

## ESTUDIO DE LOS MECANISMOS DE MITIGACIÓN DEL RIESGO DE LONGEVIDAD EN SEGUROS Y PENSIONES

### STUDY OF THE MITIGATION MECHANISMS OF THE LONGEVITY RISK IN INSURANCE AND PENSIONS

#### Manuel Jesús López Bausan

Máster Ciencias Actariales y Financieras, Universidad de Barcelona. Barcelona, España.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9992-9140>

[manelopez1999@gmail.com](mailto:manelopez1999@gmail.com)

(Autor para correspondencia).

#### María Mercedes Claramunt Bielsa.

Modelización financiera y actuarial, Universidad de Barcelona. Barcelona, España.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5184-9106>

Fecha de recepción: 13 de marzo de 2023

Fecha de aceptación: 9 de octubre de 2023

#### RESUMEN

El fenómeno de la longevidad se refiere a que la población viva más, o en términos más concretos, viva más de lo esperable inicialmente. En las últimas décadas, la población española y, en general, la mundial, ha incrementado su longevidad. Esta evolución se plasma, por ejemplo, en la esperanza de vida al nacer y la esperanza de vida en una determinada edad, como la de jubilación. El riesgo de longevidad se define como el riesgo de pérdidas en los seguros y/o en las pensiones complementarias, derivadas de una disminución de las tasas de mortalidad. Este riesgo de longevidad es muy importante en los seguros que dan prestaciones de supervivencia, es decir, cuando los asegurados viven en determinadas edades. Las repercusiones monetarias de una longevidad no prevista (y, por tanto, no tarifada) son importantes. Existen en los mercados financieros mecanismos de transferencia de riesgos que pueden aplicarse al riesgo de longevidad. Así, diversas experiencias iniciales de *q-forward* y *swaps* han aparecido en el mercado en los últimos tiempos, pero existen dificultades en su generalización. El presente artículo tiene dos objetivos principales. El primero es el estudio de los mecanismos de transferencia del riesgo de longevidad en los mercados financieros que se han desarrollado en los últimos años, sus características y ventajas e inconvenientes. El segundo objetivo es desarrollar modelos de valoración de estos instrumentos según diferentes hipótesis de mortalidad futura y distintos mecanismos de formación de precios.

**Palabras clave:** Riesgo de longevidad, riesgo de mortalidad; enfoque *tâtonnement*; utilidades equivalentes *CARA* y *CRRRA*; bono *MLS*.

#### ABSTRACT

The phenomenon of longevity refers to the fact that the population lives longer, or lives longer than expected. In recent decades, the Spanish population and, in general, the world population, has increased its longevity. This evolution is reflected, for example, in life expectancy at birth and life expectancy at a certain age, such as retirement. The longevity risk is defined as the risk of losses in insurance and/or in complementary pensions, derived



from a decrease in mortality rates. This longevity risk is especially important in insurance that provides survivorship benefits, that is, when the insured lives to certain ages. The monetary repercussions of unforeseen (and therefore unpriced) longevity are significant. There are risk transfer mechanisms in financial markets that can be applied to longevity risk.

Thus, various initial experiences of *q-forward* and *swaps* have appeared on the market in recent times, but there are difficulties in their generalization. The first goal is the study of the mechanisms for transferring the risk of longevity to the financial markets that have developed in recent years, their characteristics and their advantages and disadvantages. The second one is to develop valuation models of these instruments according to different hypotheses of future mortality and different mechanisms of price formation.

**Keywords:** Longevity risk; mortality risk; *tâtonnement* approach; *CARA* and *CRRRA* equivalent utilities and *MLS* bond.

## 1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno de la longevidad se refiere a que la población viva más, o en términos más concretos, viva más de lo esperable inicialmente. En las últimas décadas, la población española y, en general, la mundial, ha incrementado su longevidad. Esta evolución se plasma, por ejemplo, en la esperanza de vida al nacer y la esperanza de vida en una determinada edad, como la de jubilación.

El riesgo de longevidad se define como el riesgo de pérdidas en los seguros y/o en las pensiones complementarias, derivadas de una disminución de las tasas de mortalidad. Este riesgo de longevidad es muy importante en los seguros que dan prestaciones de supervivencia, es decir, cuando los asegurados viven en determinadas edades. Las repercusiones monetarias de una longevidad no prevista (y, por tanto, no tarificada) son importantes.

Existen en los mercados financieros mecanismos de transferencia de riesgos que pueden aplicarse al riesgo de longevidad. Así, diversas experiencias iniciales de *q-forward* y *swaps* han aparecido en el mercado en los últimos tiempos, pero existen dificultades en su generalización.

Por otro lado, citando textualmente la definición de Solvencia II, el riesgo de longevidad es el riesgo de pérdida o de modificación adversa del valor de los compromisos contraídos en virtud de los seguros suscritos debido a variaciones en el nivel, la tendencia o volatilidad de las tasas de mortalidad, para aquellos casos en que un descenso de la tasa de mortalidad genere un aumento en el valor de los compromisos contraídos en virtud de los seguros.

Asimismo, se pretende profundizar en estos mecanismos de mitigación del riesgo de longevidad, estudiando las experiencias que se han producido, así como los modelos matemáticos que permiten el diseño y cuantificación de estos productos.

De la misma manera, se conforma de secciones de índole teórico (3 y 5) y secciones de índole práctico (4 y 6) en las que se aplican los conocimientos previos a través de una aplicación pragmática.

En concreto, en la Sección 3 se detallan los instrumentos de mitigación de los riesgos de longevidad y de mortalidad más relevantes en el sector; en la Sección 4 se desarrolla el Modelo de Lee y Carter (1992) y las metodologías de la estimación de sus parámetros; en la Sección 5 se especifican los modelos de valoración de los instrumentos del riesgo de longevidad y en la Sección 6 se realizan de forma práctica análisis mediante un bono *Mortality-Linked Securities* (MLS).

Además, se incluyen unas conclusiones que sirven de ayuda a lo largo de todo el artículo como información adicional y una vasta lista de referencias bibliográficas. Asimismo, con el fin de mejorar la comprensión de ciertas nociones, al inicio se complementa la lectura con un glosario de términos técnicos.

## 2. CONCEPTOS MATEMÁTICOS Y ESTADÍSTICOS

En esta sección se pretende poner de manifiesto y dilucidar algunos conceptos del ámbito estadístico-actuarial utilizados a lo largo de esta investigación.

### 2.1. Función logit

La función logit es un modelo de elección binaria basada en una distribución acumulada logística estándar. Su fórmula básica es:

$$\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \ln(p) - \ln(1-p). \quad (1)$$

Esta función se menciona en la Sección 4 de este artículo (Westreicher, s.f.).

### 2.2. Funciones biométricas

Una función biométrica es aquella que hace referencia a la vida (Ayuso *et al.*, 2007). La variable biométrica principal es la edad de fallecimiento  $X$ . Las funciones biométricas principales son:

- $l_x$ : número de supervivientes a la edad  $x$ .
- $d_x$ : número de fallecidos que mueren entre la edad  $x$  y la edad  $x + 1$ . Es decir,

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \quad (2)$$

- $L_x$ : número medio de personas vivas entre  $x$  y  $x + 1$ . Es decir,

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt. \quad (3)$$

- $m_x$ : tanto central de mortalidad o de fallecimiento: número de individuos con edad  $x$  que fallecen por tiempo de exposición al tiempo de muerte. Es decir,

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}. \quad (4)$$

- $q_x$ : probabilidad de fallecer de un individuo de edad  $x$  antes de alcanzar la edad  $x + 1$ . Es decir:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \quad (5)$$

- $p_x$ : probabilidad de una persona de edad  $x$  de alcanzar la edad  $x + 1$ . Es decir,

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}. \quad (6)$$

Con todos estos conceptos se puede modelizar una tabla de mortalidad o de vida que los resuma, siendo las columnas las funciones biométricas y las filas cada edad  $x$ . Los

conceptos de este apartado se mencionan en el presente artículo en las Secciones de la 4 a la 6.

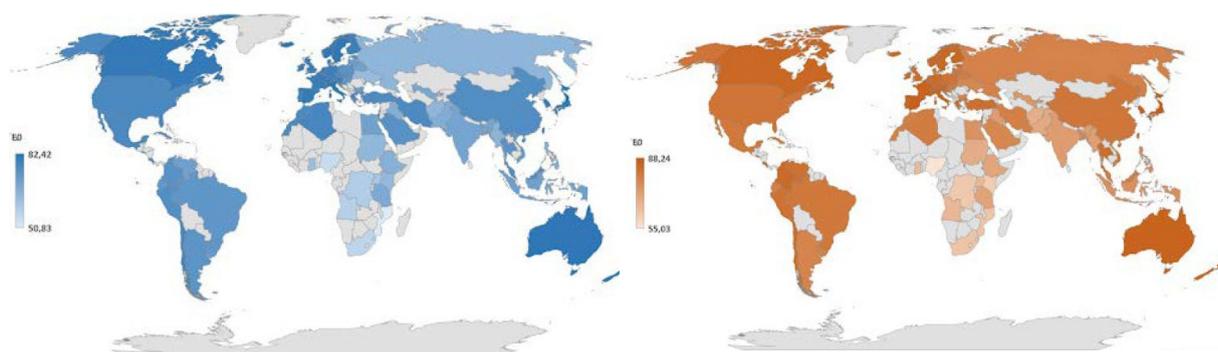
### 3. INSTRUMENTOS DE LONGEVIDAD Y DE MORTALIDAD

Desde la década de 1960 en Europa y en Estados Unidos la esperanza de vida, según Barrieu *et al.* (2010) y Debonneuil *et al.* (2017), crece un cuarto por año transcurrido, lo que provoca un aumento del riesgo de longevidad. Este riesgo lo afrontan aseguradoras y fondos de pensiones, dependiendo de las tasas de mortalidad, la generación y la edad de la persona que está a punto de jubilarse. Las soluciones más usadas han sido el reaseguro tradicional y las del mercado de capitales (Barrieu *et al.*, 2010).

Durante años se han ido valorando posibles medidas para mitigar este riesgo. En la literatura se ha puesto de manifiesto que los gobiernos y los gestores de riesgo de compañías aseguradoras deberían ser quienes establecieran medidas correctoras como, por ejemplo, bonos o swaps para transferir el riesgo a partes interesadas o al mercado de capitales (Debonneuil *et al.*, 2017). Existen métodos de cobertura natural, como el diseño de productos, las hipotecas inversas o los seguros de protección, los cuales proporcionan cobertura de longevidad, pero parcialmente.

En Atance *et al.* (2021) se realiza un informe completo sobre varios indicadores de longevidad teniendo en cuenta información de tres bases de datos distintas desde 1990 hasta 2020 y con ellos se añaden unas predicciones hasta 2030 de 41 países del planeta. Con relación a la esperanza de vida al nacer ( $E0$ ), se concluye que se ha producido una mejora en los últimos años de este indicador debido a factores como la calidad de vida, la alimentación y la salud.

En el Gráfico 1 se puede observar cómo oscilan las esperanzas de vida en la edad de un recién nacido en el año 2020 dependiendo del país de origen y de si son hombres o mujeres. En el mundo existe una oscilación de 51 a 82,5 años aproximadamente en el sexo masculino y de 55 a 88,5 en el sexo femenino. El aumento en las esperanzas de vida tiene asociado un riesgo que crece en la misma proporción que la mejora en la esperanza de vida, no solo al nacer, sino también en la edad de jubilación ( $E65$ , por simplificación): el riesgo de longevidad.



(a) Hombres

(b) Mujeres

Gráfico 1: Esperanza de vida al nacer en 2020. Fuente: Atance *et al.* (2021)

La investigación de Bravo y Vidal (2021) muestra que el riesgo de longevidad tiene varios riesgos asociados: incertidumbre de la tendencia de mortalidad, el riesgo de difusión de longevidad, el riesgo de salto de mortalidad, así como el riesgo de modelo y parámetro.

Dos buenas definiciones de riesgo las ofrece Cox *et al.* (2010): El riesgo de mortalidad es el riesgo de que se produzcan más muertes de las esperadas y el riesgo de longevidad es el riesgo de que sobreviva más gente de la esperada. Cox *et al.* también señalan que la investigación sobre pensiones y rentas vitalicias se centran en el riesgo de longevidad, riesgo en el que también nos focalizaremos.

Cuando la población estudiada vive más de lo esperado se produce el riesgo de longevidad, afectando a las reservas matemáticas constituidas para hacer frente a los flujos futuros, los cuales serán insuficientes, ya que se basarán en tablas de supervivencia inferiores a las reales (Giménez, 2020).

