \cdots x_{r-1} x_m} \\ + a_{x_1 x_2 \cdots x_{r-1} x_{m+1}} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{x_{m-r+2}\, x_{m-r+3} \cdots x_m\, x_{m+1}} \end{array} \right.$$

En el *segundo término*, la parte literal que es del mismo modo la suma de todas las rentas de $r+1$ cabezas formadas con las m dadas, al considerar una vida más sin alterar el orden $r+1$ de las que entran en cada renta, se repetirá el problema anterior, o sea añadir a todas las rentas ya formadas las que del mismo grado $r+1$ puedan formarse entrando el nuevo elemento y tendremos de este modo la suma de todas las rentas posiblemente formadas con $m+1$ elementos tomadas cada $r+1$.

Para formar el coeficiente tengamos en cuenta que el número de cabezas que entran en cada renta de la parte literal es $r+1$, y al tomarlas de r en r (número exacto de cabezas que han de vivir) dan lugar a $\binom{r+1}{r}$ combinaciones, luego si prescindiéramos de los importes a pagar éste sería el coeficiente $\binom{r+1}{r}$, que a su vez se descompone en suma de $\binom{r}{r-1}$ más $\binom{r-1}{r-1}$, según que sean las combinaciones que comienzan por el primer elemento y las que comienzan por el segundo de los $r+1$ que componen cada renta, y, por tanto, multiplicados estos números combinatorios por c_1 y c_2, respectivamente, importes correspondientes a las cabezas que figuren en primero y segundo lugar de cada una de las rentas; siendo en un todo, este coeficiente, obtenido para el caso que estamos demostrando de $m+1$ cabezas, es el mismo que el que figura en el desarrollo para m cabezas. Y por lo que el segundo término de este desarrollo puede expresarse del siguiente modo:

$$\left[\binom{r}{r-1} c_1 + \binom{r-1}{r-1} c_2\right] \left|\begin{array}{l} a_{x_1\, x_2 \cdots x_r\, x_{r+1}} \\ + a_{x_1\, x_2 \cdots x_r\, x_{r+2}} \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + a_{x_1\, x_2 \cdots x_r\, x_m} \\ + a_{x_1\, x_2 \cdots x_r\, x_{m+1}} \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + a_{x_{m-r+1}\, x_{m-r+2} \cdots x_m\, x_{m+1}} \end{array}\right.$$

En el término general, de lugar s, la parte literal es la suma de todas las rentas formadas con las m cabezas tomadas cada $r+s-1$; si se consideran ahora $m+1$ cabezas habremos de formar igualmente todas las rentas del mismo orden $r+s-1$ que contengan al nuevo elemento consiguiendo en total la suma de todas las rentas formadas con las $m+1$ cabezas y tomadas cada $r+s-1$; en el coeficiente aunque ha variado el número de elementos de m a $m+1$, r no ha variado, es decir, el número de cabezas que exactamente necesitamos que vivan, ni tampoco ha variado el grado de la parte literal, o sea el número de cabezas que en este término entran en cada renta, luego la euleriana que representa el coeficiente, al prescindir de los valores de c, tampoco ha sufrido alteración, siendo igualmente $\binom{r+s-1}{r}$ y del mismo modo puede descomponerse en:

$$\binom{r+s-1}{r} = \binom{r+s-2}{r-1} + \binom{r+s-3}{r-1} + \dots + \binom{r+s-(d+1)}{r-1} + \dots + \binom{r-1}{r-1}$$

que expresan el número de dichas combinaciones que comienzan por el 1°, 2°, 3° ... d° ... s° elemento de los que contiene cada expresión de renta de la parte literal y del mismo modo estas eulerianas vendrán, respectivamente, multiplicadas, por c_1 ; c_2 ; ... ; c_d ; ... c_s que son los capitales pagaderos según que domina el 1°, 2°, 3° ... s° elemento, por lo que también podemos escribir dicho término general de lugar s, para $m+1$ vidas del siguiente modo:

$$\left[\binom{r+s-2}{r-1} c_1 + \binom{r+s-3}{r-1} c_2 + \dots + \binom{r+s-(d+1)}{r-1} c_d + \dots + \binom{r-1}{r-1} c_s\right] \left|\begin{array}{l} a x_1 \, x_2 \cdots x_{r+s-2} \, x_{r+s-1} \\ + a x_1 \, x_2 \cdots x_{r+s-2} \, x_{r+s} \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + a x_1 \, x_2 \cdots x_{r+s-2} \, x_m \\ + a x_1 \, x_2 \cdots x_{r+s-2} \, x_{m+1} \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + a x_{m-r-s+3} \, x_{m-r-s+4} \cdots x_m \, x_{m+1} \end{array}\right.$$

