Modelo estadístico del contrato de seguro, funciones derivadas del mismo y cartera total del ente asegurador (y estudio de las consecuencias actuariales que se derivan)

Por BERNARDO TAHOCES ACEBO

INTRODUCCION

El contrato de seguro, en su período de vigencia, se puede asimilar, con todas sus consecuencias, a un ente estadístico-matemático: en la Estadística Dinámica, a un proceso estocástico, y en la Estática, a una variante con su correspondiente función de distribución, no siendo aquí la prima única del contrato otra cosa que el valor medio de esa distribución.

Este trabajo va encaminado a demostrarlo y a obtener las consecuencias que se derivan.

No comienza caprichosamente esta tesis en la Estadística Dinámica para luego pasar a la Estática. Es que la imagen estadística del contrato surge precisamente en la Estadística Dinámica, pues se trata de un proceso que se desenvuelve en el tiempo. No obstante, para desarrollar un estudio estadístico con resultados económico-actuariales que nos relacionen con la realidad, es preciso pasar esta imagen a la Estadística Estática.

Dentro de este estudio se tratan, necesariamente, algunas cuestiones, tales como la obtención de una teoría matemática de los riesgos elementales, y se indica brevemente un modo de pasar a la Teoría del Riesgo Colectivo de Lundberg.

I

Para dar a este estudio toda generalidad, supongamos un contrato de Seguro definido en el intervalo (0, T], y que en cualquier instante del intervalo de definición, puede ofrecer un resultado cualquiera del intervalo [0, N] de posibles resultados.

Cada uno de los resultados posibles tiene una cierta probabilidad de aparecer, probabilidad que puede ser o no distinta para cada instante. Por tanto, ese contrato, al desenvolverse en su intervalo de definición, genera un proceso estocástico, ya que engendra en cada instante una variante X(t), dependiente en general del tiempo actuarial de la póliza, *t*. Este proceso será *puramente estocástico* si las variantes tienen idénticas funciones de distribución y son independientes (H. Wold), como así sucede en los riesgos elementales, será *puntual* en todos los contratos sobre riesgos monógrados y será una *cadena de Markoff* en aquellos en los que intervenga la vida humana. La familia de variantes X(t) está definida en el intervalo (0, T]; se trata, pues, de un *proceso estocástico de parámetro continuo*. Desde luego, el fenómeno en estudio depende únicamente del tiempo actuarial de la póliza; el momento histórico de contratación no influye. Es decir, si tomamos un número finito de valores discretos del parámetro, $t_1, t_2, \dots t_r$, la función de la distribución finita multidimensional del proceso es

$$P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_r) \leq x_r] = F_{t_1, \dots, t_r}(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

y verifica

$$F_{t_1+\Delta t, \dots, t_r+\Delta t}(x_1, x_2, \dots, x_r) = F_{t_1, \dots t_r}(x_1, x_2, \dots x_r)$$

para todo $x_1, \dots x_r$ y Δt y para cualquier subconjunto arbitrario $(t_1, \dots t_r)$ de *t*. Lo que equivale a que toda función del conjunto F no queda afectada por una traslación arbitraria del conjunto $\{t\}$ Se trata, por tanto, de un *proceso estacionario* (definición de estacionariedad de Khintchine).

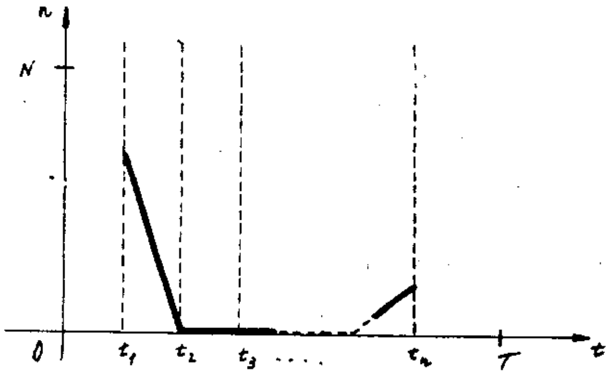
El estudio de los valores probables del recorrido, es decir, de las características, es inmediato si la función de distribución de cada variante X(t), F(X(t)) es conocida, pues,

$$m(t) = E[X(t)]$$

Y la curva de valores probables del recorrido es

$$n = m(t)$$

La representación gráfica para un determinado recorrido, será



Prácticamente, será 0n el eje de indemnizaciones, y 0t el eje del tiempo en que éstas pueden ocurrir.