Los derivados tienen como subyacente a índices basados en datos de LifeMetrics, en el de Goldman-Sachs y en el de Credit Suisse (Coughlan *et al.*, 2007). Asimismo, Solvencia II se convierte en un requisito de medición y evaluación del riesgo de longevidad de las aseguradoras (Levantesi y Menziatti, 2006). Este hecho provocó que el nivel de capital que se necesitaba para la longevidad fuera superior. La solución que ofrece el mercado es la gestión del riesgo de longevidad.

Los gobiernos europeos están aumentando las edades de jubilación, hecho que provoca una transferencia del riesgo de longevidad a las personas. Blake *et al.* (2006) añaden que, no solo los ciudadanos están expuesto al riesgo de longevidad, sino que también afecta a los planes de pensiones de prestación definida y a todos los agentes involucrados en él: compañía de seguros, accionistas, directores, gobiernos y a empresas privadas.

En las siguientes secciones se resumen los derivados de longevidad y de mortalidad más importantes que se han desarrollado de forma teórica y/o práctica en los últimos 20 años. Actualmente se usan los derivados de la longevidad basados en tasas de mortalidad o longevidad como los swaps de supervivencia o los bonos de longevidad (Zeddouk y Devolder, 2019).

Además, también se explican en este estudio los *q-forward* y los *S-forward* emitidos por primera vez en 2006 en Reino Unido con motivo de reducción del riesgo de longevidad (Leung *et al.*, 2018; Blake *et al.*, 2018a) juntamente al reaseguro como un instrumento más tradicional. Existen otros instrumentos menos conocidos en los que no se ahondará, como opciones de mortalidad, opciones de supervivencia, *K-options* y opciones de *call spread*, entre otros (Bravo y Vidal, 2021).

En Leung *et al.* (2018) se estudian también los bonos de longevidad o LLS EIB-BNP Paribas, los cuales fueron emitidos por el Banco Europeo de Inversiones y por el *Banque Nationale de Paris* en noviembre de 2004 por 540 M€, a cambio de cupones de 50 M€ ponderado por el índice de supervivencia basado en las tasas de mortalidad de hombres galeses e ingleses de 65 años en 2003. Asimismo, actualmente no se negocian en los mercados financieros, ya que la fijación de precios sigue siendo un inconveniente para los LLS (Cui, 2008).

### **3.1. *q-forward***

Un contrato *q-forward* o de mortalidad a plazo es el tipo de instrumento más simple de cobertura del riesgo de longevidad y de mortalidad (Coughlan *et al.*, 2007). Cox *et al.* (2010); Blake *et al.* (2018a) definen un *q-forward* como un acuerdo entre dos partes para intercambiar en una fecha futura (el vencimiento del contrato) una cantidad proporcional a la tasa de mortalidad a plazo de una determinada población, a cambio de una cantidad proporcional a una mortalidad fija, tasa acordada mutuamente al inicio. Es decir, un *q-forward* es un swap de cupón cero que intercambia mortalidad fija por mortalidad al

vencimiento.

Por ende, un fondo de pensiones cubrirá el riesgo de longevidad y esperará a que la contraparte del forward le pague si la mortalidad es superior de lo previsto (es decir, si aumenta el riesgo de mortalidad). En consecuencia, el vendedor del *q-forward* será el fondo de pensiones (contraparte A), mientras que el comprador (contraparte B) será el inversor o banco de inversión, el cual tiene la exposición opuesta, pagando la tasa de mortalidad fija y recibiendo la tasa realizada en el vencimiento, como se ilustra en el Gráfico 2 (Barrieu *et al.*, 2010; Blake *et al.*, 2018a).

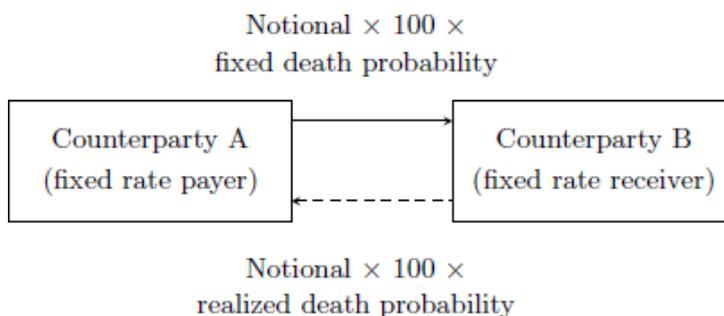


Gráfico 2: Estructura de un *q-forward* en el vencimiento. Fuente: Barrieu *et al.* (2010)

La primera transacción de derivados del mercado de capitales del mundo de un contrato *q-forward* se dio en enero de 2008 por JP Morgan y la empresa de compra de fondos de pensiones del Reino Unido Lucida a partir del índice LifeMetrics mediante ratios de probabilidad de fallecimiento o supervivencia a 10 años (Barrieu *et al.*, 2010; Blake *et al.*, 2018a, b).

Del mismo modo que los swaps de longevidad, Blake *et al.* (2018a) arguyen que los *q-forward* se vincularon a un índice de longevidad basado en la mortalidad masculina nacional de Inglaterra y Gales para intervalos de diferentes edades. La cobertura fue proporcionada por JP Morgan e incluía cobertura de valor además de cobertura de efectivo.

### 3.2. S-forward y swap de longevidad

Según Barrieu *et al.* (2010) un swap de longevidad es un instrumento de cobertura de flujos de caja para la aseguradora de vida. El riesgo de longevidad se transfiere de la aseguradora a los inversores, a cambio de un precio: la prima.

Leung *et al.* (2018), Blake *et al.* (2018a) y Zeddouk y Devolder (2019) definen un contrato *S-forward* o *survivor-forward* como un swap donde el pagador de tasa fija paga una cantidad  $K \in (0, 1)$  a cambio de una cantidad variable sujeta a un índice, es decir, un swap de longevidad o de supervivencia (o S-swap). Por tanto, el Swap de longevidad se diseña financieramente como una cartera plain vanilla, *id est*, un contrato a medida u OTC (*over the counter*) con vencimiento a largo plazo, sin transferencia de activos (Blake *et al.*, 2018b). En cualquier swap de longevidad, el plan de pensiones o aseguradora recibe del vendedor del swap los pagos reales (y variables) que debe pagar a los pensionistas y, a cambio, realiza una serie de pagos fijos al vendedor (Barrieu *et al.*, 2010); (Blake *et al.*, 2018a).

A pesar de la vasta literatura de los *S-forward*, no ha arraigado en el mercado porque es

muy difícil calcular su precio. Dos soluciones que han tenido éxito en el mercado han sido los swaps de longevidad basados en pensiones y los seguros de longevidad (Blake *et al.*, 2018a).

Existen dos tipos de swaps de longevidad (Barrieu *et al.*, 2010): los basados en un índice y los personalizados. Hay una pequeña cantidad de valores del mercado de capitales que se han lanzado con éxito desde 2006: bonos con diferencial de longevidad, swaps de longevidad, *q-forwards*, *S-forwards* y protección contra el riesgo de cola. La característica clave de estos es que la mayoría son soluciones indexadas en lugar de personalizadas (Blake *et al.*, 2018a).

El primer Swap de longevidad (aunque fue estructurado como un contrato de seguro del mercado de capitales) tuvo lugar en abril de 2007 por 1.700 millones de libras esterlinas entre Swiss Re y Friends Provident, una aseguradora de vida del Reino Unido, la cual realizaba pagos y asumía el riesgo de longevidad. Por otro lado, el primero basado en los mercados de capitales tuvo lugar en julio de 2008 entre JP Morgan y Canada Life en el Reino Unido. Canada Life cubrió 500 millones de libras esterlinas de rentas vitalicias mediante un swap a 40 años personalizado para la exposición de longevidad de la aseguradora a 125.000 pensionistas. El riesgo de longevidad se transfirió por completo a los inversores, que incluían fondos de cobertura y fondos de valores vinculados a seguros (ILS). JP Morgan actuó como intermediario asumiendo el riesgo de crédito de contraparte (Blake *et al.*, 2018a). Más adelante, entre 2007 y 2016 se ejecutaron 48 swaps de longevidad en el Reino Unido por valor de 75.000 millones de libras esterlinas (Blake *et al.*, 2018b). Por otro lado, desde 2007 hasta 2010 también se realizaron operaciones con swaps entre compañías de seguros y reaseguradoras (Barrieu *et al.*, 2010).

### **3.3. Bono de longevidad**

En los últimos años, se han propuesto varias soluciones basadas en el mercado de capitales para la gestión del riesgo de mortalidad y del riesgo de longevidad y, algunas, se han lanzado con éxito. Comprenden instrumentos de deuda vinculados a la mortalidad o a la longevidad, como bonos de mortalidad (MLS) y de longevidad (LLS) o derivados que permiten que los pagos de cupones y/o reembolsos dependan del rendimiento del índice subyacente de mortalidad o longevidad, como el índice suizo unido al bono Swiss Re Kortis, instrumento de protección del riesgo de cola a través de un bono de longevidad adaptado (Bravo y Vidal, 2021). El artículo de Bravo y Vidal continúa indicando que los bonos de longevidad, los reaseguros y los swaps de longevidad son técnicas de mitigación del riesgo de longevidad, las cuales permiten el control de pérdidas y la cobertura natural.

El bono Swiss Re fue el primer bono vinculado con el riesgo de mortalidad lanzado al mercado en Reino Unido en diciembre de 2003 adaptado en diseño y madurez del bono de mortalidad de Vita. Tuvo éxito, por lo que la operación se repitió en abril y diciembre de 2006. Posteriormente las aseguradoras optaron por reducir sus riesgos y crearon otros bonos (Cox *et al.*, 2010). Uno de ellos fue el bono EIB-BNP Paribas, el cual cubría el riesgo de longevidad, pero quebró en 2005 (Barrieu *et al.*, 2010).

Blake *et al.* (2018a) expone un ejemplo exitoso de bono Swiss Re Kortis. Fue emitido en diciembre de 2010 y venció en enero de 2017. El bono pagó cupones trimestrales del 5 % por encima del libor con devolución al vencimiento. Asimismo, estos bonos de longevidad estaban diseñados para cubrir la exposición de Swiss Re al riesgo de mortalidad y al riesgo de longevidad.

Leung *et al.* (2018) exponen que el objetivo del bono EIB-BNP Paribas era protegerse contra la exposición al riesgo de longevidad de las personas de 75 a 85 años en el Reino Unido y del

riesgo de mortalidad de las personas del mismo intervalo de edades en EE.UU. Blake *et al.* (2018a) argumenta, por otro lado, que falló porque se consideró caro debido a la incorporación de una cobertura de longevidad extremadamente larga e innecesaria, a pesar de ser útil, transparente y relevante en su conjunto.

Los valores relacionados con la longevidad no se negocian ampliamente en los mercados financieros, puesto que es muy difícil fijar precios (Zeddouk y Devolder, 2019). Por este motivo, los modelos de Cox y Lin (2007) permiten a los inversores comprender mejor por qué el bono de Swiss Re es una inversión atractiva a pesar de la incertidumbre asociada con el riesgo de mortalidad, mientras que el bono del EIB-BNP Paribas no se vendió muy bien.

Una de las soluciones estudiadas en los últimos 20 años es la titulización del riesgo de longevidad. En contrapartida a los derivados (como, por ejemplo, swaps o *q-forwards*), los ILS o valores vinculados a seguros están aumentando su importancia en el mercado financiero para transferir ese riesgo de longevidad (Blake *et al.*, 2018a). En la práctica se ha intentado gestionar un mercado de derivados de seguros, como futuros u opciones, pero no ha tenido el éxito esperado en el ramo de vida (Barrieu *et al.*, 2010).

### **3.4. Reaseguro**

El Diccionario de Seguros Allianz define el reaseguro como un contrato con el que una aseguradora (cedente) pasa a ser asegurada de otra (reaseguradora), es decir, distribuye los riesgos y responsabilidades en caso de siniestro, cubriendo parcialmente su coste. Se protege ante la posibilidad que ocurra un siniestro de elevada cuantía, que pudiera ocasionarle graves pérdidas económicas.

Bravo y Vidal (2021) estudiaron que el reaseguro es la solución que predomina en el mercado en formato de rentas vitalicias para transferir su riesgo de longevidad, pero también es de las opciones más costosas, debido a sus primas y al aumento de la longevidad a nivel mundial. Además, no es diversificable, por lo que esta práctica se vuelve insostenible en el tiempo. Por este motivo brotaron nuevas formas de transferir el riesgo de longevidad (Zeddouk y Devolder, 2019), como la titulización (ver Sección 3.5) o el pension buy-in y el pension buy-out.

