4

Seguros de vida

4.1 Introducción

En este capítulo comenzamos el estudio de los **seguros de vida**, caracterizados porque el pago del capital estipulado en el contrato depende de la supervivencia o fallecimiento del asegurado.

Suele establecerse una distinción entre los seguros para el caso de muerte (el capital asegurado se paga a raíz del fallecimiento del asegurado) y los seguros para el caso de supervivencia (el capital o capitales se pagan al asegurado si vive en determinados momentos).

En este capítulo estudiaremos fundamentalmente los seguros para el caso de muerte, aunque también consideraremos alguna modalidad en la que se combinan prestaciones para el caso de vida y de muerte (**seguros mixtos**). En los epígrafes 4.2 a 4.5 estudiaremos las modalidades tradicionales: vida entera, temporal, diferido y mixto simple bajo las hipótesis de capitales asegurados y tipos de interés de valoración constantes. En el epígrafe 4.6 trataremos los seguros con capitales asegurados variables y en el 4.9 introduciremos el caso de tipos de valoración variables.

Los seguros para el caso de supervivencia se estudiarán en los dos capítulos siguientes, dedicados a las rentas actuariales.

Desde el punto de vista matemático, los seguros de vida se caracterizan porque tanto el momento en que vence el capital asegurado como, en algunas ocasiones, su cuantía, dependen del valor que tome la variable aleatoria vida residual T_x (o el número de años completos de vida hasta la muerte K_x). Su valor actual se caracterizará como una variable aleatoria de la que intentaremos conocer su distribución de probabilidad y sus principales momentos.

4.2 Seguro Vida Entera

El primer tipo de seguro que estudiaremos es el denominado **seguro vida entera.** En este el capital asegurado, que por el momento supondremos unitario y constante, se paga al ocurrir el fallecimiento del asegurado, sin limitación alguna en cuanto al momento del mismo.

En cuanto al estudio del valor actual de este seguro, distinguiremos dos supuestos: el primero consiste en que el pago se realice en el momento del fallecimiento, lo que resulta intuitivamente razonable pero presenta el problema de que se debe conocer la distribución de probabilidad de la variable vida residual de una cabeza de edad x; el segundo supuesto consiste en que el pago del capital asegurado se realice al final del año de fallecimiento, con la ventaja práctica de que para la realización de los cálculos basta con disponer de los datos proporcionados por las tablas de mortalidad, que como ya hemos indicado especifican la distribución de probabilidad de la variable K_x (número de años completos de vida hasta la muerte de una cabeza de edad x).

4.2.1 Pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento

Consideremos un seguro vida entera con capital asegurado unitario para una cabeza de edad x. Supuesto que el capital asegurado se pague en el momento del fallecimiento de la citada cabeza y que el tipo de interés técnico i es constante, el valor actual de la citada prestación es ciertamente una variable aleatoria que depende de la vida residual de (x), esto es,

$$Z = f(T_x) = v^{T_x} \quad (T_x \geq 0)$$

Antes de estudiar su distribución de probabilidad, obtendremos sus principales momentos:

a) Su **esperanza matemática** se representa mediante $\bar{A}_x$, siendo, elementalmente,

$$\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^{+\infty} v^t \, g_x(t) dt \tag{4.1}$$

donde, como ya es sabido, $g_x(t)$ representa la función de densidad de la vida residual de (x).

La esperanza matemática $\bar{A}_x$ se denomina **valor actual actuarial,** aunque más adelante lo llamaremos **prima única pura.**

b) Calculemos asimismo la **varianza** de Z. Es claro que

$$E(Z^2) = \int_0^{+\infty} v^{2t} \, g_x(t) \, dt$$

por lo que

$$Var(Z) = E(Z^2) - (\overline{A}_x)^2 \tag{4.2}$$

En general, el cálculo del momento de orden m respecto al origen de Z puede reducirse al de la esperanza matemática pero a un tanto instantáneo anual $\delta\ m$, siendo $\delta = Ln(1+i)$.

Ciertamente, si $v^t = e^{-\delta t}$,

$$E(Z^m) = \int_0^{+\infty} (e^{-\delta t})^m\ g_x(t)\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\delta\ m)t}\ g_x(t)\ dt$$

representándose

$$E(Z^m) = {}^m\overline{A}_x$$

Así, por ejemplo,

$$Var(Z) = {}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2 \qquad (4.3)$$

Hagamos notar que la existencia de la edad límite ω permite escribir $\omega - x$ como límite superior de las anteriores integrales.

Distribución de probabilidad del valor actual

El cálculo de las funciones de densidad y de distribución de los valores actuales de seguros y rentas es, en general, complicado. Sin embargo, el caso del seguro vida entera no presenta especial dificultad.

Siendo conocida la distribución de probabilidad de T_x , se trata de obtener la de la transformación $Z = v^{T_x}$.

Ya que la función $z = v^t = e^{-\delta t}$ es decreciente e invertible, llamando

$$h(z) = -\frac{Ln(z)}{\delta}$$

se demuestra fácilmente que

$$P(Z > z) = P(T_x \leq h(z))$$

esto es,

$$F(z) = 1 - G_x(h(z)) \qquad (4.4)$$

y además

$$f(z) = -g_x(h(z))\ h'(z) \qquad (4.5)$$

Es claro que la función de densidad del valor actual es (ya que $h'(z) = -\frac{1}{\delta\ z}$)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{{}_{h(z)}p_x . \mu_{x+h(z)}}{\delta . z} & si \quad 0 < z \leq 1 \\ 0 & si \quad z \leq 0 \text{ ó } z > 1 \end{cases} \qquad (4.6)$$

y la función de distribución

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ {}_{h(z)}p_x & si \quad 0 < z \leq 1 \\ 1 & si \quad z > 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

Ejemplo 2 *Para un tanto instantáneo de mortalidad según la ley de Makeham*

$$\mu_x = 0.00065 + 0.00006 \; 1.09^x,$$

analizaremos gráficamente la influencia de la edad y del tipo de interés en la forma de la función de densidad del valor actual de un seguro vida entera. En las gráficas siguientes se representan las funciones de densidad y distribución del valor actual de un seguro vida entera para una cabeza de 40 años (línea continua) y para una cabeza de 50 años (línea de puntos); en ambos casos el capital asegurado es la unidad y el tipo de interés anual de valoración es $i = 0.06$.

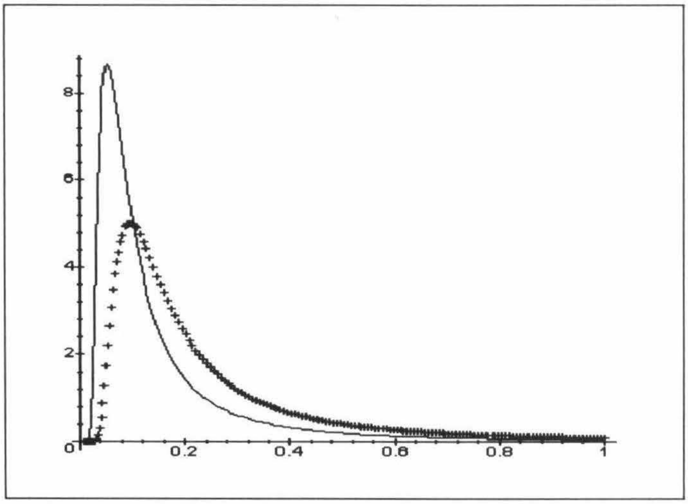


Figura 4.1

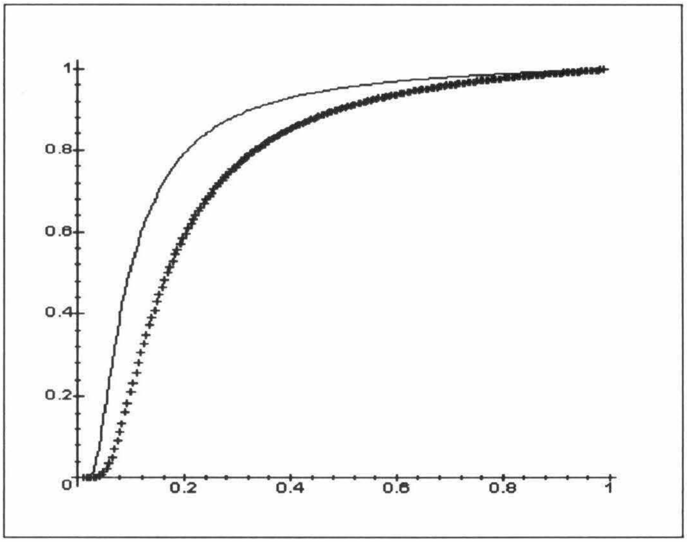


Figura 4.2

La siguiente gráfica se refiere a dos cabezas de 30 años valoradas a un tipo del 0.04 *(línea de puntos) y del* 0.06 *(línea continua):*

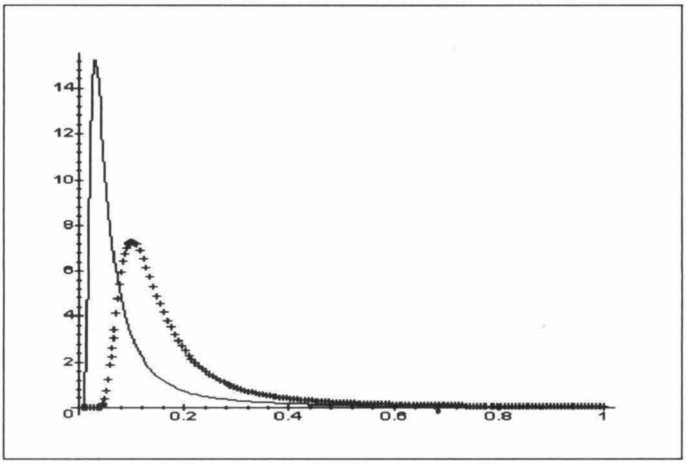


Figura 4.3

Ejemplo 3 *Las funciones de densidad y distribución del valor actual del seguro vida entera nos permiten resolver problemas de interés, como el cálculo de la probabilidad de que el valor actual supere a su esperanza matemática o a cualquier otro valor. Hagámoslo tomando como ley de mortalidad la del ejemplo anterior y para* $x = 30$ *e* $i = 0.04$.

