3

El factor de actualización actuarial

3.1 Introducción

Comenzaremos en este capítulo el estudio de uno de los temas fundamentales de la matemática de los seguros de vida: la valoración actual de capitales futuros cuya cuantía y/o vencimiento dependen del acaecimiento de un suceso aleatorio (pensemos en el fallecimiento o supervivencia de una persona).

Caracterizaremos los citados valores actuales como variables aleatorias, de las que tradicionalmente sólo se han considerado sus esperanzas matemáticas.

Para realizar dichas valoraciones son necesarias **bases técnicas** que informen de la ley financiera y tipo de interés empleado y también de las probabilidades de los sucesos de cuyo acaecimiento dependen la cuantía y vencimiento de los capitales.

En cuanto a la ley financiera, emplearemos la de **capitalización compuesta**; el tipo de interés utilizado en los cálculos actuariales se denomina **interés técnico** que no coincide necesariamente con el tipo de interés de mercado y es la rentabilidad que el asegurador garantiza en sus operaciones de seguro; por último, las leyes de supervivencia o las tablas de mortalidad a las que nos hemos referido en el capítulo anterior nos proporcionarán las citadas probabilidades..

3.2 Factor de Actualización Actuarial

3.2.1 Definición

Introduciremos el factor de actualización actuarial a partir de la siguiente sencilla operación de seguro: una persona de edad x recibirá un capital unitario si sobrevive dentro de n años, esto es, si alcanza con vida la edad $x + n$.

Ciertamente, al depender la prestación de la supervivencia o no de (x) a la edad $x + n$, tomaremos como variable aleatoria fundamental a T_x, tiempo de vida hasta la muerte o vida residual de (x), cuya función de distribución $G_x(t)$ supondremos conocida.

En este caso nos interesan dos sucesos:

* (x) alcanza con vida la edad x+n, esto es, $T_x > n$.
* (x) fallece antes de alcanzar la edad x+n, esto es, $T_x \leq n$.

Ambos poseen probabilidades conocidas ${}_np_x$ y ${}_nq_x$ respectivamente.

Por otra parte el valor actual de los capitales de la prestación, cuya cuantía depende del valor que tome T_x, puede expresarse mediante la siguiente función de T_x:

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} 0 \text{ si } T_x \leq n \\ v^n \text{ si } T_x > n \end{cases}$$

en la que $v = (1+i)^{-1}$ es el factor de actualización financiero para un periodo de un año y v^n el correspondiente a n años. El tanto anual i es el tipo de interés técnico de la operación.

Ciertamente Z es una variable aleatoria. Obtengamos sus principales momentos:

a) Su **esperanza matematica** o **valor actual actuarial,** es igual a

$$E(Z) = 0 \ {}_nq_x + v^n \ {}_np_x$$

se representa por ${}_nE_x$ y se denomina **factor de actualización actuarial**. Por tanto, dicho factor se define como

$$ {}_nE_x = v^n \ {}_np_x \tag{3.1}$$

b) **Varianza**. Puesto que

$$E(Z^2) = 0^2 \ {}_nq_x + v^{2n} \ {}_np_x = v^{2n} \ {}_np_x$$

resulta que

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = v^{2n} \ {}_np_x - v^{2n} \ ({}_np_x)^2 =$$

$$= v^{2n} \ {}_np_x(1 -_n p_x) = v^{2n} \ {}_np_x \ {}_nq_x \tag{3.2}$$

El factor de actualización actuarial se define, pues, como la esperanza matemática (o valor actual actuarial, en terminología actuarial) de una cierta variable aleatoria. Una definición equivalente, más sencilla aunque incorrecta, se basa en la interpretación determinista de la tabla de mortalidad que, como sabemos, supone que las variables l_x representan el número exacto de individuos del colectivo inicial que han alcanzado con vida la edad x.