La primera transacción internacional de Reaseguro de longevidad tuvo lugar en junio de 2011 entre Rothesay Life (Reino Unido) y PICA (EE. UU.) valorada en 100 millones de libras esterlinas. Del mismo modo, el primer swap de Reaseguro de vida desde la crisis financiera mundial de 2007-2008 también se llevó a cabo en junio de 2011 entre Atlanticlux e inversores institucionales y se valoró en 60 millones € (Blake *et al.*, 2018a).

### **3.5. Otras soluciones de mitigación del riesgo de longevidad y del riesgo de mortalidad**

Además de los instrumentos expuestos previamente hay gran variedad de métodos alternativos de mitigación del riesgo de longevidad y/o del riesgo de mortalidad. Algunos de ellos son los swaps de mortalidad, futuros de mortalidad, opciones de mortalidad, bonos de longevidad de cupón cero o bonos de longevidad diferidos, entre otros (Blake *et al.*, 2018a).

En Blake et al. (2018a) también se arguyen otros métodos. El primero son los **LLS o valores basados en la longevidad** formados a partir de los bonos de longevidad sin éxito EIB-BNP Paribas (Barrieu et al., 2010; Blake et al., 2018a).

Otra opción es el **Reaseguro de sidecar** que consiste en compartir riesgos con nuevos inversores cuando a los inversionistas les preocupa que el reasegurador cedente tenga una ventaja informativa. En el Gráfico 3 se aprecia cómo este tipo de reaseguro es una estructura financiera que admite que los inversionistas externos asuman los riesgos a largo plazo y se beneficien a corto plazo. Por el mismo motivo, a las aseguradoras les favorece este instrumento, ya que se protegen frente a riesgos Máximos de longevidad.

Estas soluciones podrían tener éxito en la actualidad debido a la limitación de la industria de seguros y reaseguros: no tienen el capital y el personal suficientes para hacer frente a un riesgo de longevidad ilimitado.

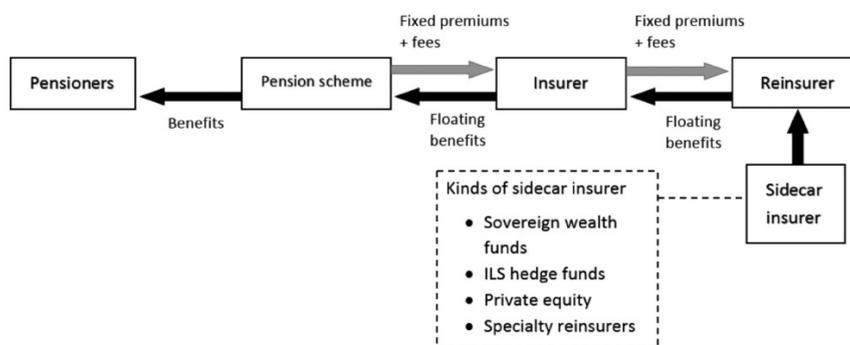


Gráfico 3: Estructura de un reaseguro de sidecar. Fuente: Blake et al. (2018a, b)

Es posible atraer a nuevos inversores en los mercados de capitales, pero según Blake et al. (2018a) es probable que la cobertura del inversionista no sea del todo eficaz ni transparente. A pesar de ello, Blake et al. comentan que, a comienzos de 2018, el sidecar de reaseguro tuvo éxito con el anuncio de creación de una nueva empresa por parte de RGA Re y Renaissance Re.

Existe disonancia entre lo que prefieren los inversores del mercado de capitales y las soluciones que han sido más populares. Los inversores se decantan por los bonos de mortalidad a largo plazo, mientras que las más exitosas han sido los swaps de longevidad y los bonos de mortalidad a corto plazo (Blake et al., 2018a).

Para aumentar la liquidez el artículo de Barrieu et al. (2010) informa que se debe cambiar la mentalidad de seguro a la de mercado de capitales. Además, se han creado índices de longevidad para mejorar la visibilidad, la transparencia y la comprensión del riesgo de longevidad en los mercados, a partir de datos nacionales. Estos índices ayudan a mitigar, en parte, el riesgo asociado a la longevidad. Algunos de ellos son: el índice Credit Suisse, el índice JP Morgan con colaboración de LifeMetrics y el Xpect Data instaurado por la bolsa alemana, fundados entre 2005 y 2008.

Según Barrieu et al. (2010), el sector asegurador ha adoptado nuevas regulaciones desde la década del 2000 (v. g., Solvencia II) destinadas a garantizar una mayor precisión en la valoración de riesgos y normas más estrictas en la gestión del riesgo de solvencia. Por este motivo, es necesario disminuir o hacer desaparecer la asimetría entre los agentes del mercado.

Así pues, es preciso descubrir metodologías personalizadas adaptables al mercado actual y a las necesidades personales del riesgo de longevidad.

### **3.6. Ventajas e inconvenientes del uso de los instrumentos de longevidad y de mortalidad**

La literatura sobre el estudio de la mitigación del riesgo de longevidad y del riesgo de mortalidad ha proporcionado grandes ventajas en el mercado de capitales, aunque también algún inconveniente inherente que ha provocado la quiebra de alguno de los instrumentos, como el bono EIB-BNP Paribas que dejó de estar activo en 2005.

Los *q-forward* tienen un gran inconveniente: no es tarea sencilla estimar el número de supervivientes de un conjunto de población, el cual equivale al riesgo que cubre este instrumento (Blake *et al.*, 2006).

En cuanto al mercado ILS o titulización vinculada a seguros, los beneficios son múltiples: se transfiere el riesgo, se alivia la tensión de capital y existe aceleración en las ganancias y en la velocidad de liquidación y duración (Bauer *et al.*, 2010).

Los Swaps de longevidad, en cambio, ofrecen una solución de cobertura del riesgo de longevidad más barata, en comparación con el reaseguro que, a pesar de ser la opción predominante en el mercado, es también la más costosa (Bravo y Vidal, 2021). Los Swaps de longevidad, además, tienen la ventaja de que eliminan el riesgo de longevidad sin la necesidad de un pago por adelantado y permiten que los fideicomisarios del plan de pensiones retengan el control de la asignación de activos (Blake *et al.*, 2018a). En Zeddouk y Devolder (2019) se describe que los swaps de longevidad poseen unas características idóneas para cubrir el riesgo de longevidad, ya que son flexibles, sus costes son bajos, se adaptan a cada individuo y no requieren de un mercado líquido para funcionar.

En la Tabla 1 se muestra un resumen esquematizado de los instrumentos de longevidad y de mortalidad estudiados previamente y en la Tabla 2 se resumen la fecha, las partes implicadas, la cuantía, el vencimiento y el lugar de la primera emisión de los instrumentos más importantes estudiados en la Sección 3 de esta memoria.

<b>Instrumento</b>		<b>Riesgo que cubre/mitiga</b>	<b>Ratios que usa</b>	<b>¿Vinculado a un índice?</b>	<b>Alternativas viables</b>	<b>Notas</b>	
<b><i>q-forward</i></b>		Longevidad	Probabilidades de fallecimiento y supervivencia	Sí, LifeMetrics vinculó la mortalidad masculina de RU y Gales por edades	Exitosas desde 2006: Bonos con diferencial de longevidad Swaps y seguros de longevidad basados en pensiones Protección contra el riesgo de cola	Tiene cobertura de flujo de efectivo	
<b>Swap de longevidad y <i>S-forward</i></b>	<b>Basados en un índice</b>	Longevidad	El plan de pensiones retiene los riesgos de inversión de la cartera de activos	Sí, el swap de longevidad se construye como una cartera <i>S-forward</i>			Entre 2007 y 2010 se lanzaron con éxito al mercado estos instrumentos
	<b>Personalizados</b>			No, pero con cobertura de valor			
	<b>Contrato de reaseguros</b>			Sí, por definición			
	<b>Cobertura de pasivos</b>			No, pero con cobertura de valor			
<b>Bonos de longevidad</b>	<b>Swiss Re Kortis</b>	Longevidad y Mortalidad	Índices de mortalidad y longevidad	Sí, son índices catastróficos	- Reaseguros - Swaps de longevidad - <i>q-forwards</i> ILS, MLS y LLS	Basado en el bono Vita	
	<b>EIB-BNP Paribas</b>	Longevidad en RU - Mortalidad en EUA	Índices de supervivencia y mortalidad masculina de galeses e ingleses de 65 años en 2003	Sí, son bonos basados en personas de RU y EUA de 75 a 85 años		Quebró en 2005	
<b>Reaseguro</b>		Longevidad	Transferencia del riesgo	No	Titulización Buy-in y buy-out	Opción más cara y predominante	
<b>Otras soluciones</b>		Swaps, futuros y opciones de mortalidad, bonos de longevidad de cupón cero y diferidos, reaseguro de sidecar y CAPM.					

Tabla 1: Resumen esquematizado de las características de los instrumentos de longevidad y de mortalidad. Fuente: elaboración propia.

<b>Instrumento</b>		<b>Fecha</b>	<b>Partes implicadas</b>	<b>Cuantía y vencimiento</b>	<b>Lugar</b>	<b>¿Se usa hoy día?</b>	<b>¿Ha tenido éxito?</b>
<b>q-forward</b>		Enero 2008	JP Morgan Lucida	Operación a 10 años	RU	Sí	Sí
<b>Swap de longevidad y S-forward</b>	<b>Basados en un índice</b>	Enero 2008	JP Morgan Lucida	100 millones £ a 10 años	RU	No	No, es muy difícil calcular su precio
	<b>Personalizados</b>	Julio 2008	JP Morgan Canada Life	500 millones £ a 40 años que cubren el riesgo de 125.000 pensionistas	RU	No	
	<b>Contrato de reaseguros</b>	Abril 2007	Swiss Re Friends Provident	1700 millones £	RU	No	Sí
	<b>Cobertura de pasivos</b>	Enero 2011	JP Morgan Pall	70 millones £ a 10 años	RU	No	Sí, fue un swap de flujo de efectivo
<b>Bonos de longevidad</b>	<b>Swiss Re Kortis</b>	Diciembre 2003	Bonos emitidos por Swiss Re		RU	Sí	Sí, y se repitió en 2006 y en 2010
	<b>EIB-BNP Paribas</b>	Noviembre 2004	EIB BNP	540 M€ a cambio de cupones de 50 M€ ponderado por un índice de supervivencia	RU EUA	No	No
<b>Reaseguro</b>		Junio 2011	Rothsay Life PICA	100 millones £	RU EUA	Sí	Sí, pero se valoran nuevas formas menos costosas

Tabla 2: Resumen esquematizado de la primera emisión de los instrumentos de longevidad y de mortalidad.

#### 4. MODELO LEE-CARTER

Lee y Carter desarrollaron en 1992 el modelo que lleva su nombre (en adelante, **modelo LC**) con el objetivo de valorar y predecir la mortalidad. Este modelo se basa en una relación aritmética entre la tasa central de mortalidad,  $m_{x,t}$  y las variables edad,  $x$ , y tiempo,  $t$ . Es decir:

$$\log(\hat{m}_{x,t}) = a_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \varepsilon_{x,t} \quad (7) \quad \text{o, de}$$

forma análoga, (7) se puede transformar en:

$$\hat{m}_{x,t} = \exp\{a_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \varepsilon_{x,t}\}, \quad (8)$$

donde,

- $a_x$  es un parámetro dependiente de la edad que describe el comportamiento medio de la curva de mortalidad para cada  $x$  en el tiempo.
- $\kappa_t$  es un parámetro dependiente del tiempo y describe qué tendencia sigue la mortalidad. Si este parámetro es creciente significa que la mortalidad empeora. Si fuera decreciente, el comportamiento sería inverso.
- $\beta_x$  también depende de la edad y recoge la reacción de la tasa de mortalidad para cada año con respecto al parámetro  $\kappa_t$ , es decir, de la tendencia general de mortalidad.
- $\varepsilon_{x,t} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Es decir,  $\varepsilon_{x,t}$  representa un error aleatorio o ruido blanco con media 0 y varianza  $\sigma_\varepsilon^2$ , que recoge las desviaciones aleatorias no captadas por el modelo. En el artículo original de Lee y Carter (1992) se especifica que este parámetro debería tener un comportamiento basado en la distribución normal con una varianza pequeña debido a que la varianza de  $\hat{m}_{x,t}$  debería explicar el nivel general de mortalidad,  $\kappa_t$ .