En cada uno de los planos paralelos a 0n, por t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ hay una masa de probabilidad distribuída de una determinada forma (según el contrato de que se trate), y las trayectorias unen puntos de estas distribuciones.

Ejemplo.—Contrato vida entera. Capital = 1, edad = x.

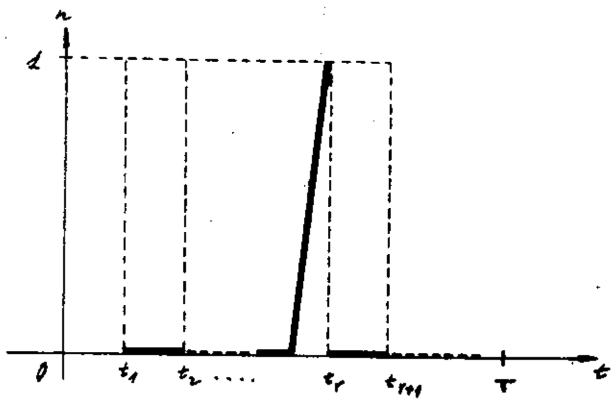
Está definido en $(0, \infty)$. Puede ofrecer en cada instante $(t, t + dt)$ cualquiera de los dos resultados 0 ó 1, engendrando la variante

$$X(t) \begin{cases} 0 & \bar{p}_{x+t} \\ 1 & \dfrac{-\,dl_{x+t}}{l_{x+t}} = \mu_{x+t}\, dt \end{cases}$$

$F(X(t))$, es, por tanto, la función de distribución dicotómica

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\bar{p}_{x+t}\frac{|x|}{x} + \mu_{x+t}\, dt\, \frac{|x-1|}{x-1}\right)$$

El contrato acaba al morir *(x)*, o sea, desde ese momento sólo puede tomar el valor 0; por tanto, su gráfica es



Y la curva de densidad de los valores medios del recorrido,

$$n = \mu_{x+t}$$

Desde luego, todo contrato de Seguro genera un proceso estocástico, tal como ha sido definido por E. Slutsky y A. Kolmogoroff, ya que existe un conjunto E de sucesos elementales, cuyos elementos son todas las posibles trayectorias del contrato en su intervalo de definición, una clase de subconjuntos $\mathfrak{F}$, que es el menor conjunto de Borel que contiene todos los sucesos estocásticos del tipo

$$X(t_1) \leq x_1,\ X(t_2) \leq x_2,\ \dots,\ X(t_n) \leq x_n$$

donde *n* es arbitrario y $t_1, t_2, \dots t_n$ son puntos arbitrarios en $\{t\}$, y las probabilidades de todos los sucesos del tipo anterior vienen definidas por un conjunto $\{F\}$ de funciones de distribución,

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P[X(t_1) \leq x_1, \dots X(t_n) \leq x_n]$$

Es decir, existe el campo de probabilidad (E, $\mathfrak{F}$, P). (Es obvio que las funciones F cumplen las condiciones exigidas por el teorema fundamental de Kolmogoroff).

La reserva individual genera asimismo un proceso estocástico, ya que puede tomar en cada instante cualquiera de los dos resultados, con sus probabilidades respectivas:

$$X(t) \begin{cases} 0 & \mu_{x+t}\, dt \\ {}_tV_x = \dfrac{1}{{}_tE_x} \displaystyle\int_0^t e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x\, (P_x - \mu_{x+t})\, dt & \bar{p}_{x+t} \end{cases}$$

Y lo mismo sucede con cualquier otra función del contrato.

Si en lugar de considerar contratos aislados atendemos al complejo total de contratos de la cartera de un ente asegurador, también genera un proceso estocástico, pues en cada instante puede ofrecer un resultado cualquiera del intervalo [0, S] (S correspondiente a una indemnización total en todos los contratos), con una determinada probabilidad de acaecimiento.