En el término de lugar $m-r+1$ se formará la parte literal de análoga manera, tratándose de $m+1$ cabezas, consiguiendo las sumas de todas las rentas de m vidas con las $m+1$ existentes, y el coeficiente del mismo modo se repetirá el desarrollado para m vidas, siendo el mismo $\binom{m}{r}$ y la misma su descomposición, por lo que también podemos escribir:

$$\left[\binom{m-1}{r-1} c_1 + \binom{m-2}{r-1} c_2 + \dots + \binom{r-1}{r-1} c_{m-r+1}\right] \left|\begin{array}{l} a x_1 \, x_2 \cdots x_{m-1} \, x_m \\ + a x_1 \, x_2 \cdots x_{m-1} \, x_{m+1} \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + \dots\dots\dots\dots \\ + a x_2 \, x_3 \cdots x_m \, x_{m+1} \end{array}\right.$$

En el desarrollo expresado para m cabezas ya no existen más términos, es el último el de lugar $m-r+1$; como quiera que ahora consideramos una cabeza más, el número de términos será uno más, o sea $m-r+2$, según lo cual aún nos falta un término por considerar en el desarrollo, y, en efecto, en el último término considerado hemos tenido en cuenta todas las rentas con $m+1$ cabezas tomadas cada m, y aun nos falta el término en que se consideren las rentas formadas con las $m+1$ cabezas tomándolas cada $m+1$.

La parte literal será la renta que se forme con las $m+1$ cabezas, y el coeficiente, prescindiendo de valores de c, será una euleriana que represente el número de combinaciones que pueden formarse con $m+1$ elementos tomados de r en r descomponible en suma de eulerianas que representan las combinaciones de orden r que comienzan por el 1°, 2° ... $(m-r+2)$ elemento de la clasificación general, que es la que reproduce el subíndice de la cuota de renta, y, respectivamente, afectados por los correspondientes valores de c, luego también podemos escribir el término de lugar $m-r+2$

$$\left[\binom{m}{r-1} c_1 + \binom{m-1}{r-1} c_2 + \dots + \binom{r-1}{r-1} c_{m-r+2}\right] a_{x_1 x_2 \dots x_m x_{m+1}}$$

La agrupación de los desarrollos obtenidos para cada uno de los términos responde a la fórmula

$$(Va)\frac{[r]}{x_1 x_2 \dots x_m x_{m+1}} = \sum_{k=1}^{m-r+2} (-1)^{k-1} \sum_{p=1}^{k} \binom{r-1+k-p}{r-1} c_p \, \sigma_{m+1}^{r+k-1}$$

igualmente obtenida al sustituir en [10] m por $m+1$.

Resta a la demostración comprobar que la fórmula [10] es cierta para un caso concreto, $m=3$, por ejemplo, y, en efecto, sustituyendo en [10] m, r, k, p por sus respectivos valores, tendremos:

1.° Mientras vivan exactamente las tres cabezas:

$$\begin{matrix} m=3 \\ r=3 \end{matrix} \; (Va)_{xyz} = \sum_{k=1}^{1} (-1)^{1-1} \sum_{p=1}^{1} \binom{3-1+1-1}{3-1} c_1 \, \sigma_3^{3+1-1} = \binom{2}{2} c_1 \sigma_3^3 = c_1 a_{xyz} =$$
$$= c_x a_{xyz}$$

$m-r+1=1$
$k=1$
$p=1$

2.° Mientras vivan exactamente dos cabezas:

$$\begin{matrix} m=3 \\ r=2 \end{matrix} \; (Va)\frac{[2]}{xyz} = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k-1} \sum_{p=1}^{k} \binom{2-1+k-p}{2-1} c_p \, \sigma_3^{2+k-1} = c_1 \sigma_3^2 - (2c_1 + c_2)\sigma_3^3$$