El modelo de Lee y Carter (1992) pertenece a la categoría de modelos Edad-Periodo (*Age-Period, A-P*) y resulta ser un modelo indeterminado pues describe la probabilidad de fallecimiento de la edad en función del tiempo y, por tanto, dada una solución cualquiera de  $a_x$ ,  $\beta_x$  y  $\kappa_t$ , también lo será cualquier transformación de esta. Por tanto, para evitar este problema, los autores restringieron los parámetros normalizándolos del siguiente modo:

$$\sum_x \beta_x = 1 \quad \sum_t \kappa_t = 0 \quad (9)$$

Antes de indicar qué método se usará para estimar los parámetros, previamente se aclararán algunos conceptos:

- Se pone de manifiesto que estas restricciones no son únicas ni aceptadas por todos. En la literatura actuarial se han propuesto varias soluciones a este problema de indeterminación, como las indicadas por Brouhns *et al.* (2002) o Haberman y Renshaw (2011), pero en este artículo se seguirán las mencionadas en (9), siguiendo el ejemplo de Lee y Carter.
- Los parámetros  $a_x$  y  $\beta_x$  son constantes para cada periodo de tiempo,  $t$ . De forma análoga,  $\kappa_t$  es constante para todas las edades,  $x$ .

Principalmente existen 4 metodologías distintas<sup>1</sup> para la estimación de los parámetros  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  y  $\kappa_t$ :

1. La **Descomposición en Valores Singulares** (SVD) propuesta por Lee y Carter (1992) a través de una transformación realizada con una función *logit*.
2. Mediante **Mínimos Cuadrados Ordinarios** (MCO). Se trata de minimizar una función objetivo preestablecida, derivarla y ajustarla a 0.
3. A través de los **Modelos Lineales Generalizados** o GLM especificado por Currie *et al.* (2004).
4. Por medio de la función de **Máxima Verosimilitud** (MV), el cual será el proceso que se usará para la estimación de los parámetros en el presente estudio. De este modo se hará un resumen más extenso que en el resto. El método de MV consiste en:
  - a) Maximizar el logaritmo de la función de Máxima Verosimilitud.
  - b) Una vez obtenidos los parámetros  $\hat{\alpha}_x^{MV}$ ,  $\hat{\beta}_x^{MV}$  y  $\hat{\kappa}_t^{MV}$ , se aplican las restricciones mencionadas en (9) y se reestima.
  - c) Por último, se considera que el número observado de fallecimientos con edad  $x$  y durante el periodo  $t$ ,  $\tilde{v}_{x,t}$ , sigue una distribución Binomial (en muchos casos se utiliza como distribución alternativa la de Poisson, pero en este caso se ha utilizado la binomial, ya que es la implementada en el código de R cedido por el Dr. Atance para hacer los cálculos),

$$\tilde{v}_{x,t} \sim B(E_{x,t}^0, q_{x,t}), \quad (10)$$

siendo,

- $E_{x,t}^0$  : su medida o exposición inicial al riesgo de las personas de  $x$  años durante el último periodo  $t$ .
- $\hat{q}_{x,t}$ : su varianza cuya fórmula es  $\hat{q}_{x,t} = \exp\{\alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t\}$

Es preciso acotar de nuevo la función de Máxima Verosimilitud de (10) con la ayuda de las restricciones mencionadas en (9), las cuales son el instrumento para volver a estimar los parámetros  $\hat{\alpha}_x^{MV}$ ,  $\hat{\beta}_x^{MV}$  y  $\hat{\kappa}_t^{MV}$ . Por medio de esta metodología, multitud de autores desde principios de siglo han desarrollado estudios en Inglaterra y Gales, en Canadá y en Estados Unidos.

Mediante el modelo LC a través del método de Máxima Verosimilitud se extraerán los parámetros  $\hat{\alpha}_x^{MV}$ ,  $\hat{\beta}_x^{MV}$  y  $\hat{\kappa}_t^{MV}$  con un código programado de R cedido por el Dr. Atance<sup>2</sup>.

En la Sección 6 se modelizará el precio de un bono cupón cero MLS con datos españoles en el periodo de 1994 a 2020 para hombres y mujeres e información extraída del INE.

<sup>1</sup> Para obtener información más detallada ver, por ejemplo, Atance (2020).

<sup>2</sup> El código utilizado para la extracción de los parámetros no se adjunta, ya que la parte inicial fue desarrollada por el Dr. Atance en el transcurso de su tesis doctoral en el año 2020.

#### 4.1. Ajuste del modelo Lee-Carter con datos del INE

En la presente sección se explicará el proceso utilizado en el ajuste del modelo Lee-Carter.

1. El ajuste del modelo LC uni-factorial se realiza con las edades de 0 hasta 126 años ( $\omega$ , infinito actuarial<sup>3</sup>). Los datos del INE elegidos correspondían únicamente hasta 99 años, prescindiéndose del último dato que da el INE correspondiente a los 100 años o más para evitar distorsiones. Siguiendo a Atance (2020), ampliamos la curva hasta los 126 años con el método de Denuit y Goderniaux (2004).
2. Se calculan valores iniciales de  $a_x$ ,  $\beta_x$  y  $\kappa_t$  para que converja el modelo según la función  $g_{nm}$  del R.
3. Se hacen los siguientes cálculos para que el modelo LC cumpla las restricciones de  $\beta_x$  y  $\kappa_t$  explicadas en (9):  
Siguiendo los pasos que determina el Dr. Atance en su tesis doctoral (2020), para cumplir con las restricciones de (9) se reemplazan los valores mediante:

$$\hat{\beta}_x = \frac{\hat{\beta}_x^{SVD}}{\sum_x \hat{\beta}_x^{SVD}},$$

$$\tilde{\kappa}_x = \hat{\kappa}_x^{SVD} \cdot \sum_x \hat{\beta}_x$$

Teniendo en consideración que el parámetro  $\hat{\beta}_x$  satisface la restricción (9), Lee y Carter (1992) sugieren reevaluar el parámetro  $\kappa_t$ , utilizando sus valores iniciales para que sea igual al número real de muertes observadas, con el fin de evitar discrepancias entre la cantidad estimada y la real de fallecimientos. Por este motivo,  $\kappa_t$  es ajustado nuevamente para que cumpla con la siguiente ecuación:

$$D_t = \sum_x \left( E_{x,t}^0 \cdot \frac{\exp\{\tilde{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \cdot \tilde{\kappa}_t\}}{1 + \exp\{\tilde{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \cdot \tilde{\kappa}_t\}} \right),$$

siendo  $D_t = \sum_x D_{x,t}$ , el número total de fallecimientos en el año t. Si  $\tilde{\kappa}_t$  son las soluciones de  $D_t$ , reescalamos  $a_x$  y  $\kappa_t$  para satisfacer con las restricciones (9):

$$\hat{\alpha}_x = \tilde{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \cdot \text{media}(\tilde{\kappa}_t),$$

$$\hat{\kappa}_t = \tilde{\kappa}_t - \text{media}(\tilde{\kappa}_t).$$

4. Se generan los parámetros en una sola variable para hombres y mujeres mediante la función *logit*, mencionadas en (7) y (8) explicadas en la Sección 2.

A continuación, se realiza el proceso para la proyección de las  $q_{x,t}$ , las cuales son las probabilidades de fallecimiento que se desean modelizar.

1. Se precisa de nuevo de la función *logit* con relación a la edad.

<sup>3</sup>  $\omega$  es el infinito actuarial o edad máxima en la que en esa cohorte no vivirá ningún individuo porque habrá fallecido el último en  $\omega - 1$ .

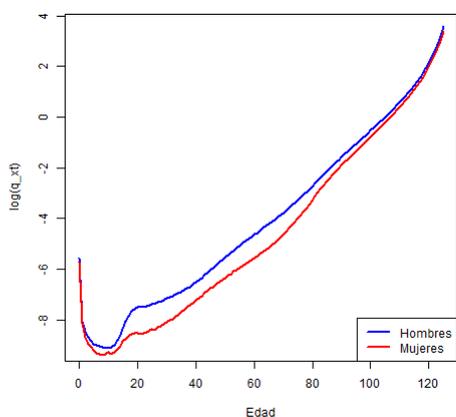
2. Es necesaria una función que proyecte los valores de  $q_{x,t}$  con el modelo LC, a partir de los siguientes parámetros:

- Número de años para las que se quieren predicciones. Número de edades para las que se predice.
- Cálculo de las predicciones.

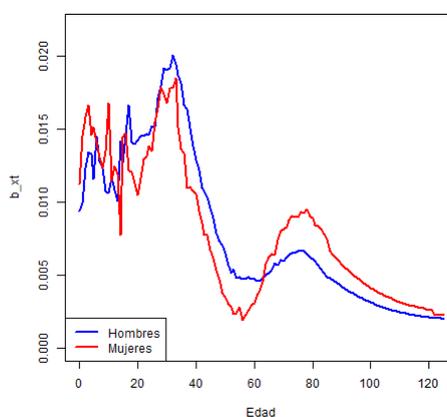
3. Se proyecta el valor de la  $\kappa_t$ .

4. Se muestran los Gráficos de los parámetros dependientes de la edad ( $\alpha_x$  y  $\beta_x$ ) en los Gráficos 4a y 4b, respectivamente.

El parámetro  $\alpha$  toma valores negativos hasta las edades de 100 y tiene un mínimo alrededor de los 10 años creciendo a partir de entonces y excepto en los primeros años es superior en hombres y mujeres. Se aprecia levemente el comportamiento de la joroba de mortalidad juvenil de los accidentes de automóviles alrededor de los 20 años. El parámetro  $\beta$ , en cambio, toma valores positivos con un máximo alrededor de los 40 años decreciendo desde entonces.



(a)  $\alpha_x$



(b)  $\beta_x$

Gráfico 4: Parámetros dependientes de la edad. Fuente: Elaboración propia

5. Se explicita el Gráfico para hombres y mujeres del parámetro dependiente del tiempo,  $\kappa_t$ , en el Gráfico 5 mediante los datos de 1994 hasta 2020 junto con una predicción hasta 2146<sup>4</sup>. Asimismo, en el Gráfico 5b se plasma en un Gráfico los valores de  $\kappa_t$  sin las predicciones haciendo zoom en los años 1994-2020.

<sup>4</sup> El año 2146 es el resultado de la predicción de 126 años adicionales a partir de 2020.

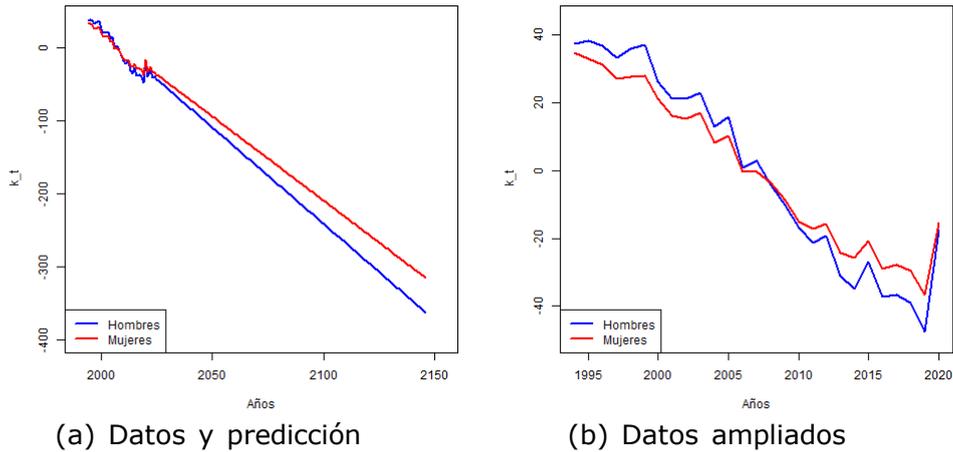


Gráfico 5: Parámetro dependiente del tiempo,  $\kappa_t$ . Fuente: Elaboración propia

La predicción tomará valores negativos y decrecientes. Y a partir de entonces es decreciente. El salto, en concreto, subida, del año 2020, es debido a que hemos incluido en el estudio, la mortalidad del año 2020 incrementada debida a la pandemia del Sars-Cov-2, comúnmente conocida como Covid-19. Sin embargo, observamos como las predicciones a futuro no se ven sustancialmente modificadas previéndose una caída sostenida para el parámetro  $\kappa_t$ .

6. Por último, se proyectan los valores de la  $q_{x,t}$  o probabilidad de fallecimiento para cada edad,  $x$  y para cada año de predicciones,  $t$ .

#### 4.2. Probabilidades de fallecimiento a lo largo del eje temporal de tres edades distintas

Si se elige a un hombre que nació en 1955, en el 2020 (que equivale a  $t=0$ ) tendrá 65 años y las probabilidades  $qh_{65,t}$  son las que se corresponden con la función de color azul cian del Gráfico 6 (de  $qh_{65,0}$  a  $qh_{65,125}$ ). En cambio, si se eligiera a una mujer, *iuris tantum*, se correspondería según la función de color naranja (de  $qm_{65,0}$  a  $qm_{65,125}$ ), lo que significaría que, durante todo el periodo temporal (125 años) el sexo masculino tiene una probabilidad de fallecimiento superior al femenino. Aunque la diferencia entre ellos va disminuyendo, en ningún caso, en el periodo estudiado las mujeres igualarán sus probabilidades con la de los hombres.