Interpretando la variante que se genera por cada contrato, en un instante *t*, como un vector con componentes las probabilidades para cada punto del eje de resultados, es decir, asimilando un vector a cada una de las funciones de densidad, o bien a las de distribución, aparece para cada instante *t* la variante o vector aleatorio que engendra la cartera total como una suma de vectores aleatorios, es decir,

$$X_c(t) = X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_n(t)$$

igualdad que equivale a esta otra:

$$F_c[X(t)] = F[X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_n(t)]$$

Y si a todo proceso estocástico asimilamos un vector, que tenga por componentes todas las variantes que se generan en el intervalo de definición del proceso (ordenadas con respecto al tiempo), el vector correspondiente a la cartera total es la suma de los vectores correspondientes a los contratos.

La reserva matemática total y la reserva de riesgo también generan procesos estocásticos.

II

A) Hasta ahora se estudió la imagen del contrato de Seguro y funciones derivadas en la Estadística Dinámica. Han aparecido como verdaderos entes estadístico-matemáticos.

Se tratará ahora de proyectar esta imagen al campo de la Estadística Estática; una vez hecho esto, todo el estudio se desenvolverá en este campo, con lo cual se obtendrán consecuencias económico-actuariales, cerrando este trabajo. Como necesario para el desarrollo se construirá un modelo estadístico-matemático de los riesgos elementales.

El paso de la Estadística Dinámica a la Estática se logra del siguiente modo:

En la primera consideramos las variantes que se van generando asimiladas al eje del tiempo; existe una relación fundamental entre estas variantes y el tiempo; cada variante adquiere vida ligada a un determinado instante, y a ese instante aparecen referidas las probabilidades de que tome un determinado valor, aunque consideradas al origen. Es decir, para estudiar cada variante nos desplazamos al instante en que surge, y para estudiar el proceso, nos vamos desplazando a lo largo del eje del tiempo, recorriendo el intervalo de definición (0, T].

Podemos ahora introducir, por definición, un conjunto de variantes que estudie el fenómeno, de acuerdo con lo siguiente:

Si nos situamos en un determinado instante y referimos a él todas las variantes, estudiamos el proceso como instantáneo, pues proyectamos todos los posibles resultados a lo largo del eje del tiempo, en ese instante. Desaparece así el eje al que estaban ligadas las variantes, pues cada una de estas nuevas variantes lleva implícito el tiempo actuarial diferencia entre ese instante al que la referimos y el instante en que sería generada dicha variante.

Así este conjunto de variantes, que no es difícil ver que se trata de una *suma de variantes* (Estadística Estática), equivale en ese instante al proceso estocástico (Estadística Dinámica).

Aquí se referirán todas las variantes al extremo inferior del intervalo $(0, T]$, es decir, al instante origen del contrato.

De ahora en adelante se especificará cada resultado posible del contrato por su indemnización y, por lo tanto, se referirá al origen:

1.° Los resultados posibles: Aparecerán las indemnizaciones multiplicadas por el factor $e^{-\delta t}$.

2.° Las probabilidades: Vendrán afectadas de la probabilidad de no ocurrencia del siniestro (reclamación) en el subintervalo $(0, t]$, siempre que cada siniestro no pueda ocurrir más que una vez en $(0, t]$ y no en otro caso.

para la variante generada en cualquier instante t.

Veamos desde un punto de vista práctico lo que se ha hecho.

Se considera un suceso cualquiera que ocurra en un instante t_h como distinto de ese mismo suceso si ocurre en otro instante t_j $(h \neq j)$ siendo la diferencia de indemnización (valor actual al origen) entre ambos $k(e^{-\delta j} - e^{-\delta h})$, si k es la indemnización de ese suceso. Todos estos posibles sucesos o resultados del contrato, que corresponden a todos los puntos del plano, comprendidos los que tienen probabilidad distinta de cero, en el intervalo bidimensional $[0, N]$, $(0, T]$, los acumulamos en un solo eje que pasa por el origen de coordenadas y que es precisamente el eje $0n$. También se acumulan las distintas combinaciones que pueden darse en un solo contrato, con respecto a estos resultados. Cada uno de estos resultados acumulados tendrá una probabilidad, y en total se distribuirán en torno a su valor medio de un determinado modo que vamos a investigar.