$m-r+1=2$

$k=1;2$

$p=1;1,2$

$$= \left[\binom{1}{1} c_1 \sigma_3^2\right] - \left[\binom{2}{1} c_1 \sigma_3^3 + \binom{1}{1} c_2 \sigma_3^3\right] =$$

$$= c_x a_{xy} + c_x a_{xz} + c_y a_{yz} - (2c_x + c_y) a_{xyz}$$

3.° Mientras viva una sola cabeza:

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l}
\begin{array}{l} m=3 \\ r=1 \end{array} (Va)\dfrac{[1]}{xyz} = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \sum_{p=1}^{k} \binom{1-1+k-p}{1-1} c_p \, \sigma_3^{\,1+k-1} \\
m-r+1=3 \\
k=1;2;3 \\
p=1;1,2;1,2,3 = \left[\binom{0}{0} c_1 \sigma_3^1\right] - \left[\binom{1}{0} c_1 \sigma_3^2 + \binom{0}{0} c_2 \sigma_3^2\right] + \\
\qquad \left[\binom{2}{0} c_1 \sigma_3^3 + \binom{1}{0} c_2 \sigma_3^3 + \binom{0}{0} c_3 \sigma_3^3\right] =
\end{array}
&
\begin{array}{r}
= c_1 \sigma_3^1 - (c_1+c_2)\sigma_3^2 + \\
(c_1+c_2+c_3)\sigma_3^3 \\
= c_x a_x + c_y a_y + \\
c_z a_z \\
-\left[(c_x + c_y) a_{xy} + \right. \\
(c_x + c_z) a_{xz} + \\
\left. (c_y + c_z) a_{yz} \right. \\
+ (c_x + c_y + c_z) a_{xyz}
\end{array}
\end{array}
$$

expresiones a las que se llegó directamente, luego la fórmula [10] es válida, como queríamos demostrar.

II. Renta vitalicia inmediata sobre *m* vidas pagadera por cuotas variables según sean las que sobrevivan y mientras vivan por lo menos *t* cabezas.

Demostrada la fórmula [10] para la renta pagadera mientras exactamente vivan *r* cabezas, hacer variar *r* desde *t* hasta *m* y sumar los distintos resultados:

$$
(Va)\frac{t}{x_1 x_2 \dots x_m} = \sum_{r=t}^{m} \sum_{k=1}^{m-r+1} (-1)^{k-1} \sum_{p=1}^{k} \binom{r-1+k-p}{r-1} c_p \, \sigma_m^{\,r+k-1} \qquad [11]
$$

III. Casos particulares.

1. Renta vitalicia inmediata sobre *m* vidas pagadera por cuotas variables según sean las que sobrevivan y pagadera hasta el ultimo fallecimiento:

Partiendo de la fórmula [11] hacer $t=1$

$$
(Va)\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_m} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{m-r+1} (-1)^{k-1} \sum_{p=1}^{k} \binom{r-1+k-p}{r-1} c_p \, \sigma_m^{\,r+k-1} \qquad [12a]
$$

Este caso tiene otra expresión más sencilla

$$
(Va)\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_m} = \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h-1} c_h \, \sigma_m^h \qquad [12b]
$$

como pasamos a demostrar:

Desarrollando la expresión [12a] y agrupando los términos semejantes, con respecto al grado de σ (o sea el número de cabezas que intervienen en cada renta) se habrán recogido igualmente todos los términos que figuran en la fórmula ya demostrada.

Las de primer grado serán:

$$k = 1 \quad \text{de} \quad r = 1 \qquad\qquad c_1\, \sigma_m{}^1$$

Las de segundo grado serán:

$$\begin{array}{llll} k = 2 & \text{de} & r = 1 & -(c_1 + c_2)\, \sigma_m{}^2 \\ k = 1 & \text{de} & r = 2 & + c_1\, \sigma_m{}^2 \end{array} \qquad = - c_2\, \sigma_m{}^2$$

Los de tercer grado serán:

$$\begin{array}{llll} k = 3 & \text{de} & r = 1 & (c_1 + c_2 + c_3)\, \sigma_m{}^3 \\ & & & -(2\, c_1 + c_2)\, \sigma_m{}^3 \\ & & & + c_1\, \sigma_m{}^3 \end{array}$$

$$= \sigma_m{}^3 \left| \begin{array}{l} c_1 \left[\binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \right] \\ + c_2 \left[\binom{1}{0} - \binom{1}{1} \right] \\ + c_3 \end{array} \right. \qquad = + c_3\, \sigma_m{}^3$$