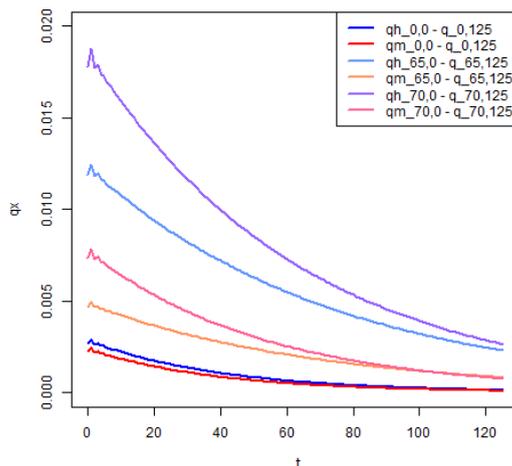


Gráfico 6: Probabilidades de fallecimiento a lo largo del eje temporal, desde el año 2020 ( $t=0$ ) hasta el año 2145 ( $t=125$ ) de un recién nacido, de una persona de 65 años y de una persona de 70 años. Fuente: Elaboración propia

De la misma forma, pero más abruptamente, se comportan las funciones de colores lila y rosa, las cuales corresponden con las probabilidades anuales de fallecimiento de un hombre y una mujer, respectivamente de 70 años a lo largo del eje temporal (desde  $q_{70,0}$  hasta  $q_{70,125}$ ), correspondiendo el año 0 al 2020. Se aprecia también cómo las probabilidades femeninas decrecen más lentamente que las masculinas. Además, las probabilidades de las mujeres una vez recorridos aproximadamente 80 años son parecidas a las probabilidades de fallecimiento de una persona del mismo sexo que nació 5 años después (función de color naranja).

Por último, se comentarán las probabilidades de fallecimiento de hombres y mujeres recién nacidos y su evolución a lo largo de 125 años (de  $q_{0,0}$  a  $q_{0,125}$ ). Sus funciones se corresponden con los colores azul marino y rojo, respectivamente. Siguen la misma tendencia a la baja que las anteriores probabilidades y aunque decrecen más levemente, el sexo masculino sigue teniendo un riesgo de fallecimiento superior al femenino, pero su evolución reacciona convergiendo con el sexo opuesto a los 70 años de edad, aproximadamente.

En todas las funciones de probabilidad se aprecia un crecimiento leve pero abrupto al inicio del Gráfico 6. Es notable este crecimiento cuanto mayor es la persona y dependiendo del sexo, teniendo en cuenta que en los hombres es más exagerado que en las mujeres. Este cambio de tendencia es debido a la estimación intrínseca del modelo LC mediante los datos extraídos del INE.

#### **4.3. Diferencias de probabilidades de fallecimiento entre cohortes a los 65 años**

Debido a que los Gráficos por cohortes son muy parecidos entre sí, se ha realizado el Gráfico 7 en el que se representan las diferencias entre 2 cohortes para hombres y mujeres en 2 años distintos.

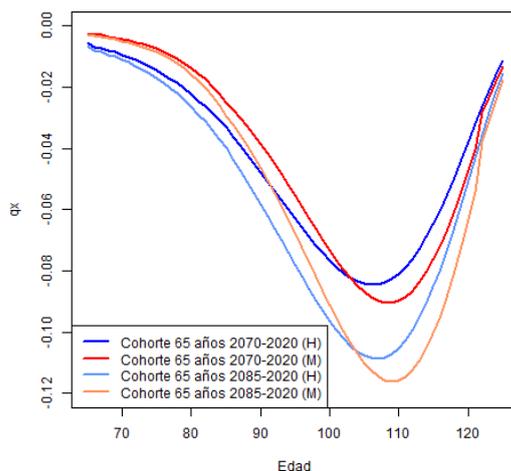


Gráfico 7: Diferencia entre la probabilidad anual de fallecimiento de la cohorte de 65 años del 2070 y 2085 respecto el 2020 de hombres y de mujeres. Fuente: Elaboración propia

La función de color azul marino representa la diferencia en la cohorte masculina de 65 años del 2070 respecto a la del 2020, en la que se empiezan a realizar las predicciones. En cambio, la función de color rojo hace referencia a la diferencia en la cohorte femenina, *iuris tantum*. Por otro lado, la función de color azul cian alude a la diferencia en la cohorte masculina de 65 años del 2085 respecto a la del 2020. Análogamente, la función de color naranja señala la diferencia en la cohorte femenina, *iuris tantum*.

El Gráfico 7 sugiere las siguientes conclusiones:

- Todas las diferencias de probabilidades de fallecimiento son negativas.
- Todas las diferencias de probabilidades de fallecimiento empiezan y acaban en aproximadamente 0.
- Las diferencias de probabilidades de fallecimiento entre cohortes y sexos divergen de forma negativa a lo largo del periodo temporal hasta aproximadamente los 110 años, edad en la que la tendencia pasa a ser de convergencia y creciente.
- Las diferencias entre probabilidades son inferiores en los hombres hasta la edad de 105 años, aproximadamente. En ese momento, existe un cruce entre las funciones de ambos sexos. Este hecho se podría deber a la esperanza de vida, ya que la de las mujeres es superior respecto a los hombres, por lo que la probabilidad de fallecimiento femenina también será inferior en edades avanzadas (Debonneuil *et al.*, 2017).
- A medida que la diferencia entre cohortes es mayor, el *gap* existente de las probabilidades de fallecimiento de hombres y mujeres en cualquier intervalo de tiempo, pero, sobre todo, entre los 100 y los 115 años de edad, también aumenta.

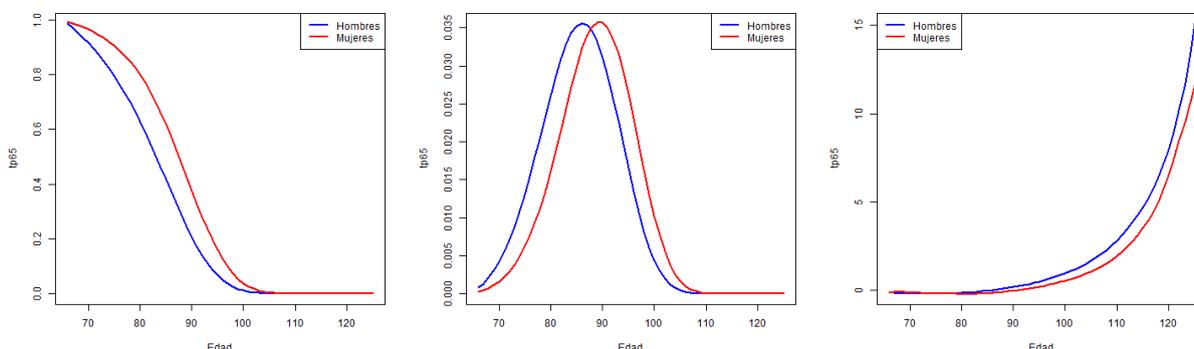
En resumen, existirá una diferencia menor (en valor absoluto) entre cohortes si el sector estudiado es femenino y se encuentra dentro del intervalo de [65 – 105] años de edad. A partir de los 105 años las probabilidades se reducen y convergen hasta llegar aproximadamente al punto de partida, 0.

#### 4.4. Modelo estocástico de mortalidad

La probabilidad de supervivencia a los 65 años,  $tP_{65}$ , describe la distribución de un conjunto de supervivencia simulada de hombres y mujeres de 65 hasta los 125 años. En los Gráficos 8a, 8b y 8c se representan tres Gráficos estocásticos de la  $tP_{65}$ : la media, la desviación estándar y la asimetría de hombres y mujeres mediante 10000 simulaciones pseudoaleatorias. El resultado es pseudoaleatorio, ya que la herramienta utilizada para el desarrollo de los Gráficos ha sido el R, al cual se le ha indicado que genere simulaciones a partir de una semilla fijada.

A partir de los Gráficos 8a, 8b y 8c, es discernible un comportamiento decreciente en la mortalidad. Incluso se detecta una supervivencia distinta entre ambos sexos. Por ejemplo, en el Gráfico 8a existe un *gap* en las primeras 40 edades simuladas, el cual va disminuyendo hasta converger en 0 a la edad de 105 años, aproximadamente. A partir de esa edad, la supervivencia es prácticamente nula. Del Gráfico 8b emana el riesgo o la volatilidad de las probabilidades de supervivencia de hombres y mujeres. En ella se exhibe una forma de joroba, lo que significa que la incertidumbre en un horizonte a largo plazo (aproximadamente de unos 40 años) primero aumenta y luego disminuye. Asimismo, tanto en el Gráfico 8b como en el Gráfico 8c se observa que la distribución simulada es asimétrica, ya que las probabilidades de supervivencia,  $tP_{65}$  no se acercan a 0. Es más, se podría considerar asimétrico por la derecha, debido a que los datos extremos son considerablemente positivos en relación con el resto de los datos.

En el presente artículo se han utilizado datos del INE desde 1994 hasta 2020, incluyendo este último año, a pesar de ser conscientes de que las proyecciones recogen el efecto producido por la Covid-19.



(a) Valor esperado

(b) Desviación estándar

(c) Asimetría

Gráfico 8: Simulación estocástica de las medidas resumen de la probabilidad de supervivencia de la cohorte de 65 años en el 2020,  $tP_{65}$ . Fuente: Elaboración propia

### 5. MODELOS DE VALORACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DEL RIESGO DE LONGEVIDAD

Para valorar los instrumentos que mitigan el riesgo de longevidad en la literatura actuarial, *v. gr.*, Geweke (2001); Gollier (2003); Cui (2008); Kaas *et al.* (2009); Leung *et al.* (2018), se plantean varios métodos:

1. El método **CAPM** o el método **CCAPM** como una mejora del anterior, el cual determina la relación del rendimiento esperado y de la utilidad marginal del consumo.

2. Otro principio de valoración del riesgo es la **ratio de Sharpe**, la cual ha de ser equivalente a la carga de riesgo de longevidad.
3. Un tercer principio se basa en la **utilidad equivalente**. Es un método de fijación de precios en mercados incompletos. Este principio se utiliza con los LLS mediante la compensación Mínima requerida por el vendedor y el precio Máximo aceptable para el comprador. De forma análoga, se puede basar en el salario, en valoración de pasivos de fondos de pensiones u otras magnitudes.

En esta sección nos centraremos en el tercer principio de valoración de riesgos y se estudiarán dos casos de funciones de utilidad: Utilidad del Consumo con Aversión Absoluta al Riesgo Constante o *Consumption with Constant Absolute Risk Aversion Utility* (en adelante, **CARA Utility**) y Utilidad de Aversión al Riesgo Relativa Constante o *Constant Relative Risk Aversion Utility* (en adelante, **CRRA Utility**). La Ecuación 11 permite calcular el recargo Mínimo que iguala la utilidad del vendedor si no emite el instrumento con la utilidad esperada si lo emitiera,

$$U(\omega_t) = E[U(\omega_t + E[S_t] + P^- - S_t)], \quad (11)$$

siendo,

- $U(\cdot)$ : la función de utilidad del vendedor.
- $S_t$ : el índice de supervivencia de una cohorte en el año  $t$ .
- $P^-$ : el recargo Mínimo incluido en la prima.
- $E[S_t] + P^-$ : la prima total recibida por la emisión del instrumento, por ejemplo, de un bono de longevidad.
- $S_t - E[S_t]$ : el riesgo de longevidad asumido por el vendedor o diferencia entre la longevidad real y la esperada.
- $\omega_t$ : la riqueza del vendedor que hace las veces de variable dependiente de la función de utilidad.