Hemos de disponer de la función de densidad de la vida residual

$$g_{30}(t) = {}_tp_{30}\ \mu_{30+t} = e^{-\int_{30}^{30+t} 0.00065+0.00006\ 1.09^s ds}\ (0.00065 + 0.00006\ 1.09^{30+t})$$

Para el cálculo de la esperanza matemática del valor actual basta calcular la integral (hemos tomado como edad límite $\omega = 115$*, notemos que* $s(115) = 0.000001$*)*

$$\overline{A}_{30} = \int_0^{85} (1 + 0.04)^{-t}\ g_{30}(t)\ dt = 0.187129$$

La función de distribución del valor actual es

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ e^{-\int_{30}^{30-\frac{\ln(z)}{\ln(1.04)}} 0.00065+0.0006\ 1.09^s ds} & si \quad 0 < z \leq 1 \\ 1 & si \quad z > 1 \end{cases}$$

La probabilidad buscada es

$$1 - F(0.187129) = 0.3200268$$

Notemos que la distribución de probabilidad del valor actual de la renta posee una notable asimetría positiva (obsérvese la figura 4.3), ya que su coeficiente de asimetría es 2.5749.

Asimismo, no es especialmente difícil el cálculo de cualquiera de los percentiles. Así, por ejemplo, el percentil 90 se corresponde con aquél valor de la variable tal que

$$F(z) = 0.9$$

En este caso es $z = 0.34315383$.

4.2.2 Pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento

Bajo la hipótesis de pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento y asumiendo la edad límite ω, el valor actual de la prestación es ahora una variable aleatoria discreta que depende del número de años completos de vida hasta la muerte de (x), esto es,

$$Z = f(K_x) = v^{K_x+1} \quad K_x = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1$$

y así los valores de la variable serán $v^1, v^2, v^3..., v^{\omega-x}$ según que el número de años completos de vida hasta la muerte de (x) sea $0, 1, 2....., \omega - x - 1$ respectivamente.

La distribución de probabilidad de Z es sencilla de obtener, ya que sus valores toman las probabilidades q_x, ${}_{1/}q_x$, ${}_{2/}q_x$, ..., ${}_{\omega-x-1/}q_x$.

Es decir,

$$P(Z = v^{k+1}) = \ {}_{k/}q_x \quad para \quad k = 0, 1, 2.....\omega - x - 1$$

Asimismo, la esperanza matemática y la varianza de Z se calculan con facilidad:

a) **Esperanza matemática.** Se representa mediante A_x, siendo

$$A_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} \ {}_{k/}q_x \tag{4.8}$$

b) La **varianza.** Puesto que

$$E(Z^2) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{2(k+1)} \ {}_{k/}q_x$$

será

$$Var(Z) = E(Z^2) - (A_x)^2 \tag{4.9}$$

Al igual que en el caso continuo, ya que

$$v^{2(k+1)} = e^{-(2\delta)(k+1)}$$

podemos escribir

$$Var(Z) = \ {}^2A_x - (A_x)^2 \tag{4.10}$$

donde ${}^2A_x$ es la esperanza matemática calculada a un tanto instantáneo 2 δ.

Desde la perspectiva del modelo determinista, es posible interpretar A_x como la cantidad que ha de ingresar cada una de las l_x personas vivas a la edad x para que a cambio los beneficiarios de los d_x fallecidos a la edad x reciban una unidad monetaria al final del año de fallecimiento, los beneficiarios de los d_{x+1} fallecidos a la edad x+1 reciban una unidad monetaria al final del año de fallecimiento, etc.... Donde los valores exactos de $l_x, d_x, d_{x+1}, ...$ se suponen conocidos de acuerdo con la citada interpretación determinista.

En este caso, la operación de seguro puede caracterizarse como una operación financiera cierta. La equivalencia de la misma es clara:

$$A_x.l_x = v.d_x + v^2 d_{x+1} + ... + v^{\omega-x} \ d_{\omega-1} \tag{4.11}$$

esto es, el valor de lo entregado en este momento por los l_x supervivientes, $A_x.l_x$, ha de ser igual al valor actual de lo que van a recibir sus beneficiarios cuando fallezcan, $v.d_x + v^2 d_{x+1} + ... + v^{\omega-x} \ d_{\omega-1}$

Por tanto,

$$A_x = v\ \frac{d_x}{l_x} + v^2 \frac{d_{x+1}}{l_x} + ... + v^{\omega-x}\ \frac{d_{\omega-1}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x \qquad (4.12)$$

tal y como habíamos obtenido anteriormente.

4.2.3 Funciones de Conmutación

Estableceremos ahora dos nuevas **funciones de conmutación**, representadas por las letras C y M, donde

$$C_x = v^{x+1}\ d_x$$

y

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_{\omega-1}$$

Notemos que $C_\omega = 0$, ya que $d_\omega = 0$.

Pues bien,

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{v^{x+k+1} d_{x+k}}{v^x l_x}$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{C_{x+k}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x} \qquad (4.13)$$

Así, disponiendo de los valores de las funciones C, M y D es posible el cálculo de los valores actuales actuariales del seguro vida entera con relativa facilidad.

Observación 3 *En la práctica actuarial, la función C se calcula como*

$$\tilde{C}_x = v^{x+1/2}\ d_x$$

lo que implica la aceptación de la hipótesis, a efectos de cálculo, de pago del capital asegurado a mitad del año de fallecimiento.

Ciertamente,

$$C_x = v^{1/2}\ \tilde{C}_x \quad y \quad M_x = v^{1/2}\ \tilde{M}_x$$

donde

$$\tilde{M}_x = \tilde{C}_x + \tilde{C}_{x+1} + \tilde{C}_{x+2} + ... + \tilde{C}_{\omega-1}$$

El valor actual actuarial del seguro vida entera calculado bajo la hipótesis de pago del capital asegurado a mitad del año de fallecimiento, que representaremos mediante $\tilde{A}_x$, es

$$\tilde{A}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1/2} \, {}_{k/}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1/2} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{v^{x+k+1/2} \, d_{x+k}}{v^x l_x}$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{\tilde{C}_{x+k}}{D_x} = \frac{\tilde{M}_x}{D_x} \tag{4.14}$$

Evidentemente,

$$A_x = v^{1/2} \, \tilde{A}_x$$

4.3 Seguro Temporal

Estudiaremos a continuación el **seguro temporal**. Se caracteriza porque el capital estipulado en el contrato se paga al fallecimiento del asegurado, siempre que este suceda antes de una determinada fecha.

Para el estudio de esta modalidad seguiremos el mismo esquema que en el caso del seguro vida entera.

4.3.1 Pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento

Consideremos un seguro temporal para una cabeza de edad x cuyo capital asegurado, que supondremos unitario, se paga en el momento del fallecimiento de la citada cabeza siempre que este ocurra antes de que alcance la edad x+n. Supondremos asimismo que el tipo de interés técnico i es constante.

El valor actual de la citada prestación es una variable aleatoria

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} v^{T_x} & T_x \leq n \\ 0 & T_x > n \end{cases}$$

a) Su **esperanza matemática**, valor actual actuarial, se representa mediante $\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}$, siendo

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = E(Z) = \int_0^n v^t \, g_x(t) \, dt + 0 \, {}_np_x = \int_0^n v^t \, g_x(t) \, dt \tag{4.15}$$

b) Su **varianza** es, elementalmente,

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 \tag{4.16}$$

con

$$E(Z^2) = \int_0^n v^{2t}\, g_x(t)\, dt = \int_0^n e^{-(2\delta)t}\, g_x(t)\, dt$$

Pudiendo escribirse

$$E(Z^2) = {}^2\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$$

Es posible obtener con facilidad la función de distribución del valor actual:

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z < 0 \\ {}_np_x & si \quad 0 \leq z < v^n \\ {}_{h(z)}p_x & si \quad v^n \leq z < 1 \\ 1 & si \quad z \geq 1 \end{cases}$$

siendo

$$h(z) = -\frac{Ln(z)}{\delta}$$

Obsérvese que se trata de una función continua en todos los puntos salvo en $z = 0$, en el que existe un salto de cuantía ${}_np_x$. Se trata por tanto de una variable aleatoria mixta, que acumula en el punto $z = 0$ una probabilidad igual a ${}_np_x$, y que en el resto de los puntos tiene por función de densidad

$$f(z) = \begin{cases} \frac{{}_{h(z)}p_x.\mu_{x+h(z)}}{\delta.z} & si \quad v^n < z < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejemplo 4 *En la siguiente figura se representa la función de distribución del valor actual de un seguro temporal para una cabeza de 40 años, una temporalidad de 25 años, un tipo de interés técnico $i = 0.04$ y un tanto instantáneo de mortalidad*

$$\mu_x = 0.00065 + 0.00006\ 1.09^x,$$

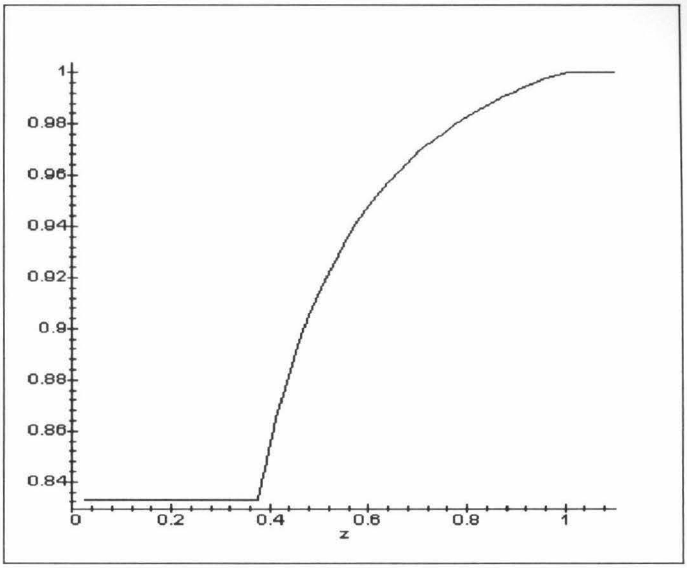


Figura 4.4

En la siguiente figura representamos la densidad (mixta con una masa de probabilidad en 0)

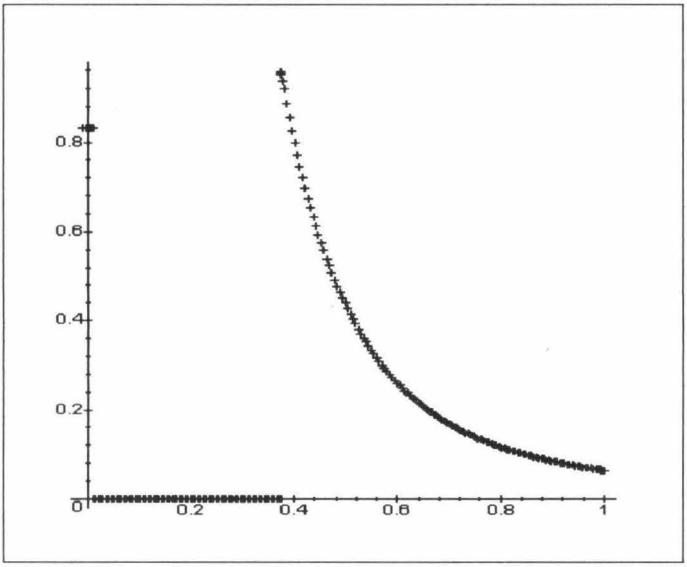


figura 4.5

Notemos que el valor actual tendrá densidad mayor que cero a partir de $(1+i)^{-25} = 0.37511$. *Además en cero se acumula una masa de probabilidad de* *cuantía*

$$_{25}p_{40} = e^{-\int_{40}^{65} 0.00065+0.00006\ 1.09^s\ ds} = 0.8328062$$

4.3.2 Pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento

Sin necesidad de mayor explicación es claro que, en este caso, el valor actual es

$$Z = f(K_x) = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x = 0,1,2...n-1 \\ 0 & K_x = n, n+1, n+2, ... \end{cases}$$

Su función de cuantía es sencilla, los posibles valores del valor actual son evidentemente 0, $v^1, v^2, ..., v^n$ y sus probabilidades vienen dadas por

$$P(Z=0) = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} {}_{k/}q_x = {}_np_x$$

y

$$P(Z = v^{k+1}) = {}_{k/}q_x \quad para \quad k = 0,1,2....,n-1.$$

La **esperanza matemática** del valor actual, su valor actual actuarial, se representa mediante $A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}$, siendo

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x + 0\ {}_np_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x \tag{4.17}$$

y respecto a la **varianza,** ya que

$$E(Z^2) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)}\ {}_{k/}q_x$$

y

$$Var(Z) = E(Z^2) - (A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}})^2 \tag{4.18}$$

podemos escribir

$$Var(Z) = {}^2A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} - (A_x)^2$$

donde

$${}^2A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)}\ {}_{k/}q_x$$

es la esperanza matemática calculada a un tanto instantáneo 2δ.