Desde la perspectiva del modelo determinista podemos plantear la citada operación de seguro a partir del siguiente problema: ¿qué cantidad de dinero C ha de pagar cada una de las l_x personas vivas a la edad de x años para que las que sobrevivan dentro de n años puedan recibir una unidad monetaria?.

Teniendo en cuenta que dentro de n años habrá con seguridad l_{x+n} personas vivas (supuesto que el número de supervivientes a dicha edad coincide exactamente con lo especificado por la ley de supervivencia o tabla de mortalidad empleada), puede plantearse la siguiente equivalencia financiera:

$$C.l_x = v^n \; l_{x+n}$$

de donde

$$C = v^n \; \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Así, desde esta perspectiva,

$$C = \; _nE_x$$

y por tanto puede definirse $_nE_x$ como el valor actual de una unidad monetaria disponible dentro de n años (en caso de supervivencia). Este razonamiento, aunque basado en una interpretación incorrecta de la tabla, permite observar una evidente semejanza entre los factores de actualización financiero y actuarial, lo que justifica la denominación de este último. No debemos olvidar, sin embargo, la definición correcta del factor de actualización actuarial como una esperanza matemática: la esperanza matemática del valor en x de una unidad monetaria disponible en x+n (en caso de supervivencia de (x)).

Calculemos, finalmente, la expresión del factor de actualización actuarial en tiempo continuo. Siendo $\delta = Ln(1+i)$ el tanto instantáneo de capitalización, sabemos que

$$v^n = e^{-\delta n} = e^{-\int_0^n \delta dt} = e^{-\int_x^{x+n} \delta dt}$$

y que

$$_np_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_t dt}$$

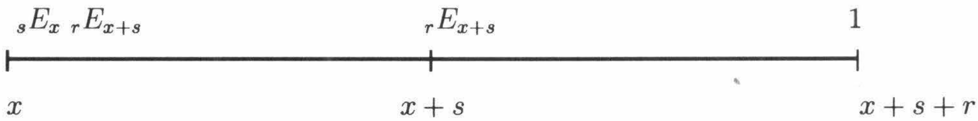
por tanto

$$_nE_x = v^n . _np_x = e^{-\int_x^{x+n} \delta dt} \; e^{-\int_x^{x+n} \mu_t dt} = e^{-\int_x^{x+n} (\delta + \mu_t) dt} \tag{3.3}$$

3.3 Propiedades

Nos referiremos, en primer lugar, a la propiedad de **escindibilidad** del factor de actualización actuarial:

$$_{s+r}E_x = \; _sE_x \; _rE_{x+s} \tag{3.4}$$



Su demostración es elemental:

$$_sE_x\ {}_rE_{x+s} = e^{-\int_x^{x+s}(\delta+\mu_t)\ dt}\ e^{-\int_{x+s}^{x+s+r}(\delta+\mu_t)\ dt} = e^{-\int_x^{x+s+r}(\delta+\mu_t)\ dt} = {}_{s+r}E_x$$

La propiedad de escindibilidad puede enunciarse de la siguiente forma: el valor en x de una unidad monetaria disponible en x+s+r en caso de supervivencia, $_{s+r}E_x$, es igual al valor en x+s de una unidad monetaria disponible en x+s+r en caso de supervivencia, $_rE_{x+s}$, por el valor en x de una unidad monetaria disponible en x+s en caso de supervivencia, $_sE_x$. De nuevo observamos un evidente paralelismo en el comportamiento de los factores de actualización financiero y actuarial.