### 5.1. Utilidad del Consumo con Aversión Absoluta al Riesgo Constante (CARA Utility)

En la función de utilidad CARA se asume que el vendedor tiene una **utilidad de aversión absoluta** al riesgo constante. Es decir,

$$U(w) = \frac{1}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot w}), \quad (12)$$

siendo  $\alpha$ , el coeficiente de aversión al riesgo absoluto del vendedor. Si lo que se busca es maximizar la utilidad esperada, (12) resulta equivalente a la siguiente expresión:

$$U(w) = -\frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot w}. \quad (13)$$

Sustituyendo (13) en (11) se obtiene la expresión del recargo Mínimo a incluir en la prima,  $P^-$ :

$$\begin{aligned} E[U(\omega_t + E[S_t] + P^- - S_t)] &= -\frac{1}{\alpha} \cdot e^{(-\alpha \cdot \omega_t)} \\ e^{-\alpha \cdot (E[S_t] + P^-)} \cdot E[e^{\alpha \cdot S_t}] &= 1 \\ P^- &= \frac{1}{\alpha} \cdot \ln E[e^{\alpha \cdot (S_t - E[S_t])}]. \end{aligned} \quad (14)$$

El resultado obtenido se corresponde con la conocida prima de riesgo exponencial como criterio en el cálculo de primas de un seguro (Kaas *et al.*, 2009). En este caso, la prima no se ve afectada por la riqueza del vendedor. Desarrollando (14):

$$\begin{aligned}
 P^- &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot \ln \left[ e^{-\bar{\alpha} \cdot E[S_t]} \cdot M_{S_t}(\bar{\alpha}) \right] \\
 &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot [-\bar{\alpha} \cdot E[S_t] + \ln [M_{S_t}(\bar{\alpha})]] \\
 &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot \ln [M_{S_t}(\bar{\alpha})] - E[S_t],
 \end{aligned} \tag{15}$$

siendo,  $M_{S_t}(\bar{\alpha}) = E[e^{\bar{\alpha} \cdot S_t}]$ , la función generatriz de momentos de la variable aleatoria  $S_t$  en el punto  $a$ . Así, si conocemos la distribución de la variable aleatoria  $S_t$  y su función generatriz de momentos, (15) nos proporciona una expresión explícita para el recargo Mínimo a incluir en la prima.

### 5.2. Utilidad de la Aversión al Riesgo Relativa Constante (CRRA Utility)

En la utilidad CRRA, el vendedor tiene una **utilidad de aversión relativa** al riesgo constante denominada utilidad isoelástica. *Id est*,

$$U(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \tag{16}$$

siendo el parámetro  $\gamma$  no negativo, el cual mide el grado de aversión al riesgo relativo que está implícito en la función de utilidad (Geweke, 2001; Gollier, 2003). El recargo Mínimo  $P^-$  es el que se obtiene sustituyendo (16) en (11). Así,

$$\begin{aligned}
 E[U(\omega_t + E[S_t] + P^- - S_t)] &= \frac{\omega_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 E[(\omega_t + E[S_t] + P^- - S_t)^{1-\gamma}] &= \omega_t^{1-\gamma} \\
 E\left[\left(1 + \frac{E[S_t] + P^- - S_t}{\omega_t}\right)^{1-\gamma}\right] &= 1.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Existen dos diferencias con ambas funciones de utilidad:

- Aplicando la CRRA, el recargo incluido en la prima,  $P^-$ , depende de la riqueza,  $\omega_t$ .
- Además, no existe expresión explícita para dicho recargo y se calcula normalmente mediante simulación.

En la Sección 6 se encontrarán el recargo Mínimo incluido en la prima (6.1) y el precio y cantidad óptimas de un bono cupón cero a través de ambas funciones de utilidad CARA y CRRA (6.2).

## 6. ANÁLISIS DE UN BONO MLS CUPÓN CERO

En la actual sección se realizarán dos análisis independientes. Primero se hallará la prima del riesgo de longevidad  $R_p$  de un bono cupón cero a partir de los datos recabados del INE siguiendo a Cui (2008). Y, en segundo lugar, se realizará el cálculo de pagos con vencimiento a un año de un bono cupón cero a través de la misma base de datos, pero siguiendo a Zhou *et al.* (2015). En ambos modelos se obviarán las unidades monetarias.

### 6.1. Análisis del recargo Mínimo incluido en la prima, $P^-$ , de un bono cupón cero mediante las funciones de utilidad CARA y CRRA

En la presente sección se ahonda en el recargo Mínimo incluido en la prima,  $P^-$  y será expresado en términos de la prima de riesgo,  $R_p$ , la cual es una tasa de descuento por encima de la tasa libre de riesgo (y que se supondrá que es 0) y una tasa de descuento actuarial,  $R_a$ , a partir de la siguiente relación de Cui (2008):

$$\frac{1}{(1 + R_a + R_p)^t} = \frac{E[S_t] + P^-}{N} \quad (18)$$

donde la tasa de descuento actuarial,  $R_a$ , se define como

$$\frac{1}{(1 + R_a)^t} = \frac{E[S_t]}{N} = E[{}_t p_x], \quad (19)$$

siendo,

- $N$ : el tamaño de la cohorte estudiada.
- $E[{}_t p_x]$ : el valor esperado de la probabilidad de supervivencia a la edad  $x$ . En la Tabla 3 se han realizado los cálculos en base a  $x = 65$ .

Tomando como base los datos de la  ${}_t p_{65}$  de la Sección 4.4 se determina el recargo Mínimo incluido en la prima del bono cupón cero a partir de siete vencimientos distintos y tres tamaños de cohortes diferentes múltiplos de 10. Además, se utilizan dos funciones de utilidad distintas, la CARA con  $a = 3$  y la CRRA con  $\gamma = 5$  y riqueza  $\omega_0 = \omega_t = 100$ .

Los valores de las variables se han escogido teniendo en consideración el artículo de Cui (2008).

Antes de presentar la Tabla 3 de la prima de riesgo,  $R_p$ , hay que matizar que se ha necesitado realizar un cálculo previo del recargo Mínimo incluido en la prima,  $P^-$ , de la función de utilidad CRRA a partir de la función *uniroot* del R. Los valores expulsados han sido 0,6986071 y 0,6387215, para hombres y mujeres, respectivamente. También indicar que, para un valor de aversión al riesgo de CARA ( $a = 3$ ) se obtienen los mismos resultados hasta el sexto decimal que para un valor de aversión al riesgo de CRRA ( $\gamma = 5$ ). Por este motivo, se ha decidido aproximar a dos decimales la Tabla 3, ya que los resultados son prácticamente idénticos en ambas funciones de utilidad. Esta coincidencia no era un resultado esperado a priori, ya que no corresponde a una justificación teórica.

	N=10		N=100		N=1000	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
<b>t=5</b>	0,31	0,36	1,24	1,29	2,71	2,76
<b>t=10</b>	0,13	0,15	0,45	0,48	0,87	0,89
<b>t=15</b>	0,08	0,09	0,27	0,29	0,50	0,51
<b>t=20</b>	0,06	0,07	0,20	0,21	0,35	0,36
<b>t=25</b>	0,05	0,05	0,15	0,16	0,27	0,28
<b>t=30</b>	0,04	0,04	0,12	0,13	0,22	0,22
<b>t=35</b>	0,03	0,04	0,10	0,11	0,18	0,19

Tabla 3: Prima de riesgo de longevidad  $R_p$  en puntos básicos con valor de aversión al riesgo CARA( $\alpha = 3$ ) y CRRA( $\gamma = 5$ ) de hombres y mujeres. Fuente: Elaboración propia

Las conclusiones extraídas de este bono con datos españoles son las siguientes (coherentes con las obtenidas en la literatura actuarial, ver Cui, 2008):

1. La tasa de descuento adicional  $R_p$  aumenta a medida que aumenta el tamaño del riesgo.
2. Cuanto mayor sea la aversión al riesgo del asegurador, mayor será la compensación requerida.
3. En el presente ejemplo, cuanto mayor sea el vencimiento, menor será la compensación requerida por el bono cupón cero, al contrario que la conclusión que se indicaba en Cui (2008) en la mayoría de las situaciones. La principal razón de la divergencia se debe a que los datos de mortalidad en que se basa nuestro ejemplo son muy distintos, ya que corresponden a diferentes países y diferentes años.

## 6.2. Análisis del óptimo de equilibrio de un bono cupón cero mediante las funciones de utilidad CARA y CRRA

Desde la presente sección hasta el final se modelará un bono vinculado a la longevidad o a la mortalidad (MLS) efectuado entre dos Agentes económicos: A y B (Zhou *et al.*, 2015; Leung *et al.*, 2018).

- El Agente A tendrá consideración de entidad financiera o aseguradora y el Agente B será representado por un inversor o fondo de pensiones que compra el instrumento a cambio de una posible prima en el vencimiento ( $t = 1$ ) de la operación (Cui, 2008).
- El Agente A tiene en su pasivo la contingencia de mortalidad o longevidad. Para resolverlo, planea vender un bono MLS o valor vinculado a la mortalidad con vencimiento a un año al Agente B con el fin de cubrir parcialmente el riesgo de vivir más de lo esperado (longevidad) o menos de lo calculado (mortalidad). Las características de estos bonos se detallan en la Sección 3.3.
- El enfoque utilizado se denomina *tâtonnement* o de tanteo walrasiano, en el que el precio de equilibrio es determinado por el propio enfoque entre oferta y demanda en base a las funciones de utilidad de A y de B.

La cantidad monetaria asociada al riesgo que tiene el plan de pensiones se denotará por  $f$  ( $q_1$ ) =  $10 \times p_{65}$ . Es por ello por lo que resulta ser una función determinista de  $q_1$ , representando el índice de supervivencia español a un año cuando 10 asegurados tienen 65 años en el 2020,  $p_{65}$ . En cambio, en  $t = 0$ ,  $q_1$  no se conoce y se rige por un proceso estocástico subyacente.

Para mitigar su exposición al riesgo de longevidad, el Agente A vende un bono con vencimiento a un año. El pago de una unidad de este valor en el tiempo 1 es otra función determinista de  $q_1$ ,  $g(q_1) = \frac{P_0}{p_{65}}$ , siendo,

- $P_0$  el precio inicial de la operación en  $t = 0$ . Este precio se irá modificando en función de las características del bono de 0,1 a 6 aumentando cada simulación en 0,1.
- $r$  el tipo de interés de mercado. En el ejercicio se fijará,  $r = 5\%$ .
- $p_{65}$  el índice de longevidad español en el año 2020,  $q_1$ .

Es decir, A vende el MLS a B a cambio de  $g(q_1)$  en  $t = 1$ , mientras que B paga  $P_0$  en  $t = 0$  por la compra del bono a cambio de un beneficio esperado futuro.

Siguiendo el proceso de *tâtonnement*, se supondrá que un subastador imaginario indica un precio arbitrario al comienzo de la operación,  $P_0 = 0,1$ . Fijado este precio, los Agentes A y B deciden entonces su oferta,  $\theta^A$  y su demanda,  $\theta^B$  del MLS, respectivamente. Sus elecciones se basarán, siguiendo Zhou *et al.* (2015), en que los agentes elegirán los valores que maximizarán sus utilidades marginales esperadas.

Las riquezas iniciales de los agentes son  $\omega_A = 100$  y  $\omega_B = 100$ . Asimismo, se asume que esta riqueza inicial solo se puede invertir en el MLS o en una cuenta bancaria que genera una capitalización continua con un tipo de interés libre de riesgo de  $r = 0,05$  por año. Los agentes solo ingresarán dinero a partir de la cuenta bancaria, del MLS y del pasivo contingente de vida.

Las funciones de utilidad se denotan por  $U$ . En la presente sección se seguirán (13) y (16), las cuales se basan en las Utilidades *CARA* y *CRRA*, respectivamente.

Asimismo, el enfoque de *tâtonnement* hace 2 supuestos adicionales:

- Comprador y vendedor son completamente racionales, lo que significa que solo buscan obtener ganancias a través de su función de utilidad y no están interesados en la especulación a largo plazo.
- En algunos escenarios puede no haber equilibrio, es decir, la demanda de B y la oferta de A puede divergir.

Los parámetros de aversión al riesgo,  $(k_A, k_B)$  miden cuán adverso u hostil al riesgo es cada uno de los jugadores, agentes o participantes en el mercado. Si ese valor es positivo, será muy adverso; en cambio, si es negativo, será más amante al riesgo. Encontrar estos parámetros no es tarea fácil. Hay diferentes artículos que utilizan un valor concreto para este valor de aversión al riesgo. Leung *et al.* (2018), por ejemplo, siguiendo un algoritmo parecido al de la presente sección, resumen y explican un método matemático posible para su determinación a través de un algoritmo.

Se asume que el bono se vende, por lo que en  $t = 1$ , la cartera de B contiene el riesgo de longevidad transferido por el Agente A.

En consecuencia,

- En  $t = 0$ , A vende  $\theta^A$  unidades del MLS y deposita los ingresos en la cuenta bancaria junto con  $\omega_A$  (su riqueza inicial). Análogamente, B utiliza  $\omega_B$  para comprar  $\theta^B$  unidades del MLS y deposita el resto en otra cuenta bancaria.

- En  $t = 1$ , la riqueza final de A es la cantidad ingresada en la cuenta menos el pago del MLS y su responsabilidad contingente de vida (ver (20)), mientras que la del B son los ingresos en su cuenta más el pago del MLS vendido por A (ver (21)).
- La riqueza se acumula a lo largo del tiempo y devenga una tasa  $r$  en cada periodo.