En **símbolos de conmutación,**

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ _{k/}q_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v^{x+k+1} d_{x+k}}{v^x l_x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{x+k}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{4.19}$$

4.4 Seguro Vida Entera Diferido

Nos centraremos a continuación en el **seguro vida entera diferido.** Se caracteriza porque el capital estipulado en el contrato se paga al fallecimiento del asegurado, siempre que este ocurra a partir de una determinada edad.

4.4.1 Pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento

Consideremos un seguro vida entera diferido para una cabeza de edad x cuyo capital asegurado, unitario, se paga en el momento del fallecimiento de la citada cabeza siempre que este ocurra a partir de la edad $x+n$. Supondremos como siempre que el tipo de interés técnico i es constante.

El valor actual de la citada prestación es una variable aleatoria

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} 0 & T_x \leq n \\ v^{T_x} & T_x > n \end{cases}$$

Su **esperanza matemática**, valor actual actuarial, se representa mediante $_{n/}\bar{A}_x$, siendo

$$_{n/}\bar{A}_x = E(Z) = 0 \ _nq_x + \int_n^{\infty} v^t \ g_x(t)dt = \int_n^{\infty} v^t \ g_x(t)dt \tag{4.20}$$

Su **varianza** es, elementalmente,

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

con

$$E(Z^2) = \int_n^{\infty} v^{2t} \ g_x(t)dt = \int_n^{\infty} e^{-(2\delta)t} \ g_x(t)dt$$

Pudiendo escribirse, como siempre,

$$E(Z^2) = \ ^2_{n/}\bar{A}_x$$

Es posible obtener con facilidad la función de distribución del valor actual,

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z < 0 \\ {}_nq_x & si \quad z = 0 \\ {}_{h(z)}p_x + {}_nq_x & si \quad 0 < z < v^n \\ 1 & si \quad z \geq v^n \end{cases}$$

De nuevo nos encontramos ante una variable aleatoria mixta, que acumula una probabilidad de cuantía ${}_nq_x$ en el punto $z = 0$, y que en el resto de los puntos tiene por función de densidad

$$f(z) = \begin{cases} \frac{{}_{h(z)}p_x . \mu_{x+h(z)}}{\delta . z} & si \quad 0 < z < v^n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \tag{4.21}$$

Ejemplo 5 *En la siguiente figura se representa la función de distribución del valor actual de un seguro vida entera diferido 20 años, para una cabeza de 40 años, con un tipo de interés técnico* $i = 0.04$ *y siendo el tanto instantáneo de mortalidad*

$$\mu_x = 0.00065 + 0.00006\ 1.09^x,$$

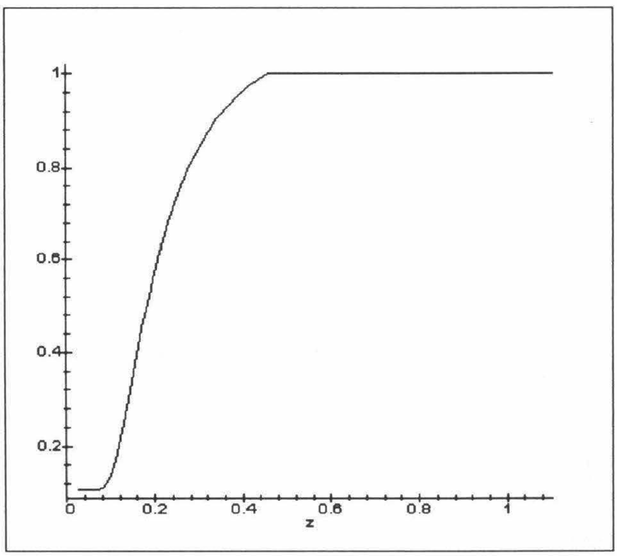


Figura 4.6
La función de densidad-probabilidad será:

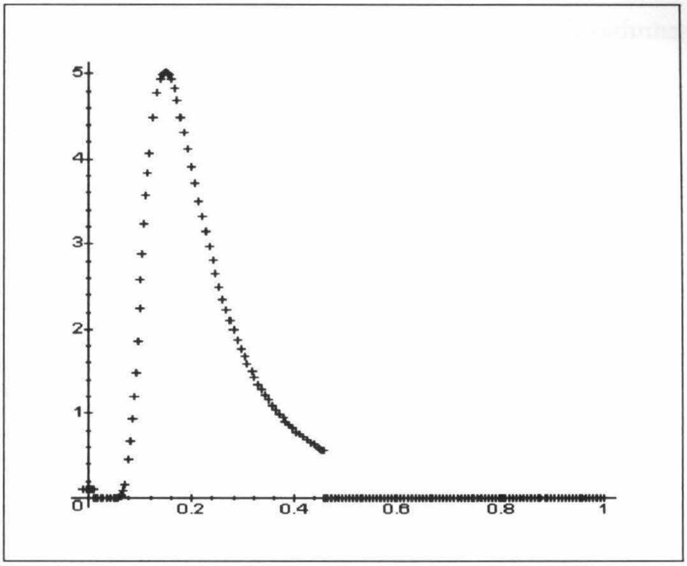


Figura 4.7

Notemos que el mayor valor actual con densidad no nula será $(1+0.04)^{-20} = 0.456366$. *Por otra parte, el valor actual acumula en cero una masa de probabilidad*

$$_{20}q_{40} = 1 - e^{-\int_{40}^{60} 0.00065+0.00006\ 1.09^{s}\ ds} = 0.107466$$

El valor actual actuarial del seguro vida entera diferido verifica dos interesantes relaciones, que probaremos a continuación:

1.- El valor actual actuarial de un seguro vida entera diferido n años para una cabeza de edad x es igual al producto del factor de actualizacion actuarial para una cabeza de edad x diferido n años por el valor actual actuarial de un seguro vida entera no diferido a la edad $x+n$; esto es,

$$_{n/}\bar{A}_x = {}_nE_x\ \bar{A}_{x+n} \tag{4.22}$$

En efecto,

$$_nE_x\ \bar{A}_{x+n} = v^n\ _np_x \int_0^{\infty} v^t\ g_{x+n}(t)\ dt = v^n\ _np_x \int_0^{\infty} v^t\ _tp_{x+n}\ \mu_{x+n+t}\ dt =$$

$$= \int_0^{\infty} v^{n+t}\ _{n+t}p_x\ \mu_{x+n+t}\ dt =$$

y realizando el cambio de variable $n + t = z$ se obtiene

$$= \int_n^\infty v^z \; {}_zp_x \; \mu_{x+z} \; dz = \; {}_{n/}\bar{A}_x$$

2.- El valor actual actuarial de un seguro vida entera diferido n años para una cabeza de edad x es igual a la diferencia de los valores actuales actuariales de un seguro vida entera a la edad x y de un temporal n años para una cabeza de edad x; esto es,

$${}_{n/}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}_{\substack{1\\x:\overline{n|}}} \tag{4.23}$$

En efecto,

$$\bar{A}_x - \bar{A}_{\substack{1\\x:\overline{n|}}} = \int_0^\infty v^t \; g_x(t) \; dt - \int_0^n v^t \; g_x(t) \; dt = \int_n^\infty v^t \; g_x(t) \; dt = \; {}_{n/}\bar{A}_x$$

Llegados a este punto, el lector no debería tener dificultad en estudiar un **seguro diferido n años y temporal m años**: su valor actual actuarial será

$${}_{n/m}\bar{A}_x = \int_n^{n+m} v^t \; g_x(t) \; dt$$

verificándose

$${}_{n/m}\bar{A}_x = \; {}_nE_x \; \bar{A}_{\substack{1\\x+n:\overline{m|}}}$$

4.4.2 Pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento

Evidentemente, el valor actual es

$$Z = f(K_x) = \begin{cases} 0 & K_x = 0, 1, 2...n-1 \\ v^{K_x+1} & K_x = n, n+1, n+2, ..., \omega - x - 1 \end{cases}$$

Su función de cuantía es sencilla: los posibles valores del valor actual son evidentemente $0, v^{n+1}, v^{n+2}, ..., v^{\omega-x}$ y sus probabilidades vienen dadas por

$$P(Z = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}q_x = \; {}_nq_x$$

y por

$$P(Z = v^{k+1}) = \; {}_{k/}q_x \quad para \quad k = n, n+1, n+2, ..., \omega - x - 1$$

La **esperanza matemática** del valor actual, su valor actual actuarial, se representa mediante ${}_{n/}A_x$, siendo

$$ {}_{n/}A_x = E(Z) = 0 \ {}_nq_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{k+1} \ {}_{k/}q_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{k+1} \ {}_{k/}q_x \tag{4.24} $$

y la **varianza,** ya que

$$ E(Z^2) = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{2(k+1)} \ {}_{k/}q_x $$

es igual a

$$ Var(Z) = E(Z^2) - (\ {}_{n/}A_x)^2 \tag{4.25} $$

pudiéndose escribir

$$ Var(Z) = \ {}^2_{n/}A_x - (\ {}_{n/}A_x)^2 $$

donde

$$ {}^2_{n/}A_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} e^{-2\delta(k+1)} \ {}_{k/}q_x $$

es la esperanza matemática calculada a un tanto instantáneo 2δ.

