5

Rentas vitalicias (I). Rentas constantes

5.1 Introducción

En este capítulo comenzamos el estudio de las **rentas vitalicias**, que podemos definir como un conjunto de capitales con vencimientos determinados cuya exigencia o pago se produce si en ellos se encuentra con vida una cabeza determinada.

Pueden ser **temporales**, cuando además su duración se encuentra limitada a un determinado periodo de tiempo, o **ilimitadas**, cuando no existe tal limitación.

También se distingue entre rentas **inmediatas**, cuando el primer capital vence en el primer periodo, y rentas **diferidas**, cuando el primer vencimiento se produce transcurridos varios periodos.

Distinguiremos asimismo entre rentas **continuas** y **discretas**, y en este último caso entre **prepagables** y **postpagables** según que los capitales venzan al principio o al final de cada periodo.

Con el estudio de las rentas, a la vez que completamos el de los seguros para el caso de vida, nos dotamos de un instrumento fundamental para afrontar en el capítulo séptimo el estudio de las primas periódicas.

A lo largo de este capítulo trataremos únicamente las rentas constantes, considerando los casos continuo y discreto, y tomando en este último caso como unidad de tiempo el año de tal forma que los capitales vencerán al principio o fin de cada año.

En el capítulo siguiente completaremos el análisis con las rentas fraccionadas y las rentas variables.

5.2 Rentas Inmediatas e Ilimitadas

Como ya hemos indicado, las **rentas vitalicias ilimitadas** se caracterizan porque los capitales que las constituyen son exigibles o pagaderos hasta el fallecimiento de la cabeza considerada, sin limitación temporal alguna. Asimismo, en las **rentas inmediatas** el primer capital vence en el primer periodo.

5.2.1 Caso discreto

Renta prepagable

Consideremos una cabeza de edad x que habrá de recibir o pagar una unidad monetaria en el momento actual y en cada uno de los aniversarios mientras siga con vida. Observemos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1.............................. & 1........ \\ \vdash & + & + & + \\ x & x+1 & x+2........................ & x+n........ \end{array}$$

Ciertamente, el **valor actual** de esta renta es una variable aleatoria que es función del número de años completos de vida hasta la muerte de (x), esto es, depende del valor que tome la variable aleatoria K_x. Así,

* Si $K_x = 0$, esto es, la citada cabeza fallece a la edad x sin haber cumplido la edad $x + 1$, el valor actual de los pagos es 1 $(= \ddot{a}_{\overline{1}|})$.

* Si $K_x = 1$, esto es, el fallecimiento se produce a la edad $x + 1$, el valor actual es

$$1 + 1\ (1+i)^{-1} (= \ddot{a}_{\overline{2}|})$$

* En general, si $K_x = k$, esto es, el fallecimiento se produce a la edad $x + k$, el valor actual es

$$1 + 1\ (1+i)^{-1} + ... + 1\ (1+i)^{-k}\ (= \ddot{a}_{\overline{k+1}|})$$

Por tanto, el valor actual de la renta estudiada es una variable aleatoria discreta cuyos posibles valores son

$$Z = f(K_x) = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} \quad K_x = 0, 1, 2, ...$$

con probabilidades

$$P(Z = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}) = {}_{k/}q_x \quad k = 0, 1, 2, ...$$

La **esperanza matemática** de esta variable aleatoria, o **valor actual actuarial** de la renta, se representa por $\ddot{a}_x$, y asumiendo la existencia de la edad límite ω, es igual a

$$\ddot{a}_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_{k/}q_x \qquad (5.1)$$

siendo la **varianza**,

$$Var(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1|}})^2 \ {}_{k/}q_x - (\ddot{a}_x)^2 \tag{5.2}$$

De forma alternativa, el valor actual actuarial de la renta puede obtenerse como la suma de los valores actuales actuariales de cada uno de los capitales unitarios con vencimiento al comienzo de cada año en caso de supervivencia de la cabeza considerada. Ya que el valor actual actuarial de cada uno de esos capitales es

$${}_kE_x \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

tenemos

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_kE_x \tag{5.3}$$

La igualdad entre las dos expresiones (5.1) y (5.3) es sencilla de probar. Teniendo en cuenta que

$${}_{k/}q_x = {}_{k+1}q_x - {}_kq_x \quad y \quad \ddot{a}_{\overline{k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{k|}} = v^k$$

tenemos:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \ {}_{k/}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \ ({}_{k+1}q_x - {}_kq_x) =$$