Por consiguiente, en  $t = 0$ , A y B eligen aquella  $\theta$  (oferta y demanda) del bono que maximiza su utilidad final esperada. La oferta que maximizará la función de utilidad para A en  $t = T = 1$  será  $\theta^A$ . De forma similar, la demanda  $\theta^B$  será la que maximizará la función de utilidad de B. Su notación es la siguiente (Zhou *et al.*, 2015):

$$\text{Agente A: } \sup_{\theta^A} E [U ((\omega_A + \theta^A P_0) e^r - \theta^A g(q_1) - f(q_1))] \quad (20)$$

$$\text{Agente B: } \sup_{\theta^B} E [U ((\omega_B - \theta^B P_0) e^r + \theta^B g(q_1))] \quad (21)$$

Se ha de tener en cuenta que  $\theta^A$  y  $\theta^B$  son funciones del precio  $P$ . Se suprimirá el argumento de estas funciones por simplicidad.

Con la función de utilidad CARA,  $\hat{a} = 0,75$ . En cambio, con la función de utilidad CRRA,  $\gamma = 2$ .

Otros productos que podrían ser valorados mediante simulación son los siguientes: *including zeros*, bonos EIB/BNP, *swaps*, *caps*, *floors*, bonos de longevidad diferida y cobertura natural (Cui, 2008).

Usualmente el precio establecido inicialmente no ajusta a los agentes de mercado. Es por ello por lo que se ha de ajustar. Si la demanda excede la oferta (es decir,  $\theta^B - \theta^A > 0$ ), el precio debe aumentar, y viceversa. Supondremos que el subastador ajusta el precio de una manera lineal al exceso de demanda. Siguiendo a Uzawa (1960); Katzner (1999); Kitti (2010), se expresará la  $(k + 1)$  éxima actualización del precio como:

$$P_{k+1} = P_k + \lambda |P_k| (\theta_B - \theta_A), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

donde,

- $P_0$  es la suposición inicial del precio.
- $P_{k+1}$  tomará valores desde 0,1 hasta 6 con saltos de 0,1.
- $\lambda$  es una constante real positiva.

El precio del bono que establece  $\theta^A = \theta^B$  será el precio del bono modelo.

Además, Zhou *et al.* (2015) advierte 2 elementos para tener en cuenta:

- La riqueza inicial de los jugadores es independiente del precio final debido a la elección de la función de utilidad exponencial (CRRA).
- $\lambda$  establece la velocidad de convergencia:
  - Si  $\lambda$  es grande, el precio fluctuaría demasiado lejos del precio de equilibrio,  $P$ . De este modo,  $\theta_A$  y  $\theta_B$  tenderían a infinito y se perdería el equilibrio.
  - Si  $\lambda$  es pequeña, tardará demasiado en producirse la convergencia, ya que el proceso de ajuste sería lento.
  - Por estas razones, ha de haber equilibrio entre velocidad y precisión. Por tanto, se ha elegido una  $\lambda = 0,01$ , en un inicio, en este ejemplo.

En resumen, el proceso de *tâtonnement* para fijar el precio de un valor vinculado a la mortalidad o MLS puede ser llevado a cabo por el siguiente algoritmo:

1. Establecer un precio  $P_0$ .
2. Determinar la oferta,  $\theta^A$  y la demanda,  $\theta^B$  con la optimización especificada en (20) y (21), respectivamente.
3. Si  $\theta^A = \theta^B$ , *stop*. De lo contrario, ajustar el precio usando (22).
4. Repetir los pasos 2 y 3 hasta hallar que  $\theta^A = \theta^B$ .

Finalmente, sea  $P^*$  el precio que finaliza el algoritmo. Hay dos posibles situaciones que se pueden obtener:

- $P^* > 0$  y  $\theta^A = \theta^B = \theta^*$ , lo que significa que el mercado alcanza equilibrio y el intercambio se produce entre los agentes económicos.
- Sin embargo, tal como se matiza en el artículo de Zhou *et al.* (2015) hubiera sido factible que no se hubiera producido intercambio entre los agentes o incluso que se hubiera producido un intercambio múltiple entre cantidades de oferta y demanda. El segundo caso se produjo cambiando el  $\lambda$  original de 0,01, cuando lo variamos a  $\lambda = 0, 1$  en el sector masculino de la función de utilidad *CARA*.

### **6.3. Variantes de los precios y cantidades óptimas del bono**

En la presente sección se muestra de forma resumida en la Tabla 4 las variantes a las variables originales del cálculo del precio del previo bono, dependiendo de la función de utilidad escogida, *CARA* o *CRRA* y de si se trata de hombres o de mujeres. Además, en la primera fila de esta se encuentran los resultados correspondientes a los valores originales de las variables, los cuales se recogen en la primera columna.

Cada variante se realizará *iuris tantum*, es decir, permaneciendo invariables el resto de los argumentos y volviendo al código original salvo por el cambio que se esté realizando<sup>5</sup>. Siendo,

- $\theta^*$  la cantidad óptima, donde  $\theta_A = \theta_B = \theta^*$ .
- $P^*$  el precio óptimo.
- $r$  es el tipo de interés.
- $P_0$  es el primer precio que tiene en cuenta el algoritmo de optimización recursivo.

---

<sup>5</sup> Como curiosidad adicional, se matiza que el proceso computacional de cada una de las variantes se demoraba un intervalo de entre 50 y 120 minutos en ejecutarse. *Id est*, un total de unas 40 horas de procesamiento, sin detallar las múltiples pruebas que se realizaron antes de validar el algoritmo escogido como correcto.

VALORES ORIGINALES	VARIANTES	Utilidad CARA				Utilidad CRRA			
		Hombres		Mujeres		Hombres		Mujeres	
		$\theta^*$	$P^*$	$\theta^*$	$P^*$	$\theta^*$	$P^*$	$\theta^*$	$P^*$
Original		50	0,137	50	0,0753285	61,2	0,11705	50	0,0753285
$r=0,01$	$r=0,3$	50	0,07533	50	0,0753285	50	0,0608625	50	0,05914
$P_0=0,1$	$P_0=1$	49,965	1,2641	38,2	0,3865	50	1,005	50	0,79702
$\omega_A=\omega_B=1$	$\omega_A=\omega_B=10$	50	0,137	50	0,0753285	50	0,1471075	52,223	0,09023
$\lambda=0,01$	$\lambda=0,1$	38,2 (D)	0,718 (D)	(N)	(N)	50,25	0,60255	(N)	(N)
		100 (C)	51,28536 (C)	No hay	No hay			No hay	No hay
$\alpha=0,75$	$\alpha=1,5$	49,995	0,14144	50	0,0753285	-	-	-	-
$\gamma=2$	$\gamma=5$	-	-	-	-	100 (C)	0,1 (C)	0,1 (C)	0 (C)
$np=30$	$np=50$	50	0,137	50	0,0753285	50	0,103973	50	0,0753275
$nsimul=10000$	$nsimul=5000$	50	0,137	50	0,0753285	61,175	0,117045	50	0,0753275
$lower=0$	$lower=25$	62,5	0,1012915	62,495	0,091325	76,5	0,110885	62,5	0,09267
$upper=100$	$upper=150$	75	0,12278	75	0,09883	90,2	0,11223	75	0,08243

Tabla 4: Óptimo de la oferta y la demanda del análisis de sensibilidad para las utilidades CARA y CRRA de hombres y mujeres, iuris tantum.

Fuente: Elaboración propia

- $\omega_A = \omega_B$  son la riqueza inicial de la oferta y de la demanda, respectivamente.
- $\lambda$  establece la velocidad de convergencia del precio recursivo.
  - (D): Indica que el óptimo es discreto, como ocurre en la mayoría de los casos que se detallan en la Tabla 4.
  - (C): Indica que el óptimo es continuo, *id est*, el que expulsa el algoritmo, tal como ocurre en los siguientes casos:
    - La variante en que  $\lambda = 0, 1$  para hombres en la función de utilidad CARA presenta dos óptimos.
    - En el caso de la variante  $\gamma = 5$  para la función de utilidad CRRA para hombres la solución óptima da un solo óptimo, el cual no se puede mostrar gráficamente.
  - (N): Indica que el óptimo da un precio negativo. Es decir, económicamente no tiene sentido, por lo que en esta variante no hay intercambio entre las cantidades de oferta y de demanda.
- $\bar{\alpha}$  es el coeficiente de aversión al riesgo absoluto del vendedor de la función de utilidad CARA.
- $\gamma$  es el coeficiente de aversión al riesgo relativo del vendedor en la función CRRA.
- $np$  son el número de precios por los que pasa el algoritmo de recursión de búsqueda del óptimo de las cantidades.
- $nsimul$  son el número de simulaciones presentadas en el mismo algoritmo.
- $lower$  es el límite inferior interno del algoritmo de optimización.
- $upper$  es el límite superior interno del algoritmo de optimización.

#### 6.4. Análisis de sensibilidad de la Tabla 4

Para finalizar se analizarán brevemente las conclusiones que se manifiestan de la Tabla 4, en la que se muestran los precios y las cantidades óptimas o de equilibrio para el modelo original escogido y para cada una de sus variantes en sus modalidades de género (Hombre o Mujer) y de función de utilidad (CARA o CRRA).

- En la Utilidad CARA el óptimo original reside en 50 unidades y 0,137 unidades monetarias (en adelante, €) para hombres y 50 unidades y 0,075 € para mujeres. En cambio, en la Utilidad CRRA el óptimo original resulta de 61,2 unidades y 0,117 € para hombres y 50 unidades y 0,075 € para mujeres.
- Se realizan 9 variantes para cada una de las cuatro utilidades que se proponen. Los resultados obtenidos son dispersos, dependiendo de qué variable actúe.

- Si se varía al alza el tipo de interés,  $r$ , la cantidad permanece invariante, pero el precio disminuye en todas las posibilidades.
- Al aumentar el precio inicial,  $P_0$ , el precio óptimo final se incrementa, pero la cantidad óptima o bien se mantiene constante o bien disminuye.
- Incrementando la riqueza inicial,  $\omega_A = \omega_B$ , la cantidad y precio óptimos permanecen invariantes o aumentan ligeramente.
- En la modificación del parámetro de velocidad de convergencia del precio óptimo,  $\lambda$ , se producen tres conclusiones distintas, dependiendo del sexo y de la utilidad escogida. En este análisis se ha producido un incremento de la variable.
  - En el sector femenino el algoritmo a través de los datos proporcionados no ha podido conseguir el óptimo deseado. En la Tabla 4 se denota con (N) de *Negativo*. Como no pueden existir precios negativos no se produce intercambio entre los agentes económicos.
  - En la función de utilidad *CARA* para hombres el algoritmo de optimización ha encontrado una solución. En la mencionada tabla se denota como (C) de *Continua*, ya que mediante cálculos internos expulsa la solución que considera más adecuada con los parámetros o variables consideradas. La solución son 100 unidades y 51,285 €, muy superiores al original. Es decir, el óptimo corresponde a la cantidad Máxima considerada en el código interno, que es 100. Adicionalmente, mediante la observación directa es posible la extracción de un segundo óptimo. Este caso se plasma a través de (D) de *Discreta*, y se corresponde con 38,2 unidades y 0,718 €, cantidad menor y precio mayor al original.
  - Existe un tercer caso al variar el parámetro  $\lambda$ : una disminución de la cantidad óptima y un aumento de su precio, correspondiente con la función de utilidad *CRRRA* para hombres.
- Duplicar el parámetro de aversión al riesgo absoluto del vendedor,  $\bar{\alpha}$ , de la función de utilidad *CARA* aumenta levemente el precio óptimo y deja invariable la cantidad óptima final.
- En cambio, hacer crecer en un 250 % el parámetro de aversión al riesgo relativo del vendedor,  $\gamma$ , para la función de utilidad *CRRRA* genera la creación de óptimos *continuos*, es decir, a través del algoritmo de optimización. Para los hombres la cantidad óptima es la Máxima permitida por el programa, 100 unidades, y su precio es parecido al del modelo original, 0,1 €. Análogamente, para las mujeres, su cantidad óptima es la Mínima permitida intrínsecamente para que se produzca intercambio, 0,1 unidades, aunque a precio aproximadamente 0. Es decir, se ha de regalar lo poco que se intercambia.
- Aumentando el número de precios posibles en los que producirse el intercambio del bono,  $np$  de 30 a 50, solamente se ha modificado el precio un céntimo menos de la función de utilidad *CRRRA* para hombres, quedando las otras 3 utilidades invariantes.
- Haciendo el mismo análisis, han permanecido constantes cantidad y precio en las cuatro modalidades al disminuir a la mitad el número de simulaciones (*nsimul*) necesarias para la obtención del intercambio de este bono MLS. Este fenómeno y el anterior se pueden explicar debido a los topes impuestos desde un inicio a la generación del bono y a la imposición inicial de las variables sin más recursos que la

prueba y error. De ahí el nombre del método utilizado: *tâtonnement* o de tanteo. Por este motivo también se ha decidido cambiar dos de los parámetros internos del algoritmo de optimización de las cantidades de oferta (A) y de demanda (B).