En **símbolos de conmutación:**

$$ {}_{n/}A_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{k+1} \ {}_{k/}q_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{k+1} \ \frac{d_{x+k}}{l_x} = $$

$$ = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} \frac{C_{x+k}}{D_x} = \frac{M_{x+n}}{D_x} \tag{4.26} $$

Asimismo, se verifican en este caso las siguientes relaciones, de interpretación análoga a la del caso continuo:

1.–

$$ {}_{n/}A_x = \ {}_nE_x \ A_{x+n} \tag{4.27} $$

Es claro que

$$ {}_nE_x \ A_{x+n} = v^n \ {}_np_x \sum_{k=0}^{\omega-x-n-1} v^{k+1} \ {}_{k/}q_{x+n} = v^n \ {}_np_x \sum_{k=0}^{\omega-x-n-1} v^{k+1} {}_kp_{x+n} \ q_{x+n+k} = $$

$$ = \sum_{k=0}^{\omega-x-n-1} v^{n+k+1} \ {}_{n+k}p_x \ q_{x+n+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x-n-1} v^{n+k+1} \ {}_{n+k/}q_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{k+1} \ {}_{k/}q_x = \ {}_{n/}A_x $$

2.-

$$ {}_{n/}A_x = A_x - A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} \tag{4.28}$$

Ciertamente,

$$A_x - A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_{k/}q_x - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k/}q_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_{k/}q_x = {}_{n/}A_x$$

Invitamos al lector a probar las anteriores relaciones empleando las expresiones mediante funciones de conmutación de los valores actuariales implicados.

Asimismo en el caso discreto invitamos al lector a realizar el estudio de un **seguro diferido** n **años y temporal** m **años**. El valor actual actuarial es, elementalmente,

$${}_{n/m}A_x = \sum_{k=n}^{n+m-1} v^{k+1} {}_{k/}q_x$$

y en **símbolos de conmutación**

$${}_{n/m}A_x = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x}$$

verificándose

$${}_{n/m}A_x = {}_nE_x \, A_{\overset{1}{x+n}:\overline{m|}}$$

4.5 Seguro Mixto Simple

Los **seguros mixtos** se caracterizan por combinar un seguro temporal y un capital diferido. Esto es, se paga un capital cuando fallezca el asegurado siempre que esta circunstancia suceda antes de que alcance la edad x+n, y en caso de que llegue con vida a dicha edad recibirá, en ese momento, el capital estipulado.

Este segundo seguro (para el caso de supervivencia) se denomina **capital diferido** y ha sido tratado ampliamente en el tercer capítulo, pues su valor actual actuarial coincide evidentemente con el factor de actualización actuarial ${}_nE_x$. Sin embargo, en este capítulo utilizaremos para representar su valor actual actuarial la notación $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$.

Supondremos que los capitales para el caso de fallecimiento y supervivencia son iguales y unitarios, y que el tipo de interés técnico i es constante.

4.5.1 Pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento

Para una cabeza de edad x el capital asegurado, unitario, se paga bien en el momento del fallecimiento de la citada cabeza siempre que este ocurra antes de que alcance la edad x+n, o bien al alcanzar con vida dicha edad x+n.

El valor actual de la citada prestación es una variable aleatoria

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} v^{T_x} & T_x \leq n \\ v^n & T_x > n \end{cases}$$

Ciertamente es posible escribir

$$Z = Z_1 + Z_z$$

con

$$Z_1 = \begin{cases} v^{T_x} & T_x \leq n \\ 0 & T_x > n \end{cases} \text{ y } Z_2 = \begin{cases} 0 & T_x \leq n \\ v^n & T_x > n \end{cases}$$

esto es, Z es la suma de los valores actuales de un seguro temporal y de un capital diferido.

Su **esperanza matemática**, valor actual actuarial, se representa mediante $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$, siendo igual a la suma de las correspondientes esperanzas,

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = E(Z) = E(Z_1) + E(Z_2)$$

esto es,

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \tag{4.29}$$

En cuanto a la **varianza**, tenemos que

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

y también

$$Var(Z) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + 2Cov(Z_1, Z_2) \tag{4.30}$$

donde

$$Cov(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = -E(Z_1)E(Z_2)$$

ya que $E(Z_1 Z_2) = 0$, por ser evidentemente $Z_1 Z_2 = 0$.

La función de distribución del valor actual es

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z < v^n \\ {}_{h(z)}p_x & si \quad v^n \leq z < 1 \\ 1 & si \quad z \geq 1 \end{cases} \tag{4.31}$$

y acumula, por tanto, una probabilidad ${}_np_x$ en el punto $z = v^n$; en el resto del dominio tiene por función de densidad

$$f(z) = \begin{cases} \frac{{}_{h(z)}p_x . \mu_{x+h(z)}}{\delta . z} & si \quad v^n < z \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

4.5.2 Pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento

Claramente su valor actual es una variable aleatoria

$$Z = f(K_x) = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x = 0, 1, 2...n-1 \\ v^n & K_x = n, n+1, n+2, ... \end{cases}$$

Siguiendo el esquema del epígrafe anterior, el lector no debe tener dificultad alguna para obtener su distribución de probabilidad así como para calcular la esperanza matemática ($A_{x:\overline{n}|}$) y su varianza.

Es claro, asimismo, que su expresión en símbolos de conmutación es

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{4.32}$$

4.6 Seguros Variables

Abandonamos ahora el supuesto de que el capital asegurado es constante, pasando a estudiar aquellos seguros cuyo capital asegurado es variable. Distinguiendo entre los casos de pago en el momento del fallecimiento y pago al final del periodo de fallecimiento, realizaremos, en primer lugar, un planteamiento general de los seguros variables para posteriormente tratar, como casos particulares, los casos clásicos. Concluiremos finalmente con los seguros variables en progresión aritmética y geométrica, haciendo referencia en este caso a su cálculo mediante el empleo de símbolos de conmutación.

4.6.1 Pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento

Consideremos una cabeza de edad x y una función

$$C : [0, \omega - x] \to R$$

donde $C(z)$ nos proporciona el capital asegurado a pagar si dicha cabeza fallece a la edad $x + z$.

Estudiemos en primer lugar el **seguro vida entera** bajo la hipótesis de pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento. El valor actual es una variable aleatoria

$$Z = f(T_x) = C(T_x)\ v^{T_x} \quad T_x \geq 0$$

y conocida la función de densidad de la vida residual a la edad x, $g_x(t)$, es posible el cálculo de sus principales momentos.

Así, la **esperanza matemática** es

$$(V\overline{A}C)_x = E(Z) = \int_0^{\infty} C(t)\ v^t\ g_x(t)dt \tag{4.33}$$

siendo su **varianza**

$$Var(Z) = \int_0^\infty (C(t)\ v^t)^2\ g_x(t)dt - (E(Z))^2$$

En cuanto al **seguro temporal**, el valor actual actuarial es

$$(V\overline{A}C)_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \int_0^n C(t)\ v^t\ g_x(t)\ dt \tag{4.34}$$

y para el **seguro diferido**

$$_{n/}(V\overline{A}C)_x = \int_n^\infty C(t)\ v^t\ g_x(t)\ dt \tag{4.35}$$

verificándose las relaciones

$$_{n/}(V\overline{A}C)_x = (V\overline{A}C)_x - (V\overline{A}C)_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} \tag{4.36}$$

$$_{n/}(V\overline{A}C)_x = {}_nE_x\ (V\overline{A}C)_{x+n} \tag{4.37}$$

La primera de ellas es inmediata, en cuanto a la segunda basta tener en cuenta que

$${}_nE_x\ (V\overline{A}C)_{x+n} = {}_nE_x \int_0^\infty C(n+t)\ v^t\ g_{x+n}(t)\ dt =$$

$$= v^n\ {}_np_x \int_0^\infty C(n+t)\ v^t\ {}_tp_{x+n}\ \mu_{x+n+t}\ dt = \int_0^\infty C(n+t)\ v^{n+t}\ {}_{n+t}p_x\ \mu_{x+n+t}\ dt$$

y realizando el cambio de variable $n + t = z$ se tiene

$${}_nE_x\ (V\overline{A}C)_{x+n} = \int_n^\infty C(z)\ v^z\ {}_zp_x\ \mu_{x+z}dz = \int_n^\infty C(z)\ v^z\ g_x(z)\ dz = {}_{n/}(V\overline{A}C)_x$$

Asimismo, para el **seguro diferido y temporal** obtenemos

$$_{n/m}(V\overline{A}C)_x = \int_n^{n+m} C(t)\ v^t\ g_x(t)\ dt \tag{4.38}$$

verificándose

$$_{n/m}(V\overline{A}C)_x = {}_nE_x\ (V\overline{A}C)_{\overset{1}{x+n}:\overline{m|}} \tag{4.39}$$

Consideremos algunos **casos clásicos**:

a) Supongamos que el capital asegurado coincide con la vida residual del asegurado ($C(t) = t$). El valor actual para el seguro vida entera será:

$$Z = T_x \; v^{T_x} \quad T_x \geq 0$$

siendo su **esperanza matemática**

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{\infty} t \; v^t \; g_x(t) \; dt \tag{4.40}$$

Asimismo para el **seguro temporal** se obtiene el siguiente valor actual actuarial:

$$(\bar{I}\bar{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^{n} t \; v^t \; g_x(t) \; dt \tag{4.41}$$

y para el **seguro diferido** (hagamos notar que comienza su crecimiento una vez finalizado el periodo de diferimiento):

$$_{n/}(\bar{I}\bar{A})_x = \int_n^{\infty} (t-n) \; v^t \; g_x(t) \; dt \tag{4.42}$$

b) El capital asegurado es 1 durante el primer año, 2 durante el segundo y así sucesivamente.

En este caso $C(t) = [t+1]$, donde $[t]$, función "parte entera" de t, nos proporciona el mayor entero menor o igual que t. Notemos que $[T_x + 1] = K_x + 1$.

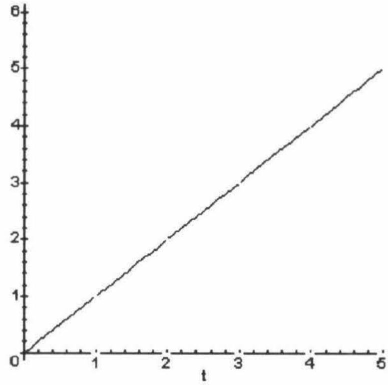
Para el caso del **seguro vida entera,** el valor actual viene dado por la variable aleatoria

$$Z = [T_x + 1] \; v^{T_x}, \quad T_x \geq 0$$

Su **esperanza matemática** es

$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\infty} [t+1] \; v^t \; g_x(t) dt \tag{4.43}$$

La siguiente gráfica representa las funciones $C(t) = t$ y $C(t) = [t+1]$:



Seguros crecientes

El valor actual actuarial para el seguro temporal es

$$(I\overline{A})_{\stackrel{1}{x}:\overline{n|}} = \int_0^n [t+1]\ v^t\ g_x(t)\ dt \tag{4.44}$$

y para el diferido

$$_{n/}(I\overline{A})_x = \int_n^\infty [t-n+1]\ v^t\ g_x(t)\ dt \tag{4.45}$$

c) Supongamos ahora un seguro vida entera en el que el capital asegurado es la unidad el primer año y se incrementa en una unidad en cada año sucesivo hasta el n-ésimo a partir del cual es constante e igual a n.