Los de s° grado serán:

$$k = s \quad \text{de}\ r = 1 \quad (-1)^{s-1} [\ c_1 + c_2 + \ldots + c_{s-h} + \ldots + c_{s-1} + c_s]\ \sigma_m^s$$

$$k = s - 1\ \text{de}\ r = 2 \quad (-1)^{s-2} [(s-1)\, c_1 + (s-2)\, c_2 + \ldots + h\, c_{s-h} + \ldots + c_{s-1}]\ \sigma_m^s$$

....

$$k = s - h\ \text{de}\ r = h + 1\ (-1)^{s-h-1} [\binom{s-1}{h} c_1 + \binom{s-2}{h} c_2 + \ldots + \binom{h}{h} c_{s-h}]\ \sigma_m^s$$

....

$$k = 2 \quad \text{de}\ r = s - 1\ (-1)^1 \left[\binom{s-1}{s-2} c_1 + \binom{s-2}{s-2} c_2 \right] \sigma_m^s$$

$$k = 1 \quad \text{de}\ r = s \quad (-1)^0 \quad \binom{s-1}{s-1} \sigma_m^s$$

$$= (-1)^{s-1}\, \sigma_m^s \left| \begin{array}{l} c_1 \left[\binom{s-1}{0} - \binom{s-1}{1} + \ldots \pm \binom{s-1}{h} \mp \ldots \pm \binom{s-1}{s-2} \mp \binom{s-1}{s-1} \right] \\ + c_2 \left[\binom{s-2}{0} - \binom{s-2}{1} + \ldots \pm \binom{s-2}{h} \mp \ldots \pm \binom{s-2}{s-2} \right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c_{s-h} \left[\binom{h}{0} - \binom{h}{1} + \ldots \pm \binom{h}{h} \right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c_{s-1} \left[\binom{1}{0} - \binom{1}{1} \right] \\ + c_s \end{array} \right. \qquad = (-1)^{s-1} c_s\ \sigma_m$$

Los de m° grado serán:

$$k = m \qquad \text{de } r = 1 \qquad (-1)^{m-1}\left[c_1 + c_2 + \dots + c_{m-h} + \dots + c_{m-1} + c_m\right]\sigma_m^m$$

. . . .

$$k = m - h \text{ de } r = h + 1 \ (-1)^{m-h-1}\left[\binom{m-1}{h} c_1 + \binom{m-2}{h} c_2 + \dots + \binom{h}{h} c_{m-h}\right]\sigma_m^m$$

. . . .

$$k = 1 \qquad \text{de } r = m \qquad (-1)^0 \binom{m-1}{m-1} c_1 \sigma_m^m$$

$$= (-1)^{m-1}\sigma_m^m \left| \begin{array}{l} c_1\left[\binom{m-1}{0} - \binom{m-1}{1} + \dots \pm \binom{m-1}{h} \mp \dots \pm \binom{m-1}{m-2} \mp \binom{m-1}{m-1}\right] \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + c_{m-h}\left[\binom{h}{0} - \binom{h}{1} + \dots \pm \binom{h}{h}\right] \\ + \dots\dots\dots\dots\dots \\ + c_m \end{array} \right. = (-1)^{m-1} c_m \sigma_m^m$$

Agrupando estas expresiones parciales obtenidas sucesivamente,

$$(\mathrm{Va})\ \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_m} = c_1 \sigma_m{}^1 - c_2 \sigma_m{}^2 + \dots + (-1)^{s-1} c_s \ \sigma_m^s + \dots + (-1)^{m-1} c_m \sigma_m^m$$

que responde a la fórmula simplificada

$$(\mathrm{Va})\ \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_m} = \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h-1} c_h \ \sigma_m^h$$

como queríamos demostrar.