$$= \ddot{a}_{\overline{1|}} \ ({}_1q_x - {}_0q_x) + \ddot{a}_{\overline{2|}} \ ({}_2q_x - {}_1q_x) + ... + \ddot{a}_{\overline{\omega-x|}} \ ({}_{\omega-x}q_x - {}_{\omega-x-1}q_x) =$$

$$= {}_1q_x \ (\ddot{a}_{\overline{1|}} - \ddot{a}_{\overline{2|}}) + ... +_{\omega-x-1} q_x \ (\ddot{a}_{\overline{\omega-x-1|}} - \ddot{a}_{\overline{\omega-x|}}) + \ddot{a}_{\overline{\omega-x|}} \ {}_{\omega-x}q_x =$$

$$= (1 - p_x) \ (-v) + (1 - {}_2p_x) \ (-v^2) + ...(1 - {}_{\omega-x-1}p_x) \ (-v^{\omega-x-1}) + \ddot{a}_{\overline{\omega-x|}} =$$

$$= -(v + ... + v^{\omega-x-1}) + (v \ p_x + ... + v^{\omega-x-1} \ {}_{\omega-x-1}p_x) + \ddot{a}_{\overline{\omega-x|}} - 1 + 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k \ {}_kp_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_kE_x$$

Notemos que este segundo procedimiento para la valoración de rentas permite el cálculo de la esperanza matemática del valor actual pero no de momentos de mayor orden.

Podemos dar una interpretación de $\ddot{a}_x$ fundamentada en el **modelo determinista,** planteando el siguiente problema: ¿qué cantidad C de dinero han de pagar en este momento cada una de las l_x personas vivas a la edad x, a cambio de recibir en este momento una unidad monetaria cada una de ellas, de recibir también otra unidad monetaria las l_{x+1} personas que alcancen con vida la edad x+1, otra unidad monetaria las l_{x+2} personas que alcancen con vida la edad x+2, y así sucesivamente?.

Ya que, dentro del modelo determinista, l_x, l_{x+1}, $l_{x+2}, \ldots$ se suponen conocidos con exactitud de antemano, la equivalencia financiera de las cantidades entregadas y recibidas se puede expresar como

$$C.l_x = l_x + v\ l_{x+1} + v^2\ l_{x+2} + \ldots.. + v^{\omega-x-1}\ l_{\omega-x-1}$$

y por tanto

$$C = 1 + v\ \frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\ \frac{l_{x+2}}{l_x} + \ldots.. + v^{\omega-x-1}\ \frac{l_{\omega-x-1}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k\ \frac{l_{x+k}}{l_x} = \ddot{a}_x$$

Obtengamos ahora la **relación entre el valor actual actuarial de esta renta y el del seguro vida entera.** Sabemos que

$$\ddot{a}_{\overline{k+1|}} = 1 + 1\ (1+i)^{-1} + \ldots\ldots + 1\ (1+i)^{-k} = \frac{1-(1+i)^{-k-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-v^{k+1}}{d}$$

donde

$$d = 1-(1+i)^{-1}$$

es el **tipo de descuento** equivalente al de capitalización i.

Siendo los valores actuales de la renta prepagable y del seguro vida entera

$$Z = \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} = \frac{1-v^{K_x+1}}{d}, \quad K_x = 0, 1, 2, \ldots.$$

y

$$Z_1 = v^{K_x+1}, \quad K_x = 0, 1, 2, ..$$

es claro que

$$Z = \frac{1-Z_1}{d}.$$

Por tanto,

$$E(Z) = \frac{1 - E(Z_1)}{d}$$

esto es,

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} \tag{5.4}$$

y también

$$d\, \ddot{a}_x + A_x = 1 \tag{5.5}$$

Asimismo, elementalmente,

$$Var(Z) = \frac{Var(Z_1)}{d^2} \tag{5.6}$$

Expresemos finalmente $\ddot{a}_x$ en **símbolos de conmutación**:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{v^{k+x}\, l_{x+k}}{v^x\, l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} \tag{5.7}$$

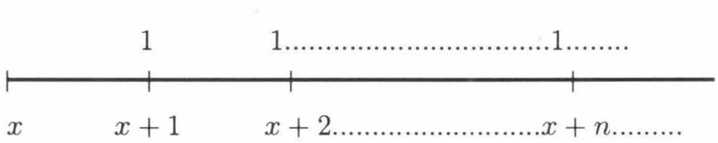
donde

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + ... + D_{\omega-1}$$

es una nueva función de conmutación.