Esto es

$$C(t) = \begin{cases} [t+1] & t \leq n \\ n & t > n \end{cases}$$

La variable aleatoria valor actual toma los valores

$$Z = \begin{cases} [T_x+1]\ v^{T_x} & T_x \leq n \\ n\ v^{T_x} & T_x > n \end{cases}$$

El valor actual actuarial se representa mediante $(I_{\overline{n|}}\overline{A})_x$, verificándose

$$(I_{\overline{n|}}\overline{A})_x = \int_0^n [t+1]\ v^t\ g_x(t)\ dt + \int_n^\infty n\ v^t\ g_x(t)\ dt = (I\overline{A})_{\stackrel{1}{x}:\overline{n|}} + n\ _{n/}\overline{A}_x \tag{4.46}$$

siendo también

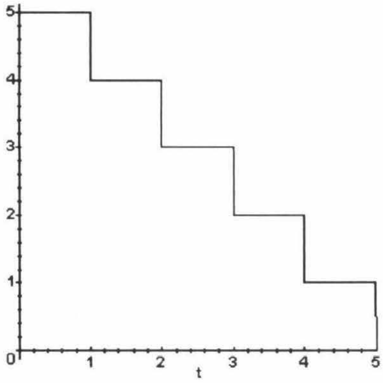
$$(I_{\overline{n|}}\overline{A})_x = (I\overline{A})_x -\ _{n/}(I\overline{A})_x \tag{4.47}$$

d) Podemos considerar ahora un seguro temporal n años cuyo capital asegurado disminuye cada año en una unidad, siendo precisamente su cuantía igual a n el primer año.

Tenemos ahora que

$$C(t) = \begin{cases} n - [t] & t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

cuya gráfica es



Seguro decreciente

Evidentemente el valor actual es

$$Z = \begin{cases} (n - [T_x]) \, v^{T_x} & T_x \leq n \\ 0 & T_x > n \end{cases}$$

y su **esperanza matemática**

$$(D\ \bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (n - [t]) \, v^t \, g_x(t) dt$$

4.6.2 Pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento.

Sea ahora un **seguro vida entera** para una cabeza de edad x. Definamos el conjunto $C = \{c_1, c_2, ..., c_{\omega - x}\}$ donde c_{k+1} es el capital asegurado a pagar en caso de que dicha cabeza fallezca a la edad $x + k$.

c_1 c_2..............................c_n........

x $x+1$ $x+2$.........................$x+n$.........

Supuesto el pago del citado capital al final del año de fallecimiento, el valor actual es la variable aleatoria

$$Z = f(K_x) = c_{K_x+1}\, v^{K_x+1}, \;\; K_x = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1$$

y ya que

$$P(Z = c_{k+1}\, v^{k+1}) = {}_{k/}q_x \quad k = 0, 1, 2...., \omega - x - 1$$

es posible calcular sus principales momentos; así, la **esperanza matemática** es

$$(VAC)_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} c_{k+1}\, v^{k+1}{}_{k/}q_x \tag{4.48}$$

Es fácil probar que

$$(VAC)_x = c_1 A_x + (c_2 - c_1)\, {}_{1/}A_x + (c_3 - c_2)\, {}_{2/}A_x + .. + (c_{\omega-x} - c_{\omega-x-1})\, {}_{\omega-x-1/}A_x \tag{4.49}$$

En efecto,

$$c_1 A_x + (c_2 - c_1)\, {}_{1/}A_x + (c_3 - c_2)\, {}_{2/}A_x + .. + (c_{\omega-x} - c_{\omega-x-1})\, {}_{\omega-x-1/}A_x =$$

$$= c_1(A_x - {}_{1/}A_x) + c_2({}_{1/}A_x - {}_{2/}A_x) + ... + c_{\omega-x}\, {}_{\omega-x-1/}A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} c_{k+1}\, v^{k+1}{}_{k/}q_x$$

ya que

$$c_{n+1}({}_{n/}A_x - {}_{n+1/}A_x) =$$

$$= c_{n+1}\Big(\sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_{k/}q_x - \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_{k/}q_x\Big) = c_{n+1}\, v^{n+1}{}_{n/}q_x, \quad n = 0, .., \omega - x - 2$$

y

$$c_{\omega-x}\, {}_{\omega-x-1/}A_x = c_{\omega-x}\, v^{\omega-x}{}_{\omega-x-1/}q_x$$

Consideremos ahora el caso del **seguro temporal**. Sea $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. El valor actual es

$$Z = \begin{cases} c_{K_x+1}\, v^{K_x+1} & si \quad K_x = 0, 1, 2, ...n - 1 \\ 0 & si \quad K_x = n, n + 1, ... \end{cases}$$

y

$$(VAC)_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1}\, v^{k+1}{}_{k/}q_x \tag{4.50}$$

Asimismo, es fácil probar que

$$(VAC)_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = c_n \; A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + (c_{n-1} - c_n) \; A_{\overset{1}{x}:\overline{n-1}|} + ... + (c_1 - c_2) \; A_{\overset{1}{x}:\overline{1}|} \tag{4.51}$$

Análogamente, el valor actual actuarial para el **seguro diferido** es

$$_{n/}(VAC)_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} c_{k+1} \; v^{k+1} \, _{k/}q_x \tag{4.52}$$

y verifica las relaciones

$$_{n/}(VAC)_x = (VAC)_x - (VAC)_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} \tag{4.53}$$

$$_{n/}(VAC)_x = \, _nE_x \; (VAC)_{x+n} \tag{4.54}$$

Probemos la segunda:

$$_nE_x \; (VAC)_{x+n} = v^n \; _np_x \sum_{k=0}^{\omega-x-n-1} c_{k+n+1} \; v^{k+1} \; _{k/}q_{x+n} =$$

$$= v^n \; _np_x \sum_{k=0}^{\omega-x-n-1} c_{k+n+1} \; v^{k+1}_k p_{x+n} \; q_{x+n+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x-n-1} c_{k+n+1} \; v^{n+k+1} \; _{n+k}p_x \; q_{x+n+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-n-1} c_{k+n+1} \; v^{n+k+1} \; _{n+k/}q_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} c_{k+1} \; v^{k+1} \; _{k/}q_x = \, _{n/}(VAC)_x$$

Y para el **seguro diferido y temporal** se tiene

$$_{n/m}(VAC)_x = \sum_{k=n}^{n+m-1} c_{k+1} \; v^{k+1} \, _{k/}q_x \tag{4.55}$$

verificándose

$$_{n/m}(VAC)_x = \, _nE_x \; (VAC)_{\overset{1}{x+n}:\overline{n}|} \tag{4.56}$$

Como casos particulares de interés, señalemos:

a) Cuando

$$c_{k+1} = k+1, \quad k = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1.$$

esto es, el capital asegurado es la unidad durante el primer año y se incrementa también en una unidad en cada uno de los años sucesivos, tenemos para el **seguro vida entera:**

$$Z = f(K_x) = (K_x + 1)\ v^{K_x+1}, \ K_x = 0, 1, 2, ...$$

y su **esperanza matemática**, que se representa mediante $(IA)_x$, será

$$(IA)_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (k+1)\ v^{k+1}\ {}_{k/}q_x \tag{4.57}$$

pudiéndose expresar como suma de seguros diferidos,

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_{k/}A_x \tag{4.58}$$

y también como suma de seguros diferidos y temporales un año,

$$(IA)_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} k\ {}_{k-1/1}A_x \tag{4.59}$$

En efecto, desarrollando el sumatorio de la expresión (4.57) tenemos

$$(IA)_x = v\ q_x + 2\ v^2\ {}_{1/}q_x + ... + (\omega - x)\ v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x-1/}q_x =$$

y también

$$= (v\ q_x + v^2\ {}_{1/}q_x + ... + v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x-1/}q_x) + (v^2\ {}_{1/}q_x + ... + v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x-1/}q_x) + ..$$

$$... + v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x-1/}q_x$$

lo que nos lleva a (4.59) y (4.58), respectivamente (obsérvese que ${}_{k-1/1}A_x = v^k\ {}_{k-1/}q_x$).

Finalmente, para los casos **temporal** y **diferido** se tiene:

$$(IA)_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\ v^{k+1}\ {}_{k/}q_x = \sum_{k=1}^{n} k\ {}_{k-1/1}A_x \tag{4.60}$$

$${}_{n/}(IA)_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} (k+1)\ v^{k+1}\ {}_{k/}q_x = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} (k-n)\ {}_{k-1/1}A_x \tag{4.61}$$

y

$${}_{n/m}(IA)_x = \sum_{k=n}^{n+m}(k+1)\ v^{k+1}\ {}_{k/}q_x = \sum_{k=n+1}^{n+m} (k-n)\ {}_{k-1/1}A_x \tag{4.62}$$

El lector no ha de tener dificultad en probar estas tres últimas igualdades que, por otra parte, resultan bastante claras intuitivamente.

b) Consideremos ahora un seguro vida entera en el que el capital asegurado es la unidad el primer año y se incrementa en una unidad en cada año sucesivo hasta el n-ésimo, a partir del cual es constante e igual a n. Esto es,

$$c_{k+1} = \begin{cases} k+1 & k = 0, 1, ..., n-1 \\ n & k = n, n+1, ..., \omega - x - 1 \end{cases}$$

La variable aleatoria valor actual toma los valores

$$Z = \begin{cases} (K_x + 1)\ v^{K_x+1} & K_x = 0, 1, ..., n-1 \\ n\ v^{K_x+1} & K_x = n, n+1, ..., \omega - x - 1 \end{cases}$$

El valor actual actuarial se representa mediante $(I_{\overline{n|}}A)_x$, siendo

$$(I_{\overline{n|}}A)_x = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\ v^{k+1}{}_{k/}q_x + n \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_{k/}q_x = (IA)^{1}_{x:\overline{n|}} + n\ {}_{n/}A_x \qquad (4.63)$$

Asimismo, se demuestra que

$$(I_{\overline{n|}}A)_x = (IA)_x - {}_{n/}(IA)_x \qquad (4.64)$$

y también que

$$(I_{\overline{n|}}A)_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}A_x \qquad (4.65)$$

c) Para un seguro temporal de n años y decreciente en el que el capital asegurado del primer año es n, el del segundo n-1, y así sucesivamente hasta que el capital asegurado del ultimo año es 1, tenemos

$$c_{k+1} = \begin{cases} n-k & k = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & k = n, n+1, ..., \omega - x - 1 \end{cases}$$

y

$$Z = \begin{cases} (n - K_x)\ v^{K_x+1}\ si & K_x = 0, 1, 2, ...n-1 \\ 0 \qquad si & K_x = n, n+1, ... \end{cases}$$

siendo su **esperanza matemática**

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n|}} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ v^{k+1}{}_{k/}q_x$$

y verificándose

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} A^{1}_{x:\overline{k|}}$$

4.6.3 Seguros variables en progresión aritmética y geométrica. Funciones de conmutación

Nos referiremos ahora a los **seguros variables en progresión aritmética** y **en progresión geométrica** para el caso de pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento, con la finalidad de introducir las correspondientes funciones de conmutación y analizar la problemática tradicional de su cálculo.