No se trata, pues, del estudio de una función marginal, ya que aquí no se acumulan las probabilidades de aparecer cada suceso a través del tiempo en una sola, sino que se tratan estas probabilidades como pertenecientes a sucesos distintos.

La nueva variante

$$X = \sum_{\substack{t>0 \\ t \leq T}} X_t \ (1) \qquad X_t = \text{variante estática correspondiente a la } X(t) \text{ del proceso.}$$

que nos define el modo de estar distribuídas las probabilidades de los distintos sucesos posibles del contrato, es decir, de las distintas trayectorias posibles, aparece como una suma de infinitas variantes. El valor medio de la distribución de esta variante (que llamaremos distribución del contrato), será:

$$E(X) = E \Sigma X_t = \Sigma E(X_t) = \int_0^T m(t)\, dt = P \text{ (prima única del contrato)}$$

pues el valor medio de cada variante, si el riesgo es asegurable, es

$$E(X_t) = m(t)\, dt$$

un infinitésimo respecto de *t*, como se demostrará en B). Y la varianza

$$D^2(X) = D^2 \Sigma X_t = \int_0^T \sigma^2(t) dt + 2 \int_0^T \int_0^T \rho_{t_z\, t_y}\, \sigma(t_z) \sigma(t_y)\, dt_z\, dt_y$$

Dividiendo el intervalo (0, T] en infinitos subintervalos que tengan como extremos todos los puntos de abscisa racional α_n, y haciendo corresponder a cada intervalo $(\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ una variante ξ_n que recoja los posibles resultados del contrato en $(\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ con sus probabilidades de acaecimiento, la variante que nos define la distribución del contrato es

$$X = \sum_1^\infty \xi_t$$

(1) Esta igualdad tiene un mero valor simbólico, siendo en realidad $X = \lim. \sum_{t=1}^{T} X'_t$, habiendo dividido el intervalo (0, T] en T subintervalos, recogiendo X'_t las probabilidades de siniestralidad en el intervalo t—ésimo, y cuando el mayor subintervalo tiende a cero y el número de subintervalos a infinito.

y su valor medio y varianza

$$E(X) = \sum_{1}^{\infty} E(\xi_t) = \sum_{1}^{\infty} m_t$$

$$D^2(X) = \sum_{1}^{\infty} D^2(\xi_t) + \sum_{i=/=j} \rho_{ij} D(\xi_i) D(\xi_j) = \sum_{1}^{\infty} \sigma^2_t + \sum_{i=/=j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Haciendo la hipótesis de la distribución uniforme, es decir, que los resultados acaecen a mitad de los intervalos $(\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, las variantes así definidas cumplen

$$E(X) = \sum_{1}^{\infty} m_t \simeq \int_0^T m(t)\, dt$$

$$D^2(X) = \sum_{1}^{\infty} \sigma_t{}^2 + \sum_{i=/=j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \simeq \int_0^T \sigma^2(t)\, dt +$$

$$+ 2 \int_0^T \int_0^T \rho_{t_z t_y}\, \sigma(t_z)\, \sigma(t_y)\; dt_z\, dt_y$$

Si el contrato de Seguro es de tal naturaleza que las variantes sean independientes, por tratarse de una suma de infinitas (ya con las consideraciones hechas, infinito numerable), dentro de las condiciones del teorema central del límite, la distribución del contrato será la normal

$$f_x(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi \int_0^T \sigma^2(t)\, dt}}\; e^{-\frac{1}{2} \frac{\left[x - \int_0^T m(t)\, dt\right]^2}{\int_0^T \sigma^2(t)\, dt}} \quad (1)$$

De este modo, aparece la prima única del contrato como un simple parámetro de esta distribución: el valor medio. La prima anual se obtendría de cualquiera de los dos modos

$$P_a = \frac{P}{a_{x\,\overline{n|}}} \quad , \quad P_a = \frac{P}{a_{\overline{n|}}}$$

según que su pago dependa o no de la vida del asegurado.

---

(1) Es fácil demostrar que la distribución exacta es

$$P(x = \nu) = \frac{\left(\int_0^T m(t)\, dt\right)^{\nu}}{\nu!}\, e^{-\int_0^T m(t)\, dt}$$

si consideramos el campo de variación discreto.