2. Renta vitalicia inmediata sobre *m* vidas pagadera mientras vivan exactamente *r* y por una cuota fija:

Partiendo de [10] y haciendo $c_p = c'_r$

$$c'_r \ a \frac{[r]}{x_1 x_2 \dots x_m} = c'_r \sum_{k=1}^{m-r+1} (-1)^{k-1} \sum_{p=1}^{k} \binom{r-1+k-p}{r-1} \sigma_m^{r+k-1}$$

Teniendo en cuenta que

$$\binom{r-1+k-1}{r-1} + \binom{r-1+k-2}{r-1} + \dots + \binom{r}{r-1} + \binom{r-1}{r-1} = \binom{r+k-1}{r}$$

la fórmula será:

$$c'_r \ a \frac{[r]}{x_1 x_2 \dots x_m} = c'_r \sum_{k-1}^{m-r+1} (-1)^{k-1} \binom{r+k-1}{r} \sigma_m^{r+k-1} \qquad [13]$$

siendo c'_r la cuota que invariablemente ha de satisfacerse para cada valor de *r*, o sea cuando el grupo se compone de *r* cabezas, cualesquiera que sean éstas.

3. Renta vitalicia inmediata sobre *m* vidas, pagadera mientras vivan por lo menos *t* y por cuota distinta a la disminución del grupo.

Partiendo de la anterior fórmula [13] se reducirá este caso al sumar los valores obtenidos haciendo variar a *r* desde *t* hasta *m* y asignando a cada término valores de c'_r según el número de sobrevivientes, con arreglo a un orden previsto, de la forma c'_t ; c'_{t+1} ; ... c'_{m-1} ; c'_m según que, respectivamente, vivan t ; t + 1 ; ... ; m — 1 ; m cabezas.

$$(Va)\frac{t}{x_1\,x_2\ldots x_m} = \sum_{r=t}^{m} c'_r \sum_{k=1}^{m-r+1} (-1)^{k-1} \binom{r+k-1}{r} \sigma_m^{r+k-1} \qquad [14]$$

4. Renta vitalicia inmediata sobre *m* vidas, pagadera mientras vivan por lo menos *t* y por cuota invariable con la disminución del grupo.

Es un caso particular del anterior haciendo constante el valor de *c* que varía con *r*; por tanto, su fórmula, basada en la [14], tendrá la forma siguiente:

$$ca\frac{t}{x_1\,x_2\ldots x_m} = c\sum_{r=t}^{m} \sum_{k=1}^{m-r+1} (-1)^{k-1} \binom{r+k-1}{r} \sigma_m^{r+k-1} \qquad [15]$$

5. Renta vitalicia inmediata sobre *m* vidas, pagadera hasta el último fallecimiento por cuota distinta a la disminución del grupo.

Puede considerarse esta expresión como caso particular de la fórmula [14] ampliando el entorno de la variable *r* para que tenga un campo de variabilidad ahora desde *1* hasta *m;* o bien como caso particular de la formula [12 a], convirtiendo el valor c_p en c'_r que expresa la variabilidad en los importes a pagar según que vaya disminuyendo el grupo, y repitiendo la simplificación efectuada para concluir en la fórmula [13]; da igualmente en ambos casos la expresión

$$(Va)\frac{1}{x_1\,x_2\ldots x_m} = \sum_{r=1}^{m} c'_r \sum_{k=1}^{m-r+1} (-1)^{k-1} \binom{r+k-1}{r} \sigma_m^{r+k-1} \qquad [16]$$

6. Renta vitalicia inmediata sobre *m* vidas, pagadera hasta el último fallecimiento y por cuota fija aunque se modifique la constitución del grupo.

Puede considerarse como un caso particular de la fórmula [16] suprimiendo la variabilidad del elemento c'_r y como elemento constante c factor común sacarle fuera de la expresión, con lo que la fórmula será:

$$ca \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_m} = c \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{m-r+1} (-1)^{k-1} \binom{r+k-1}{r} \sigma_m^{r+k-1} \qquad [17\,a]$$

o bien partiendo de la formula [12b] y haciendo del mismo modo $c_r = c$ (constante), que como factor común sale fuera de la expresión, la fórmula será:

$$ca \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_m} = c \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h-1} \sigma_m^h \qquad [17\,b]$$

Estas fórmulas, que han sido deducidas de las generales halladas, proporcionan en sus desarrollos las mismas expresiones que fueron demostradas en cada caso por diversos autores.

Madrid, octubre 1946.