Seguro vida entera variable en progresión aritmética

Los seguros variables en progresión aritmética más sencillos son aquellos en los que el capital asegurado del primer año es la unidad y su cuantía varía también en una unidad en los sucesivos años. Puesto que ya han sido estudiados en el epígrafe anterior, en este nos limitaremos a calcular su valor actual actuarial empleando las funciones de conmutación. Para ello hemos de definir una nueva función de conmutación que se representa mediante la letra R:

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \dots\dots + M_{\omega-1} \tag{4.66}$$

Así

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_{k/}A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{M_{x+k}}{D_x} = \frac{R_x}{D_x}$$

$$(IA)_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} k \; {}_{k-1/1}A_x = \sum_{k=1}^{n} k \; \frac{M_{x+k-1} - M_{x+k}}{D_x} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \; M_{x+n}}{D_x} \tag{4.67}$$

$$ {}_{n/}(IA)_x = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} (k-n) \; {}_{k-1/1}A_x = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} (k-n) \; \frac{M_{x+k-1} - M_{x+k}}{D_x} = \frac{R_{x+n}}{D_x} \tag{4.68}$$

$$ {}_{n/m}(IA)_x = \sum_{k=n+1}^{n+m} (k-n) \; {}_{k-1/1}A_x = \sum_{k=n+1}^{n+m} (k-n) \; \frac{M_{x+k-1} - M_{x+k}}{D_x} =$$

$$= \frac{R_{x+n} - R_{x+n+m} - m \; M_{x+n+m}}{D_x} \tag{4.69}$$

$$(I_{\overline{n|}}A)_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}A_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_{x+k}}{D_x} = \frac{R_x - R_{x+n}}{D_x} \tag{4.70}$$

y

$$(DA)_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} A_{\overset{1}{x}:\overline{k|}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_x - M_{x+k}}{D_x} = \frac{n\ M_x - R_{x+1} + R_{x+n+1}}{D_x} \tag{4.71}$$

Consideremos finalmente un seguro vida entera cuyo capital asegurado varía en progresión aritmética, siendo el primer año de cuantía c, el segundo año c+h, el tercero c+2h ...., esto es, $C = \{c, c+h, c+2h, ..., c+(\omega - x - 1)\ h\}$

Su valor actual es

$$Z = f(K_x) = (c + K_x h)\ v^{K_x+1},\ K_x = 0, 1, 2, ...$$

y la esperanza matemática

$$(VAC)_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (c+k\ h)\ v^{k+1}{}_{k/}q_x = c \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_{k/}q_x + h \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k\ v^{k+1}{}_{k/}q_x =$$

$$= c\ A_x + h\ {}_{1/}(IA)_x \tag{4.72}$$

por lo que, en símbolos de conmutación,

$$(VAC)_x = c\ \frac{M_x}{D_x} + h\ \frac{R_{x+1}}{D_x} \tag{4.73}$$

Procediendo análogamente, tenemos

$${}_{n/}(VAC)_x = c \frac{M_{x+n}}{D_x} + h \frac{R_{x+n+1}}{D_x} \tag{4.74}$$

$$(VAC)_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = c\ \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + h\ \frac{R_{x+1} - R_{x+n} - (n-1)\ M_{x+n}}{D_x} \tag{4.75}$$

y

$${}_{n/m}(VAC)_x = c\ \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x} + h\ \frac{R_{x+n+1} - R_{x+n+m} - (m-1)\ M_{x+n+m}}{D_x} \tag{4.76}$$

Seguro vida entera variable en progresión geométrica

Consideremos un seguro vida entera cuyo capital asegurado varía en progresión geométrica, siendo el primer año de cuantía c, el segundo año $c\ q$, el tercero $c\ q^2$ ..... Ahora es $C = \{c, cq, cq^2, ..., cq^{\omega-x-1}\}$

Su valor actual es

$$Z = f(K_x) = (c\ q^{K_x})\ v^{K_x+1},\ K_x = 0, 1, 2, ...$$

y la esperanza matemática

$$(VAC)_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (cq^k)\ v^{k+1}{}_{k/}q_x \tag{4.77}$$

para $c = 1$ se representa mediante ${}^qA_x$, siendo igual a

$${}^qA_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (q^k)\ v^{k+1}{}_{k/}q_x = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (qv)^{k+1}{}_{k/}q_x \tag{4.78}$$

y llamando $v' = q\ v$, se tiene que

$${}^qA_x = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (v')^{k+1}{}_{k/}q_x = \frac{1}{q} \frac{M_x'}{D_x'} \tag{4.79}$$

en donde D_x' y M_x' son los correspondientes símbolos de conmutación para un tipo de interés

$$i' = \frac{1+i-q}{q}$$

que es el resultado de despejar i' en $v' = q\ v$, esto es,

$$\frac{1}{(1+i')} = \frac{q}{(1+i)}$$

donde i es el tipo de interés técnico.

Asimismo para los casos diferido y temporal se tiene

$${}^q_{n/}A_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} (q^{k-n})\ v^{k+1}{}_{k/}q_x = \frac{1}{q^{n+1}} \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (qv)^{k+1}{}_{k/}q_x = \frac{1}{q^{n+1}} \frac{M_{x+n}'}{D_x'} \tag{4.80}$$

$${}^qA_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}(q^k)\ v^{k+1}{}_{k/}q_x = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{n-1} (qv)^{k+1}{}_{k/}q_x = \frac{1}{q} \frac{M_x' - M_{x+n}'}{D_x'} \tag{4.81}$$

y

$$ {}^{q}_{n/m}A_x = \sum_{k=n}^{n+m-1} (q^{k-n})\, v^{k+1}{}_{k/}q_x = \frac{1}{q^{n+1}} \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (qv)^{k+1}{}_{k/}q_x = \frac{1}{q^{n+1}} \frac{M'_{x+n} - M'_{x+n+m}}{D'_x} \tag{4.82} $$

4.7 Relación entre $\bar{A}_x$ y A_x.

Si disponemos únicamente de la distribución de probabilidad de K_x, es posible obtener un valor aproximado para el valor actual actuarial bajo la hipótesis de pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento en función del valor actual actuarial bajo la hipótesis de pago al final del año de fallecimiento.

Aceptemos el supuesto de distribución uniforme de los fallecimientos a lo largo de cada año (véase el capítulo segundo). Bajo la misma sabemos que

$$ T_x = K_x + S $$

donde S representa la fracción de año vivido en el año de fallecimiento, variable aleatoria que se distribuye uniformemente en el intervalo de extremos 0 y 1 y es independiente de K_x.

Tenemos entonces que para un **seguro vida entera**,

$$ \bar{A}_x = E(v^{T_x}) = E(v^{K_x+S}) = E(v^{(K_x+1)-(1-S)}) = $$

$$ = E(v^{K_x+1})E(v^{-(1-S)}) = A_x \frac{i}{\delta} \tag{4.83} $$

ya que, puesto que S se distribuye según una uniforme en el intervalo $(0,1)$,

$$ E(v^{-(1-S)}) = \int_0^1 (1+i)^{(1-s)} ds = -\frac{(1+i)^{(1-s)}}{Ln(1+i)}]_0^1 = -\frac{1-(1+i)}{\delta} = \frac{i}{\delta} $$

Asimismo, para el **seguro diferido**, puesto que

$$ {}_{n/}\bar{A}_x = {}_nE_x \ \bar{A}_{x+n} = {}_nE_x \ \frac{i}{\delta} A_{x+n} $$

tenemos

$$ {}_{n/}\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\, {}_{n/}A_x \tag{4.84} $$

Para el caso del **seguro temporal**, al ser

$$ \bar{A}_{\substack{1\\ x:\overline{n|}}} = \bar{A}_x - {}_{n/}\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x - \frac{i}{\delta}\, {}_{n/}A_x = \frac{i}{\delta}(A_x - {}_{n/}A_x) $$

tenemos

$$\bar{A}_{\stackrel{1}{x}:\overline{n|}}=\frac{i}{\delta}\ A_{\stackrel{1}{x}:\overline{n|}} \tag{4.85}$$

Para el **mixto simple** se obtiene, elementalmente,

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}}=\bar{A}_{\stackrel{1}{x}:\overline{n|}}+A_{x:\stackrel{\ 1}{\overline{n|}}}=\frac{i}{\delta}\ A_{\stackrel{1}{x}:\overline{n|}}+A_{x:\stackrel{\ 1}{\overline{n|}}} \tag{4.86}$$

Asimismo, es fácil probar que

$$(I\ \bar{A})_x=\frac{i}{\delta}(I A)_x \tag{4.87}$$

y que

$$(D\ \bar{A})_{\stackrel{1}{x}:\overline{n|}}=\frac{i}{\delta}(D A)_{\stackrel{1}{x}:\overline{n|}} \tag{4.88}$$

Suponiendo el año dividido en m fracciones (por ejemplo en doce meses o cuatro trimestres), nos plantearemos ahora la valoración de un seguro vida entera con pago del capital asegurado al final de la fracción de año en la que se fallece. Para ello definiremos la variable $S^{(m)}$, a partir de S, como

$$S^{(m)}=\frac{[m\ S+1]}{m}$$

Es claro que $S^{(m)}$ es una variable aleatoria uniforme discreta que toma los valores $\frac{1}{m},\frac{2}{m},...,\frac{m}{m}$.

Ciertamente, si K_x y S son independientes, también lo son K_x y $S^{(m)}$.