Si las variantes son dependientes, el estudio de la función de distribución no es tan fácil, pues no se puede pasar a la normal. La solución es buscar una función aproximada a la de distribución. Puede obtenerse del siguiente modo: Dividamos el intervalo de definición (0, T] en un número finito de subintervalos semiabiertos, por ejemplo, en T subintervalos de amplitud unidad, hagamos corresponder a cada uno una variante que recoja las probabilidades de acaecimiento del siniestro en sus diversas cuantías durante ese intervalo de tiempo, y en cualquier instante de él (o cualesquiera de ellos), para mejor aproximación haciendo la hipótesis de la distribución uniforme, y entonces la función de densidad del contrato aparece como la correspondiente a una suma de un número finito de variantes dependientes, que puede determinarse aplicando reiteradamente la fórmula (las dificultades prácticas únicamente surgen por el desconocimiento de la distribución conjunta de cada dos sucesivas variantes)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x-z} dF(z,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x-z} dF_1(z)\, dF(y/z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dF_1(z) \int_{-\infty}^{x-z} dF(y/z) = \int_{-\infty}^{\infty} F({}^{x-z}/_{z})\, dF_1(z), \qquad F'(x) = f(x)$$

Siendo las variantes dependientes, veamos, además, el siguiente modo de razonar, que nos permite ampliar a este caso el teorema central del límite.

Sean T fuerzas de siniestralidad $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_T$ que actúan sucesivamente en el orden que indican los subíndices. Consideremos estas fuerzas como variantes independientes y designemos por x_ν al estado del fenómeno inherente al contrato cuando han actuado las fuerzas $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$, definiendo este estado x_ν como igual a $N - y_\nu$ (1) ($y_\nu =$ siniestralidad total, habida cuando han actuado esas fuerzas; N = siniestralidad máxima posible en un instante). El incremento de este estado es proporcional a la fuerza $\xi_{\nu+1}$ y al estado ya alcanzado (suponemos el caso más simple: el coeficiente de proporcionalidad igual a 1)

$$\Delta x_\nu = \xi_{\nu+1} \cdot x_\nu \quad \text{o sea} \quad \sum_1^T \xi_r = \sum_0^{T-1} \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{x_\nu} \quad ,, \ \Delta x_\nu < 0$$

(1) Si el siniestro sólo puede presentarse una vez en (0, T], pues si pudiera presentarse un número arbitrario de veces, se haría $x_\nu = \nu N - y_\nu$.

Si las fuerzas de siniestralidad actúan de modo continuo y cada una sólo influye de modo infinitesimal en el estado del contrato, tenemos:

$$\sum_{\substack{t>0 \\ t\leq T}} \xi_t = -\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t} = l\,\frac{x_0}{x}$$

ξ_t son independientes, por hipótesis, y haciendo las mismas consideraciones que para las variantes X_t, bajo las condiciones generales de regularidad del teorema central del límite, se deduce que la función $l x_0/x$ se distribuye normal, y *x* tiene la función de densidad logarítmico-normal

$$\frac{1}{\sigma x_0 x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left[l\frac{x}{x_0} - m\right]^2}{2\sigma^2}}$$

$x_0 = N =$ estado inicial del contrato.
$x =$ estado final.

Si las variantes x_ν las suponemos tomadas al origen (por tanto, también la y_ν), todo el razonamiento se mantiene. En $x = N - y$, $0 \leq y \leq \infty$, $-\infty \leq x \leq N$ *y* pasa a representar la siniestralidad total habida en (0, T], valorada al origen, siendo, por tanto, la función de densidad del contrato la correspondiente a *y*:

$$\frac{1}{\sigma(N-y)N\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\left[l\frac{N}{N-y} - m\right]^2}{2\sigma^2}}$$