- Al incrementar en un 25 % el tope inferior o *lower* del algoritmo, las cantidades aumentan en la misma proporción. En cambio, los precios de los hombres disminuyen entre 2 y 3 céntimos del modelo original en ambas utilidades, y los de las mujeres aumentan en la misma cantidad.
- Haciendo el paralelismo con la modificación anterior, al incrementar en un 50 % el parámetro superior o *upper* del algoritmo de optimización de las cantidades, las mismas tienen un crecimiento lineal con el correspondiente incremento. El mismo análisis con los precios que en la anterior variante se puede aplicar en la presente: suben ligeramente en las mujeres y proporcionalmente disminuyen en los hombres.

## 7. CONCLUSIONES

Este documento ha puesto de manifiesto que las consecuencias del riesgo de longevidad preocupan no solo al sector asegurador, sino que afecta también a sectores más económicos, políticos e incluso ecológicos.

Se han discutido a nivel teórico diferentes metodologías de sufragar, mitigar o incluso eliminar los riesgos de longevidad y de mortalidad. De todos ellos hay instrumentos que sí se han llevado a término con éxito en el sector asegurador, como el reaseguro, pero es una metodología cara y clásica.

Por este motivo se utilizan también técnicas más simples y eficaces como son los *q-forward*, las cuales tratan del intercambio del riesgo de una parte por el pago de un monto de la contraparte.

Otros elementos del mercado que se han considerado para dar respuesta al primer objetivo mencionado al inicio de este análisis son los *S-forward* o *Swap de longevidad*, los cuales han tenido un éxito relativo o escaso. Análogamente ha habido bonos intercambiados entre empresas aseguradoras y/o bancos en las que algunas operaciones finalizaron sin el éxito esperado, aunque mediante bonos o títulos es más sencillo y posible la mitigación del riesgo de longevidad. En la realidad ha habido casos favorables de este intercambio. Por este motivo hemos pensado que, el bono, es un instrumento adecuado para el desarrollo de las Secciones 4 y subsiguientes.

Adicionalmente, se hace constar una parte práctica que se encadena de principio a fin: desde el ajuste del modelo Lee y Carter (1992) hasta la obtención de precios y cantidades óptimas de un bono de longevidad MLS a través de dos funciones de utilidad distintas mediante datos del INE.

Del modelo de Lee y Carter (1992) obtenemos la probabilidad de supervivencia a los 65 años,  $p_{65}$ , para una cohorte desde 1994 hasta 2020 mediante simulación estocástica programada.

De los tres modelos de valoración del riesgo de longevidad que mencionamos, se escoge el de la utilidad equivalente y se presenta teóricamente. Asimismo, se aplica el análisis previo para dos de sus utilidades: la del Consumo con Aversión Absoluta al Riesgo Constante (*CARA Utility*) o la Utilidad de la Aversión al Riesgo Relativa Constante (*CRRA Utility*).

Se fijan los parámetros de aversión al riesgo para cada una de las utilidades y las variables necesarias para su ejecución y se realizan dos análisis independientes.

El primero, es más sencillo y calcula el recargo Mínimo necesario a incluir en la prima del bono para ambas utilidades. En esta investigación se concluye lo siguiente:

- La tasa de descuento crece si aumenta el riesgo.
- Cuanto más arriesgado sea la operación, mayor contraprestación se necesitará.
- Cuanto más alejado en el tiempo sea el vencimiento de la operación, menor compensación del bono. Este resultado es contradictorio al que se presenta en la literatura actuarial.
- Asimismo, existe un factor importante: la fijación de variables o parámetros de forma arbitraria genera unos resultados idénticos para ambas funciones de utilidad con factores de riesgo muy similares.

El segundo análisis, más detallado, ha buscado la obtención de la cantidad y precio de equilibrios, es decir, la igualdad entre oferta y demanda o entre los agentes A y B, respectivamente, pudiendo así alcanzar el segundo objetivo propuesto.

Las conclusiones que se extraen del estudio de este bono cupón cero MLS son las siguientes.

- Al modificar las variables externas al algoritmo de optimización en R, los resultados varían levemente.
- En cambio, si se producen cambios en los parámetros internos del algoritmo, las cantidades varían en esa proporción, pero los precios se mantienen muy parecidos al original.
- El óptimo en cada variante está sometido a la determinación de las variables escogidas arbitrariamente.
- Para los hombres el precio es superior al de las mujeres, lo cual resulta coherente con las esperanzas de vida de cada uno de los géneros. A mayor esperanza, menor precio del bono.
- Del mismo modo que con los precios, las cantidades resultan superiores para los hombres en la función de utilidad *CRRA*.
- Los resultados obtenidos en este análisis han sido de 3 tipos.
  - *Discretos*, es decir, a través de la observación directa con los Gráficos y la intersección entre oferta y demanda.
  - Por medio del propio algoritmo de optimización de cantidades del bono (indicados como *continuos*).
  - Y, por último, se considera como opción factible la ausencia de intercambio entre los agentes, como en el caso de la modificación del parámetro  $\lambda$  en las mujeres en ambas funciones de utilidad *CARA* y *CRRA*.

Estos resultados del análisis de sensibilidad del bono MLS pueden ayudar a disminuir en mayor o menor medida los riesgos en función de los parámetros definidos según su precio y cantidad óptimos en cada proceso.

Pero, aunque existen otros instrumentos con los que se hubiera podido llevar a la práctica este estudio de investigación, como los swaps, los q-forward o los reaseguros, se podría realizar también con otras técnicas que aún no se hayan desarrollado o fomentado y ser tan efectivos como los métodos tradicionales y resolver los objetivos propuestos: mitigar los riesgos de longevidad y de mortalidad.

## 8. AGRADECIMIENTOS

Este artículo se basa en el Trabajo Final de Máster (TFM) de (AUTOR) del máster de Ciencias Actariales y Financieras (CAF) tutorizado por la Dra. TUTORA en el seno de una beca de colaboración en el curso 2021-22 con el departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial de la Facultad de Economía y Empresa de la Universidad de Barcelona. Por lo que, AUTOR quiere agradecer este artículo a todas aquellas personas que le han apoyado y ayudado durante el transcurso de este, a profesores, compañeros, familiares y amigos: Dra. M. Bosch, Dra. M. Mármol, J.J. Vidal, M. Huertas, M. López, C. de la Roja y C. Retamozo.

Una mención especial ha de tener el Dr. David Atance, actuario y profesor en la Universidad de Alcalá de Henares (Madrid) por sus consejos y colaboración con relación a conceptos vinculados con la mortalidad y la longevidad, además de por la cesión del código en R de su tesis doctoral para la extracción de los parámetros usados en el modelo matemático de la Secciones 4 a la 6 de este artículo.

Por último, pero no por ello menos importante, ambos autores quieren agradecer al referee por sus comentarios y referencias que han ayudado a mejorar el presente trabajo.

## 9. REFERENCIAS

- Allianz. (s.f.). ¿Qué es un Reaseguro? En *Diccionario de Seguros Allianz*. Recuperado el 26 de diciembre, 2022, de <https://www.allianz.es/descubre-allianz/mediadores/diccionario-de-seguros/r/que-es-un-reaseguro.html>
- Atance, D. (2020). *Un nuevo modelo dinámico de mortalidad basado en la edad clave y uso de técnicas de remuestreo para su evaluación*. Tesis doctoral, Universidad de Alcalá.
- Atance, D., Varea, X. y Claramunt, M. (2021). Atlas mundial de la longevidad 2021. *Longevity Future*, 1–141.
- Ayuso, M., Corrales y Rojo, J. (2007). *Estadística actuarial vida*. Barcelona. Publicacions i Edicions UB.
- Barrieu, P., Bensusan, H. y Salhi, Y. (2010). Understanding, Modeling and Managing Longevity Risk: Key Issues and Main Challenges. *European Actuarial Journal*, 1–26.
- Bauer, D., Börger y M., Russ, J. (2010). On the Pricing of Longevity-Linked Securities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46, 139–149.
- Blake, D., Cairns, A.J.G. y Dowd, K. (2006). *Living with mortality: longevity bonds and other Mortality-Linked Securities*. Cambridge University Press, 153–228.
- Blake, D., Cairns, A.J.G. y Kessler, A.R. (2018a). Still living with mortality: the longevity risk transfer market after one decade. *British Actuarial Journal*, 1–80.
- Blake, D., El Karoui y MacMinn, R. (2018b). Longevity risk and capital markets: The 2015–16 update. *Insurance: Mathematics and Economics*, 157–173.
- Bravo, J., Vidal, J. (2021). Pricing longevity derivatives via Fourier transforms. *Insurance: Mathematics and Economics*, 81–97.
- Brouhns, N., Denuit, M. y Vermunt, J.K. (2002). A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance. Mathematics and Economics* 31(3), 373–393.

- Castañer, A. y Claramunt, M.M. (2017). *Solvencia II* (2ª ed.). Barcelona: Dipòsit Digital de la UB. Col·lecció OMADO. <http://hdl.handle.net/2445/107502>
- Coughlan, G., Epstein, D. y Sinha, A. (2007). q-Forwards: Derivatives for transferring longevity and mortality risk. *North American Actuarial Journal*, 1–5.
- Cox, S. y Lin, Y. (2007). Securitization of Catastrophe Mortality Risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 628–637.
- Cox, S.H., Lin, Y. y Pedersen, H. (2010). Mortality risk modeling: Applications to insurance securitization. *Insurance: Mathematics and Economics*, 242–253.
- Cui, J. (January 7-9, 2008). *Longevity Risk Pricing*. [Presented at Symposium]. Living to 100 and Beyond Symposium, Orlando. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.972038>
- Currie, I., Kirkby y Eilers, P. (2004). *Smooth Lee-Carter models and beyond*. Workshop on Lee-Carter Methods.
- Debonneuil, E., Loisel, S. y Planchet, F. (2017). Do actuaries believe in longevity deceleration? *HAL: open science*, 1–31.
- Denuit, M. y Goderniaux, A. (2004). Closing and projecting lifetables using loglinear models. *Mitteilungen. der Schweizerischen Aktuarvereinigung*, 1:29–49.
- Economipedia. (s.f.). Modelo Logit. En *El diccionario económico en español más grande del mundo*. Recuperado el 8 de abril, 2022, de <https://economipedia.com/definiciones/modelo-logit.html>
- Geweke, J. (2001). A note on some limitations of CRRA utility. *Economics Letters* 71, 341–345.
- Giménez, I. (2020). *La Renta Hipotecaria: una solución eficaz para el riesgo de longevidad en la población española* [Trabajo Fin de Máster, Universitat de Barcelona].
- Gollier, C. (2003). To Insure or Not to Insure?: An Insurance Puzzle. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 28(1), 5–24.
- Haberman, S. y Renshaw, A. (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance. Mathematics and Economics* 48(1), 35–55.
- INE (2022). *Tablas de mortalidad por año, sexo, edad y funciones*. Madrid. Instituto Nacional de Estadística. <https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=27153>
- Kaas, R., Goovaerts, M. y Denuit, M. (2009). *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*. Second edition. Berlin. Springer.
- Katzner, D. (1999). Methodological Individualism and the Walrasian Tâtonnement. *Journal of Economic and Social Research*, 5–33.
- Kitti, M. (2010). Convergence of Iterative Tâtonnement without Price Normalization. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34, 1077–1091.
- Lee, R.D. y Carter, L.R. (1992). Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87, 659–671.
- Leung, M., Fung, M.C. y O'Hare, C. (2018). A comparative study of pricing approaches for

longevity instruments. *Insurance: Mathematics and Economics*, 95–116.

Levantesi, S. y Menzietti, M. (2006). Maximum Market Price of Longevity Risk under Solvency Regimes: The Case of Solvency II. *Risks: MDPI*, 1–21.

Uzawa, H. (1960). Walras' Tâtonnement in the Theory of Exchange. *The Review of Economic Studies*, 27, 182–194.

Zeddouk, F., Devolder, P. (2019). Pricing of Longevity Derivatives and Cost of Capital. *Risks: MDPI*, 1–29.

Zhou, R., Li, J. y Tan, K. (2015). Economic Pricing of Mortality-Linked Securities: A Tâtonnement Approach. *Journal of Risk and Insurance* 82(1), 65–96.