Para una cabeza de edad (x) y un capital asegurado unitario, el valor actual de un seguro vida entera con pago del capital asegurado al final de la fracción de año en la que se fallece es una variable aleatoria

$$Z=v^{K_x+S^{(m)}}\quad K_x=0,1,2...\quad y\quad S^{(m)}=\frac{1}{m},\frac{2}{m},...,\frac{m}{m}.$$

Su esperanza matemática se representa por $A_x^{(m)}$, siendo

$$A_x^{(m)}=E(v^{K_x+S^{(m)}})=E(v^{(K_x+1)-(1-S^{(m)})})=$$

$$E(v^{K_x+1})\ E((1+i)^{(1-S^{(m)})})=A_x\ \frac{i}{j(m)}$$

ya que

$$E((1+i)^{(1-S^{(m)})})=(1+i)^{\frac{m-1}{m}}\ \frac{1}{m}+(1+i)^{\frac{m-2}{m}}\ \frac{1}{m}+...+\frac{1}{m}=$$

$$= \frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{m}(1+i)}{1-(1+i)^{\frac{1}{m}}} = \frac{i}{m((1+i)^{\frac{1}{m}}-1)} = \frac{i}{j(m)}$$

donde $j(m) = m((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1)$ es el tanto nominal anual de frecuencia m.

4.8 Relaciones recurrentes

Estudiaremos a continuación algunas relaciones recurrentes que permiten el cálculo de valores actuales actuariales de algunos seguros para una edad determinada en función del correspondiente valor para la edad anterior o posterior.

Por ejemplo, consideremos un **seguro vida entera** con un capital asegurado unitario. Sabemos que

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_{k/}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k}$$

Asimismo,

$$A_{x+1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_{k/}q_{x+1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_{x+1} \ q_{x+k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} v^{k} \ {}_{k-1}p_{x+1} \ q_{x+k}$$

Por tanto,

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k} = v \ q_x + \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k} =$$

$$v \ q_x + v \ p_x \sum_{k=1}^{\infty} v^{k} \ {}_{k-1}p_{x+1} \ q_{x+k}$$

ya que

$${}_kp_x = \ p_x \ {}_{k-1}p_{x+1}$$

Por tanto,

$$A_x = v \ q_x + v \ p_x \ A_{x+1} \tag{4.89}$$

y sabiendo que $A_\omega = 0$, es posible calcular los valores actuariales para las edades anteriores empleanto la expresión recurrente anterior.

Procediendo análogamente en el caso de un **seguro vida entera con capitales variables,** se obtiene

$$(VAC)_{x+k} = c_{k+1} v \ q_{x+k} + v \ p_{x+k} \ (VAC)_{x+k+1} \tag{4.90}$$

siendo $(VAC)_\omega = 0$.

Asimismo, para el **seguro temporal** se verifica

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = v\ q_x + v\ p_x\ A_{\overset{1}{x+1}:\overline{n-1}|} \tag{4.91}$$

siendo $A_{\overset{1}{x+n}:\overline{0}|} = 0$.

Para el **seguro mixto simple**,

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ q_x + v\ p_x\ A_{x+1:\overline{n-1}|} \tag{4.92}$$

siendo $A_{x+n:\overline{0}|} = 1$.

En el **caso continuo** se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\ \bar{A}_x = (\delta + \mu_x)\ \bar{A}_x - \mu_x \tag{4.93}$$

Asimismo, para el **seguro temporal** y el **mixto simple** es posible obtener las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dx}\ \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = (\delta + \mu_x)\ \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} - \mu_x + \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ \mu_{x+n} \tag{4.94}$$

y

$$\frac{d}{dx}\ \bar{A}_{x:\overline{n}|} = (\delta + \mu_x)\ \bar{A}_{x:\overline{n}|} - \delta\ \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - \mu_x \tag{4.95}$$

que probaremos en el capítulo siguiente.

4.9 Intereses variables.

El estudio de las valoraciones de seguros de vida cuanto se abandona la hipótesis de que el tipo de interés es constante a lo largo de toda la duración de la operación no presenta especial dificultad.

Supongamos en primer lugar que el tipo de interés varía anualmente. Sean i_1, i_2 ,..., i_n,... los correspondientes a los años $1, 2, ..., n, ...$(notemos que i_r es el tipo de interés del año en que el asegurado posee la edad $x + r - 1$).

Siendo

$$v_{[r-1,r]} = (1 + i_r)^{-1} \quad r = 1, 2, ...n, ...$$

el factor de actualización del año r-ésimo, tenemos que el correspondiente factor de actualización de los k primeros años es

$$v_{[0,k]} = \prod_{r=1}^{k} v_{[r-1,r]}$$

Notemos que cuando $i_1 = i_2 = ... = i_n = ... = i$, se tiene que

$$v_{[0,k]} = (1+i)^{-k}$$

Consideremos un **seguro vida entera** para una cabeza de edad x con pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento; el valor actual es una variable aleatoria que toma los valores

$$Z = f(K_x) = v_{[0,K_x+1]} \quad K_x = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1$$

siendo

$$P(Z = v_{[0,k+1]}) = \ {}_{k/}q_x \quad para \quad k = 0, 1, 2....., \omega - x - 1$$

El valor actual actuarial es igual a

$$A_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega - x - 1} v_{[0,k+1]} \ {}_{k/}q_x \tag{4.96}$$

En el resto de las modalidades estudiadas basta sustituir v^{k+1} por $v_{[0,k+1]}$.

Para el caso de pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento, sea la función

$$\delta : [0, \omega - x] -> R$$

tal que $\delta(z)$ representa el tanto instantáneo de capitalización cuando el asegurado posee la edad $x + z$. Sea también

$$\Lambda(t) = \int_0^t \delta(z)\, dz$$

El valor actual es una variable aleatoria

$$Z = f(T_x) = e^{-\Lambda(T_x)} \quad (T_x \geq 0)$$

y el valor actual actuarial es igual a

$$\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^{+\infty} e^{-\Lambda(t)}\, g_x(t)\, dt \tag{4.97}$$

Análogamente se introducen los tipos de interés variables en el resto de las modalidades de seguro estudiadas anteriormente.

Asimismo, con tipos de interés variables se siguen cumpliendo las propiedades

$${}_{n/}(VAC)_x = (VAC)_x - (VAC)_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} \tag{4.98}$$

$${}_{n/}(VAC)_x = \ {}_nE_x \ (VAC)_{x+n} \tag{4.99}$$

4.10 Ejercicios

1.- Encuentre la función de distribución del valor actual de

a) un seguro temporal.

b) un seguro diferido.

c) un seguro mixto simple.

Solución:

a) Recordemos que el valor actual de un seguro temporal es

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} v^{T_x} & T_x \leq n \\ 0 & T_x > n \end{cases}$$

siendo n el valor de la temporalidad. Obsérvese que la función v^t $(t \leq n)$ es decreciente en t, tomando como valor máximo $v^0 = 1$ y como valor mínimo v^n. Se tiene entonces:

* Si $z < 0$, evidentemente $P(Z \leq z) = 0$.

* Si $0 \leq z < v^n$, entonces $P(Z \leq z) = P(Z = 0) = P(T_x > n) = {}_np_x$

* Si $v^n \leq z < 1$, entonces $P(Z \leq z) = P(0 \leq Z < v^n) + P(v^n \leq Z \leq z)$ siendo

$$P(0 \leq Z < v^n) = P(Z = 0) = {}_np_x$$

$$P(v^n \leq Z \leq z) = P(v^n \leq v^{T_x} \leq z) = P(e^{-\delta n} \leq e^{-\delta T_x} \leq z) =$$

$$= P(n \geq T_x \geq -\frac{Ln(z)}{\delta} = h(z)) = {}_{h(z)}p_x - {}_np_x$$

En consecuencia,

$$P(Z \leq z) = {}_{h(z)}p_x$$

* Si $z \geq 1$, evidentemente es $P(Z \leq z) = 1$.

Es decir, la función de distribución buscada es

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si & z < 0 \\ {}_np_x & si & 0 \leq z < v^n \\ {}_{h(z)}p_x & si & v^n \leq z < 1 \\ 1 & si & z \geq 1 \end{cases}$$

b) Recordemos que el valor actual de un seguro diferido n años es

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} 0 & T_x \leq n \\ v^{T_x} & T_x > n \end{cases}$$

Se tiene entonces:
* Si $z < 0$, evidentemente $P(Z \leq z) = 0$.
* Si $z = 0$, entonces $P(Z \leq z) = P(Z = 0) = P(T_x \leq n) = {}_nq_x$
* Si $0 < z < v^n$, entonces

$$P(Z \leq z) = P(Z = 0) + P(0 < Z \leq z) = {}_nq_x + P(0 < v^{T_x} \leq z) =$$

$$= {}_nq_x + P(0 < e^{-\delta T_x} \leq z) = {}_nq_x + P(T_x \geq h(z)) = {}_n q_x + {}_{h(z)} p_x$$

* Si $z \geq v^n$, evidentemente es $P(Z \leq z) = 1$.
Por tanto, la función de distribución buscada es

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z < 0 \\ {}_nq_x & si \quad z = 0 \\ {}_{h(z)}p_x + {}_nq_x & si \quad 0 < z < v^n \\ 1 & si \quad z \geq v^n \end{cases}$$

c) Recordemos que el valor actual de un seguro mixto simple es

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} v^{T_x} & T_x \leq n \\ v^n & T_x > n \end{cases}$$

Se tiene entonces:
* Si $z < v^n$, evidentemente $P(Z \leq z) = 0$.
* Si $v^n \leq z < 1$, entonces $P(Z \leq z) = P(Z = v^n) + P(v^n < Z \leq z)$, siendo

$$P(Z = v^n) = P(T_x > n) = {}_np_x$$

$$P(v^n < Z \leq z) = P(v^n < v^{T_x} \leq z) = P(e^{-\delta n} < e^{-\delta\, T_x} \leq z) =$$
$$= P(n > T_x \geq h(z)) = {}_{h(z)}p_x - {}_np_x$$

Por tanto, $P(Z \leq z) = {}_{h(z)}p_x$.
* Si $z \geq 1$, evidentemente es $P(Z \leq z) = 1$.
La función de distribución buscada es

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z < v^n \\ {}_{h(z)}p_x & si \quad v^n \leq z < 1 \\ 1 & si \quad z \geq 1 \end{cases}$$

2.- Justifique la expresión

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x + v^n\ {}_np_x$$

adoptando el punto de vista del modelo determinista.
Solución:

Desde la perspectiva del modelo determinista, es posible interpretar $A_{x:\overline{n}|}$ como la cantidad que debería pagar cada una de las l_x personas vivas a la edad x para que a cambio los beneficiarios de los d_{x+k} fallecidos a la edad $x+k$ reciban una unidad monetaria al final del año de fallecimiento, siempre que $k < n$, y los l_{x+n} individuos que sobrevivan a la edad $x+n$ reciban asimismo una unidad monetaria en el momento en que alcancen dicha edad.