Hay contratos en los cuales, siendo las variantes dependientes, es sumamente sencillo hallar la función de probabilidad de la distribución del contrato, por ejemplo, un seguro temporal *m*, edad *x* y capital 1: la probabilidad de que la indemnización en (0, m] alcance, valorada al origen, un valor dentro del intervalo $(e^{-\delta(t+dt)}, e^{-\delta t})$ es,

$$t \leq m \qquad {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

y, por tanto, la función de densidad de la distribución del contrato,

$$f_x(e^{-\delta t}) = {}_t p_x\, \mu_{x+t}$$

Cuando se trate de contratos en los cuales sea posible más de un siniestro en el intervalo de definición, la función de probabilidad del contrato puede introducirse por un camino puramente matemático (y no por el estadístico seguido), ya que, siendo ${}_{t/}\mu_{n,t}\,dt$ la probabilidad (valorada al origen) de que ocurra un siniestro de cuantía n exactamente en el instante (t, t + dt) y f(x,t)dx la probabilidad de que la siniestralidad total valorada al origen en el intervalo (0, t] esté en el intervalo (x, x + dx), la probabilidad buscada (cuando t = T) cumple la siguiente ecuación

$$f(x, t+dt) = \int_0^x f(x-h, t)\, {}_{t/}\mu_{h,t}\, dt\, dh + f(x, t)\left[1 - \int_0^N {}_{t/}\mu_{n,t}\, dn\, dt\right]$$

o sea

$$f'_t(x, t) = \int_0^x f(x-h, t)\, {}_{t/}\mu_{h,t}\, dh - f(x, t)\int_0^N {}_{t/}\mu_{n,t}\, dn$$

de donde integrando con respecto a *t*, obtenemos

$$f(x, t) = \int_0^t \int_0^x f(x-h, t)\, {}_{t/}\mu_{h,t}\, dh\, dt - \int_0^t f(x, t)\, dt \int_0^N {}_{t}\mu_{n,t}\, dn$$

(pues f (x,0) = 0)

ecuación integral en dos variables, de la cual podría obtenerse f(x, t).

La ecuación resulta más fácil si el contrato sólo admite un número finito de cuantías de siniestralidad en cada instante, y más aún si el riesgo es monógrado y el siniestro sólo puede presentarse una vez en todo el intervalo de definición. Así sucede en el caso mencionado antes del Seguro temporal, en el cual se verifica la ecuación

$$f(e^{-\delta(z+dz)}, t+dt) = f(e^{-\delta z}, t) + \left[1 - \int_0^z {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, dt\right]\mu_{x+z}\, dz$$

cuya solución es inmediata e igual a la obtenida antes:

$$f'_t(e^{-\delta z}, t) = \mu_{x+z}\left(1 - \int_0^z {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, dt\right) = \mu_{x+z}\, {}_z p_x$$

B) La distribución del contrato puede estudiarse también directamente a través de la variante bidimensional (ξ_n, ξ_t) (ξ_n recoge los posibles resultados con sus probabilidades y ξ_t todos los momentos posibles de acaecimiento de los siniestros, con sus probabilidades).

Este estudio vamos a hacerlo especialmente para los riesgos elementales, construyendo de paso un *modelo estadístico* de los mismos.

Sea

$\Phi(n, t) =$ probabilidad de que ocurra cualquier siniestro de (0, n] en cualquier instante del intervalo (0, t]. Función de distribución de (ξ_n, ξ_t)

$\theta(n, t) =$ número de no siniestrados en *t* por cuantía *n* (fija), del conjunto inicial $\theta(0,0)$.

$$\Phi(n,t) = \int_0^n \frac{\theta(0,0) - \theta(n,t)}{\theta(0,0)} dn, \quad \theta(n,t) = \theta(0,0)\left[1 - \Phi'_n(nt)\right] \begin{cases} 0 < n \leq N \\ 0 < t \leq \omega \end{cases}$$

Se verifica por hipótesis

$$\begin{array}{ll} \theta(n, \omega_n) = 0 & \Phi(n, \omega_n) = \Phi(n, \infty) = \Phi(\infty, \infty) = 1 \\ \theta(n, 0) = \theta(0,0) & \Phi(n,0) = \Phi(0,0) = 0 \\ \theta(0, t) = \Upsilon(t) & \Delta_t \Phi > 0, \ \lim. \Delta_t \Phi = 0 \\ \Delta_t \theta(n, t) > 0 & \\ \lim. \Delta_t \theta = 0 & \Phi(x,t) = \Phi(n,y) = \Phi(xy) = 0 \text{ si } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \\ \theta(\Omega, t) = \theta(0,0) & \Phi(n,t) = \Phi_1(n)\Phi_2(t) \quad (\xi_n \text{ y } \xi_t \text{ indep.}) \end{array}$$

Los valores ω_n forman un conjunto infinito no numerable, y crecen a medida que crece la diferencia $|n-m|$ (siendo *m* el valor medio). Este conjunto tiene, al menos, un extremo inferior, también uno superior ω tal que $\theta(n, \omega) = 0$, $\Phi(n, \omega) = 1$, para cualquier *n*.