Estudiaremos a continuación la variación del factor de actualización actuarial respecto a variaciones de δ, x y n. Recurriremos para ello al cálculo de las correspondientes derivadas parciales. Siendo

$$_nE_x = e^{-\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt}$$

se obtiene con facilidad:

a)

$$\frac{\partial_n E_x}{\partial\delta} = e^{-\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt}.\frac{\partial}{\partial\delta}\left[-\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt\right] =$$

$$= e^{-\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt}.\left[-\int_x^{x+n}dt\right] =_n E_x(-n)$$

y ya que $_nE_x > 0$, tenemos que

$$\frac{\partial_n E_x}{\partial\delta} < 0$$

resultado intuitivamente claro: el factor de actualización actuarial disminuye al incrementarse el tipo de interés de valoración (como sucede también con el factor de actualización financiero).

b)

$$\frac{\partial_n E_x}{\partial x} = e^{-\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt} \frac{\partial}{\partial x}\left[-\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt\right] =$$

$$= e^{-\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt}\left(\mu_x - \mu_{x+n}\right) = {}_nE_x\left(\mu_x - \mu_{x+n}\right)$$

En este caso, el signo de la derivada depende del signo de la diferencia $(\mu_x - \mu_{x+n})$. Así, en el tramo de edad en que el tanto instantáneo de mortalidad es creciente tendremos

$$\frac{\partial_n E_x}{\partial x} < 0$$

es decir, el factor disminuye con la edad. Evidentemente, se obtiene el resultado contrario en el tramo en el que μ_x es decreciente. Finalmente, en el caso particular de que el tanto instantáneo de mortalidad sea constante tendremos que el factor de actualización actuarial se mantiene constante al variar la edad (siempre para n y δ fijos).

c)

$$\frac{\partial_n E_x}{\partial n} = e^{-\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt} \frac{\partial}{\partial n}\left[-\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt\right] =$$

$$= e^{-\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt}\left(-(\delta+\mu_{x+n})\right) = {}_nE_x\left(-(\delta+\mu_{x+n})\right)$$

por lo que al ser δ y μ_x siempre positivos,

$$\frac{\partial_n E_x}{\partial n} < 0$$

Ejemplo 1 *Para un tanto instantáneo de mortalidad según la ley de Makeham*

$$\mu_x = 0.00065 + 0,00006\ 1.09^x,$$

en la figura 3.1 se representa el factor de actualización actuarial ${}_{15}E_x$ *para* x *entre 15 y 80 años y para un tipo de interés anual del 0.04 (línea de puntos) y del 0.06 (línea continua).Hagamos notar el efecto en el factor de las edades elevadas.*

En la figura 3.2 representamos el factor de actualización actuarial ${}_nE_{30}$ *para* n *entre 1 y 20 años y para un tipo de interés anual del 0.04 (línea de puntos) y del 0.06 (línea continua). Notemos la importancia del tipo de interés según se incrementa n.*

Finalmente en la figura 3.3 se representan ${}_{15}E_{30}$ *(línea de puntos) y* ${}_{15}E_{50}$ *(línea continua) como funciones del tipo de interés (entre 0,01 y 0,1)*