Puesto que la interpretación determinista de una tabla de mortalidad supone perfectamente conocidos los valores $l_x, l_{x+n}, d_x, d_{x+1}, ..., d_{x+n-1}$, podemos establecer la siguiente equivalencia financiera:

$$A_{x:\overline{n}|}\, l_x = v\, d_x + v^2\, d_{x+1} + ... + v^n\, d_{x+n-1} + v^n\, l_{x+n}$$

Por tanto,

$$A_{x:\overline{n}|} = v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + ... + v^n\frac{d_{x+n-1}}{l_x} + v^n\frac{l_{x+n}}{l_x} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x + v^n\ {}_n p_x$$

3.-Demuestre las expresiones

$${}_{n/}A_x = {}_nE_x\ A_{x+n}$$

$${}_{n/}A_x = A_x - A_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|}$$

$${}_{n/m}A_x = {}_nE_x\ A_{\stackrel{1}{x+n}:\overline{m}|}$$

utilizando los correspondientes símbolos de conmutación.
Solución:

Sabemos que

$$A_x = \frac{M_x}{D_x};\ A_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x};\quad {}_{n/}A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x};\quad {}_{n/m}A_x = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x}$$

Por tanto:

$${}_nE_x\ A_{x+n} = \frac{D_{x+n}}{D_x}\,\frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{M_{x+n}}{D_x} = {}_{n/}A_x$$

$$A_x - A_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \frac{M_{x+n}}{D_x} = {}_{n/}A_x$$

$$
{}_nE_x \; A_{\stackrel{1}{x+n:\overline{m}|}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_{x+n}} = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x} = {}_{n/m}A_x
$$

4.- Demuestre la igualdad

$$
(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{\infty} {}_{n/}\overline{A}_x \, dn
$$

Solución:

Ciertamente

$$
\int_0^{\infty} {}_{n/}\overline{A}_x \, dn = \int_0^{\infty} (\int_n^{\infty} v^t \, g_x(t)dt) \, dn =
$$

Se trata de la integral doble de la función

$$
f(n,t) = v^t \, g_x(t)
$$

en el conjunto de integración

$$
A = \{(n,t) \in R^2 / 0 \leq n < \infty, n \leq t < \infty\}
$$

conjunto que también puede definirse como

$$
A = \{(n,t) \in R^2 / 0 \leq t < \infty, 0 \leq n < t\}
$$

por lo que

$$
\int_0^{\infty} (\int_n^{\infty} v^t \, g_x(t)dt) \, dn = \int_0^{\infty} (\int_0^{t} v^t \, g_x(t)dn) \, dt = \int_0^{\infty} v^t \, g_x(t) (\int_0^{t} dn) \, dt =
$$

$$
= \int_0^{\infty} t \, v^t \, g_x(t)dt = (\bar{I}\bar{A})_x
$$

5.- Una cabeza de 45 años de edad contrata un seguro mediante el cual si fallece antes de los 50 recibirá un capital de 1000 u.c. y si alcanza con vida los 50 años recibirá 500 u.c. El tipo de interés técnico es i = 0.03 y la tabla de mortalidad la PEM82 (véase, Eliseo Navarro (1991)) para la cual

x	l_x
45	940176.820
46	936842.013
47	933192.077
48	929200.814
49	924838.216
50	920094.374

Estudie el valor actual de este seguro obteniendo su función de cuantía y la media y varianza.

Solución:

El seguro contratado es un mixto de capitales distintos. Para su estudio emplearemos la hipotesis de pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento. Siendo $v = (1.03)^{-1}$,el valor actual toma los valores

1000 v si el asegurado fallece a los 45 años, 1000 v^2 si fallece a los 46, 1000 v^3 si fallece a los 47, 1000 v^4 si fallece a los 48 y 1000 v^5 si fallece a los 49 y 500 v^5 si alcanza con vida los 50. La probabilidades de dichos valores son q_x, $_{1/}q_x$, $_{2/}q_x$, $_{3/}q_x$, $_{4/}q_x$ y $_5p_x$.

La función de cuantía es, en resumen

z	$P(z)$
$970873,786$	0.00354699
$942595,909$	0.00388218
$915141,659$	$0,00424522$
$888487,047$	$0,00464018$
$862608,784$	$0,00506696$
$531304,399$	$0,97861844$

El valor actual actuarial para este seguro mixto es

$$(VAC)_{45:\overline{5}|} = E(Z) = 1000\ A^{\ 1}_{45:\overline{5}|} + 500\ A_{45:\overset{\ \ 1}{\overline{5}|}} =$$

$$= 1000 \sum_{k=0}^{4} v^{k+1}\ _{k/}q_x + 500\ v^5\ _5p_x = 441,5639$$

Asimismo la varianza del valor actual

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 =$$

$$= (\sum_{k=0}^{4}(1000\ v^{k+1})^2\ _{k/}q_x + (500\ v^5)^2\ _5p_x) - (E(Z))^2 = 199827,27$$

6.- Obtenga el valor actual actuarial de un seguro vida entera para una cabeza de edad x, de capital asegurado unitario, siendo la ley de mortalidad la correspondiente al tanto instantáneo de mortalidad constante y el tipo de interés tecnico también es constante en los casos de pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento y al final del año de fallecimiento.

Solución:
a) Pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento.
Siendo

$$\mu_{x+t} = \mu$$

sabemos que (véase apartado 1.6.1),

$$_tp_x = e^{-\int_0^t \mu \, dt} = e^{-\mu \, t}$$

Por tanto,

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta \, t} e^{-\mu \, t} \, \mu \, dt = \mu \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu) \, t} \, dt = -\frac{\mu}{\delta+\mu} \int_0^\infty -(\delta+\mu) \, e^{-(\delta+\mu) \, t} \, dt =$$

$$= \frac{\mu}{\delta+\mu}$$

con $\delta = \ln(1+i)$.

b) Pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento.
Ciertamente

$$q_x = 1 - e^{-\mu}$$

por tanto

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_{k/}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_tp_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, e^{-\mu \, k} \, (1 - e^{-\mu}) =$$

$$= v(1 - e^{-\mu}) \sum_{k=0}^{\infty} (v \, e^{-\mu})^k = v(1 - e^{-\mu}) \, \frac{1}{1 - v \, e^{-\mu}} = v(1 - e^{-\mu}) \, \frac{1}{1 - \frac{e^{-\mu}}{(1+i)}} =$$

$$= (1 - e^{-\mu}) \, \frac{1}{1 + i - e^{-\mu}} = \frac{q_x}{i + q_x}$$

Notemos que los valores actuales actuariales calculados no dependen de la edad del asegurado (ni q_x ni μ dependen de x).

7.- Siendo

$$\mu_x = \frac{1}{105 - x} \quad x \geq 0$$

e $i = 0.03$.
Calcule $\bar{A}^{\,1}_{30:\overline{15|}}$.
Solución:

Hemos de calcular el valor actual acturial de un seguro temporal para una cabeza de 30 años y una temporalidad de 15 años con un capital asegurado unitario, con pago del capital asegurado en el instante del fallecimiento.

La ley de supervivencia es la de De Moivre estudiada en el apartado 1.6.2 y el tipo de interés técnico es el 3%.

Sabemos que (1.49)

$$g_x(t) = \frac{1}{105 - x}$$

por tanto

$$\bar{A}^{\ 1}_{30:\overline{15|}} = \int_0^{15} (1,03)^{-t}\ g_{30}(t)dt = \int_0^{15} (1,03)^{-t}\ \frac{1}{85}\ dt =$$

$$= \frac{-1}{85\ \ln(1.03)}(1,03)^{-t}\Big]_0^{15} = 0.1425426075$$

8.- Siendo

$$\mu_x = \frac{1}{110 - x} \quad x \geq 0$$

e $i = 0.03$.

Calcule la esperanza matemática y la varianza del valor actual de un seguro vida entera de capital asegurado unitario con pago en el instante del fallecimiento para las edades 30, 40, 50,....,100. asi como la correspondiente probabilidad de que la esperanza matematica supere el valor actual.

Solución:

Procediendo como en el ejercicio anterior, tenemos

$$\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^{110-x} (1,03)^{-t}\ \frac{1}{110 - x}\ dt$$

Asimismo la varianza del valor actual es

$$Var(Z) = {}^2\ \bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

donde

$${}^2\ \bar{A}_x = \int_0^{110-x} (1.03)^{-2\ t}\ \frac{1}{110 - x}\ dt$$

Una vez calculadas las correpondientes integrales como en el ejercicio anterior se obtienen los siguientes resultados

x	$\bar{A}_x$	$Var(Z)$
30	0.3831442	0.0627759
40	0.4222588	0.0594949
50	0.4681441	0.0546428
60	0.5222761	0.0479331
70	0.5864946	0.0391683
80	0.6630999	0.0284426
90	0.7549768	0.0165045
100	0.8657525	0.0054494

Notemos que la esperanza matematica del valor actual (prima única pura) se incrementa con la edad, mientras que la varianza disminuye.

En cuanto a la función de distribución del valor actual, hemos de hacer notar que aunque estamos en un seguro vida entera la existencia de una edad límite $\omega = 110$, hace que el valor actual mínimo con densidad distinta de cero sea v^{110-x}. Asi la función de distribución del valor actual es

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z < v^{110-x} \\ {}_{h(z)}p_x & si \quad v^{110-x} \leq z < 1 \\ 1 & si \quad z \geq 1 \end{cases}$$

donde

$$h(z) = -\frac{\ln(z)}{\delta}$$

y por tanto

$${}_{h(z)}p_x = e^{-\int_x^{x-\frac{\ln(z)}{\delta}} \frac{1}{110-s}\, ds}$$

Sustituyendo x por la edad correspondiente y z por $\bar{A}_x$y despues de realizar los calculos, se obtienen las siguientes probabilidades de que el valor actual supere a la esperanza matematica

x	$1 - F(\bar{A}_x)$
30	0.405692
40	0.416669
50	0.427948
60	0.439502
70	0.457271
80	0.463290
90	0.475439
100	0.487692

9.- Encuentre el valor actual actuarial de cada uno de los siguientes seguros para una cabeza de edad x:

a) MIXTO A CAPITAL DOBLADO: se asegura el pago de un capital si el asegurado fallece a cualquier edad, y el pago de un capital si el asegurado vive a la edad x+n.

b) TERMINO FIJO: se asegura el pago de un capital pasados n años, con independencia de que el asegurado siga con vida o haya fallecido.

c) SEGURO INTEGRAL: se asegura el pago de un capital pasados n años si el asegurado fallece entre las edades x y x+n.

Solución:

a) Suponiendo que los capitales que se pagan son unitarios, el seguro mixto a capital doblado es claramente la suma de un seguro vida entera y un capital diferido, por lo que su valor actual actuarial es igual a

$$A_x + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ \ 1}$$

b) Se trata evidentemente de una operación financiera, cuyo valor actual es v^n.

c) El valor actual actuarial de un seguro integral es claramente igual a

$$v^n \ {}_nq_x = v^n(1 - \ {}_np_x) = v^n - A_{x:\overline{n|}}^{\ \ \ 1}$$

es decir, es igual a la diferencia entre un término fijo y el valor actual actuarial de un capital diferido.