El número de siniestrados, una vez al menos, en (t, t + dt) por cuantía n =/= 0 fija es,

$$\theta(n, t) - \theta(n, t + dt) = - d_t \theta(n, t)$$

y la probabilidad instantánea (para el instante *t*), de siniestralidad por cuantía n =/= 0 fija,

$$\frac{- d_t \theta(n, t)}{\theta(n, t)} = \mu_{n,t} dt$$

Operaremos con valores medios de $\theta(n, t)$, y no con los suministrados por la experiencia estadística. En este caso las hipótesis las haremos sobre μ, pues al determinar valores medios, determina a su vez modelos estadístico-matemáticos de siniestralidad.

Hipótesis:

1) Existe un valor o cuantía *más probable* de siniestralidad λ. O sea, max. $\mu_{n,t} = \mu_{\lambda,t}$.

2) La probabilidad instantánea de siniestralidad por cualquier cuantía n=/= 0, es siempre igual e independiente del instante que se considere y dependiente sólo de la diferencia $n - \lambda$, del siguiente modo:

$$\frac{\Delta_n \mu_{n,t}}{\mu_{n,t}} = -K(n-\lambda)\Delta n \qquad K > o$$

para un incremento infinitesimal,

$$\frac{-d_n \mu_{n,t}}{\mu_{n,t}} = -K(n-\lambda)\,dn \qquad \begin{cases} 0 < n \leq N \\ 0 < t \leq \omega \end{cases}$$

De donde

$$l\,\mu_{n,t} = -K\frac{(n-\lambda)^2}{2} + lc \;,, \qquad \mu_{n,t} = c \cdot e^{-K\frac{(n-\lambda)^2}{2}}$$

Para el límite ω tenemos, independientemente de n,

$$\int_0^\omega \mu_{n,t}\,dt = \mu_{n,t}\int_0^\omega dt = 1, \quad \text{ó sea} \quad c \cdot \omega \cdot e^{-K\frac{(n-\lambda)^2}{2}} = 1$$

quedando k determinada por la relación

$$(n-\lambda)^2 K = lc^2 + l\,\omega^2$$

Si las muestras están bien elegidas, los valores ω seguirán la ley normal de errores de Gauss, con media ω desconocida, que puede estimarse por la media muestral $\bar{\omega}$.

El valor c puede introducirse por hipótesis, sometiéndola luego a contraste.

Más adelante se determinará λ.

Tenemos para las funciones $\theta(n,t)$ y $\Phi(n,t)$

$$\frac{d_t\,\theta(n,t)}{\theta(n,t)} = -c \cdot e^{-K\frac{(n-\lambda)^2}{2}} \;,, \quad l\frac{\theta(n,t)}{\theta(n,o)} = -\int_0^t c \cdot e^{-K\frac{(n-\lambda)^2}{2}}\,dt$$

$$\theta(n,t) = \theta(0,0)\,e^{-c\,t\,e^{-K\frac{(n-\lambda)^2}{2}}}$$

$$\Phi(n,t)=\int_0^n\left[1-e^{-cte^{-K\frac{(n-\lambda)^2}{2}}}\right]dn \qquad \begin{array}{l}0<n\leq N\\ 0<t\leq\omega\end{array}$$

Para $n = 0$ tenemos.

$\theta(0, t)$ = número de siniestrados por cualquier cuantía $n \neq 0$, hasta t (en $[0, t]$).

$\theta(0,t+dt) - \theta(0,t) = d_t\,\theta(0,t)$ = número de siniestrados en $(t, t + dt)$ por cualquier cuantía $n \neq 0$.

$$\frac{d_t\,\theta(0,t)}{\lim\limits_{\Delta n\to 0}\int_{\Delta n}^{N}\theta(n,t)\,dn}$$ = probabilidad instantánea de siniestrarse por cualquier cuantía $n \neq 0$.

$$1-\frac{d_t\,\theta(0,t)}{\lim\limits_{\Delta n\to 0}\int_{\Delta n}^{N}\theta(n,t)\,dn}$$ = probabilidad de no siniestrarse en $(t, t + dt)$.