Renta postpagable

Consideremos una cabeza de edad x que habrá de recibir o pagar una unidad monetaria en cada uno de los aniversarios mientras siga con vida, esto es, al alcanzar las edades $x+1,\ x+2,\ x+3.....$



Ciertamente, el **valor actual** de esta renta es una variable aleatoria que es función del número de años completos de vida hasta la muerte de (x), esto es, depende del valor que tome la variable aleatoria K_x. Razonando análogamente al caso prepagable, el valor actual de la renta es una variable aleatoria cuyos valores son

$$Z = f(K_x) = a_{\overline{K_x|}} \quad K_x = 0, 1, 2, ...$$

siendo las probabilidades

$$P(Z = a_{\overline{k|}}) = {}_{k/}q_x \quad k = 0, 1, 2, ...$$

y

$$a_{\overline{k|}} = 1\ (1+i)^{-1} + 1\ (1+i)^{-2} + ... + 1\ (1+i)^{-k} = \frac{1 - v^k}{i}$$

La **esperanza matemática** de esta variable aleatoria, o **valor actual actuarial** de la renta, se representa por a_x y es igual a

$$a_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega - x - 1} a_{\overline{k|}}\ {}_{k/}q_x \tag{5.8}$$

La **varianza** es, elementalmente,

$$Var(Z) = \sum_{k=0}^{\omega - x - 1} (a_{\overline{k|}})^2\ {}_{k/}q_x - (a_x)^2 \tag{5.9}$$

Asimismo se demuestra con facilidad que también se verifica

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega - x - 1} {}_kE_x \tag{5.10}$$

La **relación con el valor actual actuarial de la renta prepagable** es clara

$$a_x = \ddot{a}_x - 1 \tag{5.11}$$

Analicemos ahora la **relación con el seguro vida entera**. Siendo

$$Z = a_{\overline{K_x|}} = \frac{1 - v^{K_x}}{i}, \quad K_x = 0, 1, 2, ...$$

y

$$Z_1 = v^{K_x + 1}, \quad K_x = 0, 1, 2, ..$$

es claro que

$$Z = \frac{1 - (1+i)\ Z_1}{i}$$

Por tanto,

$$E(Z) = \frac{1 - (1+i)\ E(Z_1)}{i}$$

esto es,

$$a_x = \frac{1 - (1+i)\ A_x}{i} \tag{5.12}$$

y también

$$i\ a_x + (1+i)\ A_x = 1 \tag{5.13}$$

Asimismo se tiene

$$Var(Z) = \frac{(1+i)^2\ Var(Z_1)}{i^2} \tag{5.14}$$

Expresemos finalmente a_x en **símbolos de conmutación:**

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} v^k\ \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} \frac{v^{k+x}\ l_{x+k}}{v^x\ l_x} = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{5.15}$$

5.2.2 Caso continuo

Supondremos ahora que (x) recibe o paga de forma continua y uniforme una unidad monetaria anual mientras viva.

El **valor actual** de la renta es una variable aleatoria que depende de T_x, esto es,

$$Z = f(T_x) = \bar{a}_{\overline{T_x|}}$$

donde

$$\bar{a}_{\overline{t|}} = \int_0^t e^{-\delta z} dz = \frac{1 - v^t}{\delta}$$

es el valor actual de una renta financiera unitaria y continua, siendo como siempre $\delta = \log(1+i)$ y $v^t = e^{-\delta t}$.

Supuesta conocida la función de densidad de T_x, el cálculo de los principales momentos de Z es sencillo.

Su **esperanza matemática** o **valor actual actuarial**, que se representa mediante $\bar{a}_x$, es

$$\bar{a}_x = E(Z) = \int_0^{+\infty} \bar{a}_{\overline{t|}}\ g_x(t)\ dt \tag{5.16}$$

y ya que

$$E(Z^2) = \int_0^{+\infty} (\bar{a}_{\overline{t|}})^2 \; g_x(t) \; dt$$

la **varianza** de Z resulta ser

$$Var(Z) = E(Z^2) - (\bar{a}_x)^2 \tag{5.17}$$

Integrando por partes en (5.16), tomando

$$u = \bar{a}_{\overline{t|}} \quad y \quad v = -(1 - G_x(t))$$

se tiene

$$du = v^t \; dt \quad y \quad dv = g_x(t) \; dt$$

y por tanto

$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} \bar{a}_{\overline{t|}} \; g_x(t) \; dt = - \; \bar{a}_{\overline{t|}} \; (1 - G_x(t))]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (1 - G_x(t)) \; v^t \; dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} {}_tp_x \; v^t \; dt = \int_0^{+\infty} {}_tE_x \; dt \; ^*$$