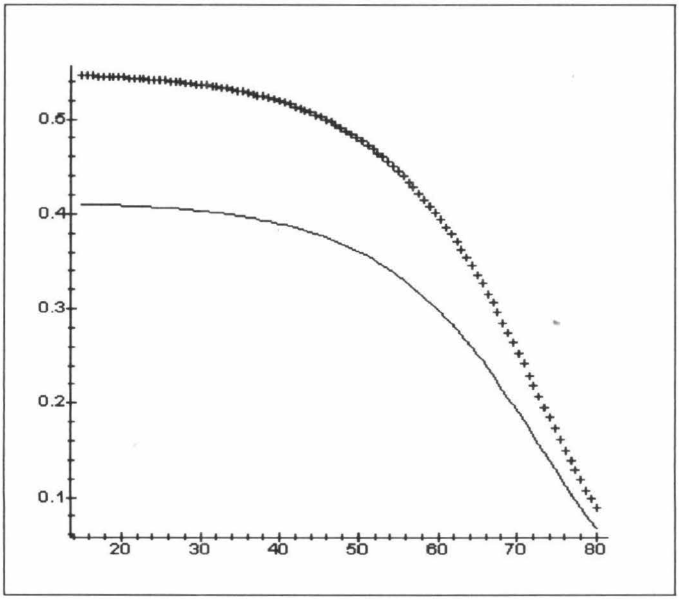


figura 3.1

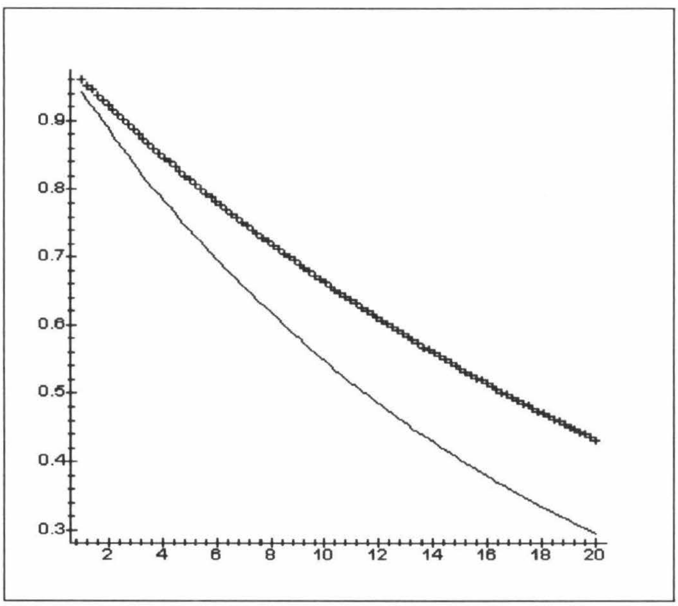


Figura 3.2

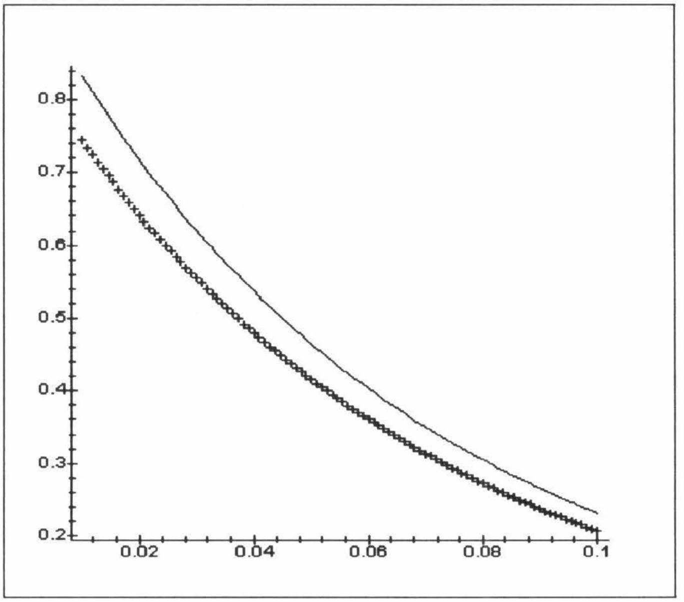


Figura 3.3

3.4 Factor de capitalización actuarial

Para entender correctamente el factor de capitalización actuarial hemos de realizar el siguiente razonamiento: suponiendo que una persona de edad x entrega un capital unitario a cambio de recibir un capital C si alcanza con vida la edad x+n, parece claro que C ha de ser aquel capital cuyo valor actual actuarial sea 1, esto es,

$$C \ {}_nE_x = 1$$

o sea,

$$C = \frac{1}{{}_nE_x} = \frac{1}{v^n \ {}_np_x} = e^{\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt} \tag{3.5}$$

que es el denominado **factor de capitalización actuarial.**

En términos del modelo determinista deberíamos plantearnos el siguiente problema: si cada una de las l_x personas vivas a la edad x entrega un capital unitario, ¿qué capital C podrá recibir cada uno de los l_{x+n} supervivientes a la edad x+n (cuyo número es conocido exactamente)?.