Desde luego

$$d_t\,\theta(0,t)=\lim_{\Delta n\to 0}\int_{\Delta n}^{N}-\,d_t\,\theta(n,t)\,dn=0\,(t)\to 0$$

por tanto, la probabilidad de no siniestrarse se finita.

$$1-0\,(t)\to 1$$

Tenemos, además,

$$\theta(0,t)=\lim_{\Delta n\to 0}\int_{\Delta n}^{N}\int_0^t\theta(n,t)\,dt\,dn=\theta(0,0)-\lim_{\Delta n\to 0}\int_{\Delta n}^{N}\theta(n,t)\,dn$$

y $\Phi(0, t)$ puede hallarse en función de $\theta(0, t)$.

Para estimar λ, podemos hallar la media $\alpha_{01} = f(\lambda)$; α_{01} lo estimamos por la media muestral $\overline{y}$ y de esta estimación despejamos $\overline{\lambda}$.

En lugar del procedimiento seguido, pudiera intentarse ajustar el tanto instantáneo de siniestralidad, por el método expuesto por don Angel Vegas, para el caso del tanto de mortalidad, es decir, desarrollando el μ mediante funciones ortogonales.

Saliendo de los riesgos elementales, para el Seguro de Vida Entera, por ejemplo, si el colectivo siguiera la ley de Makeham, tendríamos

$$\mu_{1,t} = a + bc^t$$

$$\theta(n,t) \begin{cases} \theta(1,t) = \theta(0,0)\, e^{-at - \frac{b}{lc}(c^t - 1)} \\ \theta(0,t) = \theta(0,0) - \theta(1,t) = \theta(0,0) \left[1 - e^{-at - \frac{b}{lc}(c^t - 1)} \right] \end{cases}$$

$$\Phi(n,t) \begin{cases} \Phi(1,t) = \left[1 - e^{-at - \frac{b}{lc}(c^t - 1)} \right] \\ \Phi(0,t) = \dfrac{\theta(0,0) - \theta(0,t)}{\theta(0,0)} = \dfrac{\theta(1,t)}{\theta(0,0)} = e^{-at - \frac{b}{lc}(c^t - 1)} \end{cases}$$

C) Ahora ya estamos en condiciones de hallar la distribución de las variantes X_t, será, para la función de probabilidad en riesgos elementales,

$$n \neq 0 \qquad f_t(n)\,dn = \Phi''_{nt}(n,t)\,dn\,dt = 0(n,t) \;,,$$

$$f_t(0) = 1 - \lim_{\Delta n \to 0} \int_{\Delta n}^{N} f_t(n)\,dn = 1 - 0(t) \to 1$$

Es decir, la probabilidad de que ocurra cualquier suceso del intervalo $(n, n + dn)$, en el instante $(t, t + dt)$ ($n \neq 0$ y $t \neq 0$), es un infinitésimo respecto de *n* y de *t*. La probabilidad de no ocurrencia de siniestro en un instante $(t, t + dt)$ es igual a la unidad menos un infinitésimo respecto a *t*.

Y el valor medio, tal como se resaltó al principio caso de ser el riesgo asegurable,

$$E(X_t) = 0 \,.\, f_t(0) + \lim_{\Delta n \to 0} \int_{\Delta n}^{N} n\, f_t(n)\,dn = m(t)\,dt \to 0$$

En el caso de un contrato cuyas variantes X_t fuesen dependientes, sería interesante estudiar el coeficiente de correlación parcial de cada dos variantes, correspondientes a dos instantes de tiempo distintos, que, si la distribución conjunta no es conocida, puede estimarse por medio del r_{ij} muestral.

Cartera total

A) En un determinado momento de la vida del ente asegurador, habrá en vigor una serie de contratos, que, atendiendo al período que falta por transcurrir en cada uno, se trata de variantes,

$$X_1, X_2, \ldots, X_r \qquad X_i \text{ definida en } (0, T_i]$$