La solución es sencilla: dentro de n años el capital a repartir entre los l_{x+n} supervivientes será

$$l_x \ (1+i)^n$$

por lo que a cada uno le corresponderá

$$C = \frac{l_x\ (1+i)^n}{l_{x+n}} = \frac{1}{\frac{l_{x+n}}{l_x}\ (1+i)^{-n}} = \frac{1}{{}_nE_x}$$

En el siguiente apartado probaremos la igualdad

$$\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{1}{{}_tE_x}\ \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}} \quad (t < n) \tag{3.6}$$

cuya interpretación dejamos al lector.

3.5 Funciones de conmutación

Con la finalidad fundamental de facilitar los cálculos actuariales se han empleado tradicionalmente las denominadas **funciones de conmutación**. Aunque su empleo en la actualidad es escaso debido a la gran facilidad con que los ordenadores realizan dichos cálculos, conviene referirnos a ellas.

Asimismo, el empleo de dichas funciones de conmutación permite en algunas ocasiones realizar con mayor facilidad algunos desarrollos teóricos.

La primera de las funciones de conmutación se representa con la letra D, siendo

$$D_x = v^x\ l_x$$

Es posible expresar el factor de actualización actuarial mediante esta función, ya que

$${}_nE_x = v^n\ {}_np_x = v^n\ \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^{x+n}}{v^x}\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{3.7}$$

Por tanto, al encontrarse tabulados los valores de esta función para distintos tipos de interés, es posible realizar con facilidad los correspondientes cálculos. Así, por ejemplo, si en una tabla encontramos (para un cierto tipo de interés) los valores

$$D_{30} = 168375.488;\ D_{40} = 92650.953$$

entonces tendremos que

$${}_{10}E_{30} = \frac{D_{40}}{D_{30}} = \frac{92650.953}{168375.488} = 0.55026$$

Probemos finalmente, usando la expresión anterior, la igualdad

$$\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{1}{{}_tE_x}\,\frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}} \quad (t < n) \tag{3.8}$$

En efecto,

$$\frac{1}{{}_tE_x}\,\frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}} = \frac{D_x}{D_{x+t}}\,\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+n-t}} = \frac{D_x}{D_{x+t}}\,\frac{D_{x+t}}{D_{x+n}} = \frac{D_x}{D_{x+n}} = \frac{1}{{}_nE_x}$$

En capítulos posteriores introduciremos las restantes funciones de conmutación.

3.6 Intereses variables

Supongamos ahora que el tipo de interés de valoración no se mantiene constante a lo largo del tiempo que dura la operación.

Consideremos, en primer lugar, que el tipo de interés varía anualmente. Sean i_1, i_2 ,..., i_n los tipos correspondientes a los años $1, 2, ..., n$.

En este caso, el factor de actualización financiero asociado al intervalo de tiempo $[0, n]$ es

$$v_{[0,n]} = (1 + i_1)^{-1}\,(1 + i_2)^{-1}...(1 + i_n)^{-1}$$

Obviamente, cuando $i_1 = i_2 = ... = i_n$ se tiene que $v_{[0,n]} = v^n$.

El factor de actualización actuarial es en este caso

$${}_nE_x = v_{[0,n]}\;{}_np_x \tag{3.9}$$

Por otro lado, supongamos que el tanto instantáneo de capitalización varía continuamente con el tiempo según una función

$$\delta : [0, n] \to R$$

siendo $\delta(t)$ el valor del tanto instantaneo de capitalización a la edad $x + t$ de la cabeza considerada. Notemos que en el intervalo $[0, n]$ la citada cabeza se encuentra entre las edades x y $x + n$.

En tal caso, el factor de actualización financiero asociado al intervalo de tiempo $[0, n]$ será

$$v_{[0,n]} = e^{-\int_0^n \delta(t)\,dt}$$

Y el factor de actualización actuarial será

$${}_nE_x = v_{[0,n]}\;{}_np_x = e^{-\int_0^n \delta(t)\,dt}\;e^{-\int_0^n \mu_{x+t}\,dt} = e^{-\int_0^n (\delta(t)+\mu_{x+t})\,dt} \tag{3.10}$$

El lector puede comprobar que con tipos variables sigue verificándose la propiedad de escindibilidad

$${}_{s+r}E_x = {}_sE_x\;{}_rE_{x+s} \tag{3.11}$$

3.7 Ejercicios

.1. Demuestre las siguientes relaciones:

(a)

$$ {}_nE_x = \frac{{}_{x+n}E_0}{{}_xE_0} $$

(b)

$$ \frac{d}{dx}D_x = -D_x(\mu_x + \delta) $$

Solución:

(a)

Recordemos que

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

Por tanto,

$$ {}_{x+n}E_0 = \frac{D_{x+n}}{D_0} $$

$$ {}_xE_0 = \frac{D_x}{D_0} $$

y en consecuencia,

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{\frac{D_{x+n}}{D_0}}{\frac{D_x}{D_0}} = \frac{{}_{x+n}E_0}{{}_xE_0} $$

(b)

En efecto,

$$ \frac{d}{dx}D_x = \frac{d}{dx}(v^x l_x) = l_x\frac{d}{dx}v^x + v^x\frac{d}{dx}l_x = -l_x v^x\delta - l_x v^x \mu_x = $$

$$ = -l_x v^x(\delta + \mu_x) = -D_x(\mu_x + \delta) $$

puesto que

$$ \frac{d}{dx}v^x = v^x \log(v) = -v^x\delta $$

$$ \frac{d}{dx}l_x = l_0 s'(x) = -l_0 s(x)\mu_x = -l_x\mu_x $$

2. Calcule las derivadas parciales del factor de capitalización actuarial respecto de δ, x y n.

Solución:

Puesto que el factor de capitalización actuarial es igual a

$$\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{1}{v^n \ {}_np_x} = e^{\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt}$$

tendremos que

$$\frac{\partial}{\partial\delta}(\frac{1}{{}_nE_x}) = e^{\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt}\left(\int_x^{x+n} dt\right) = \frac{n}{{}_nE_x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{{}_nE_x}) = e^{\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt}\ (\mu_{x+n} - \mu_x) = \frac{\mu_{x+n} - \mu_x}{{}_nE_x}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{{}_nE_x}) = e^{\int_x^{x+n}(\delta+\mu_t)dt}\ (\delta + \mu_{x+n}) = \frac{\delta + \mu_{x+n}}{{}_nE_x}$$

3. Suponga que una persona de edad x cobrará el valor capitalizado durante n años de una unidad monetaria al cumplir la edad x+n, en caso de llegar con vida a dicha edad. Calcule la esperanza matemática de dicho valor y compruebe si coincide con el factor de capitalización actuarial.

Solución:

El valor buscado depende obviamente de T_x , vida residual de (x), por lo que se trata de una variable aletoria que toma los siguientes valores y probabilidades:

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} 0 \text{ si } T_x \leq n, \text{ con probabilidad } {}_nq_x \\ v^{-n} \text{ si } T_x > n, \text{ con probabilidad } {}_np_x \end{cases}$$

La esperanza de dicha variable es igual a

$$v^{-n} \ {}_np_x$$

valor que obviamente no coincide con el factor de capitalización actuarial, ya que, como sabemos, este último es igual a

$$\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{1}{v^n \ {}_np_x}$$

Es más, por ser ${}_np_x$ una probabilidad se verificará obviamente que $({}_np_x)^2 \leq 1$ y, en consecuencia,

$$v^{-n} \ {}_np_x \leq \frac{v^{-n}}{{}_np_x} = \frac{1}{{}_nE_x}$$