Así obtenemos una nueva expresión para el valor actual actuarial estudiado:

$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} {}_tE_x \; dt \tag{5.18}$$

Finalmente, la **relación entre el valor actual de esta renta continua y el del seguro vida entera** con pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento es sencilla de obtener:

Siendo de nuevo el valor actual del seguro vida entera

$$Z_1 = v^{T_x} \quad T_x \geq 0$$

---

*De nuevo asumiendo la existencia de la edad límite ω, es claro que

$$- \; \bar{a}_{\overline{t|}} \; (1 - G_x(t))]_0^{+\infty} = 0$$

y que se produce la convergencia de las integrales impropias. Recordemos que el límite superior en ellas puede sustituirse por $\omega - x$.

es claro que

$$Z = \frac{1 - Z_1}{\delta}$$

$$E(Z) = \frac{1 - E(Z_1)}{\delta}$$

esto es,

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} \tag{5.19}$$

y también

$$\delta\ \bar{a}_x + \bar{A}_x = 1 \tag{5.20}$$

Asimismo,

$$Var(Z) = \frac{Var(Z_1)}{\delta^2} \tag{5.21}$$

Distribución de probabilidad del valor actual

Siendo conocida la distribución de probabilidad de T_x, hemos de estudiar la de la transformación $Z = \frac{1-\ v^{T_x}}{\delta}$. Ya que la función $z = \frac{1-\ v^t}{\delta}$ es creciente e invertible, llamando

$$h(z) = -\frac{\log(1 - \delta z)}{\delta}$$

sabemos que

$$P(Z \leq z) = P(T_x \leq h(z))$$

Así pues,

$$F(z) = G_x(h(z))$$

y

$$f(z) = g_x(h(z))\ h'(z)$$

por lo que la función de distribución del valor actual es

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z < 0 \\ {}_{h(z)}q_x & si \quad 0 \leq z < \frac{1}{\delta} \\ 1 & si \quad z > \frac{1}{\delta} \end{cases}$$

y la función de densidad

$$f(z) = \begin{cases} \frac{{}_{h(z)}p_x . \mu_{x+h(z)}}{1-\delta . z} & si \quad 0 \leq z < \frac{1}{\delta} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hagamos notar que aunque $\overline{a}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{\delta}$, en la práctica asumiendo la existencia de la edad límite ω el mayor de los valores actuales con densidad positiva será $\overline{a}_{\overline{\omega-x|}}$.

Ejemplo 6 *Para un tanto instantáneo de mortalidad*

$$\mu_x = 0.00065 + 0.00006\ 1.09^x$$

en la siguiente gráfica representamos las funciones de densidad del valor actual de una renta continua inmediata e ilimitada para una persona de 30 años y un tipo de interés de valoración $i = 0.04$ *(línea de puntos) e* $i = 0.06$ *(línea continua):*

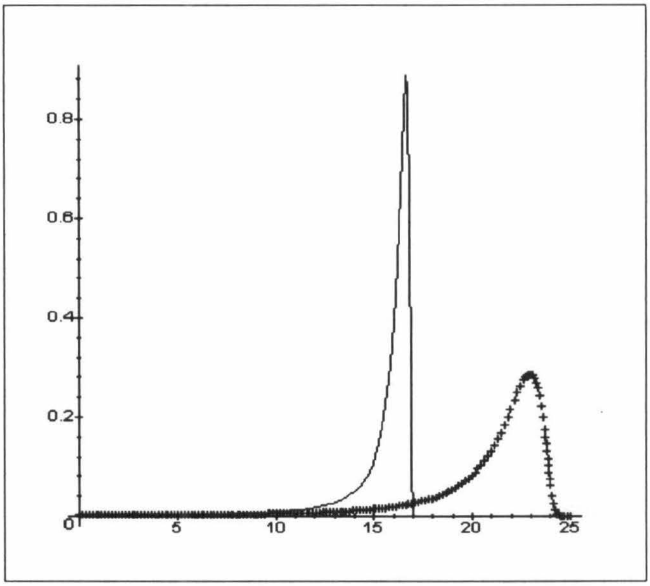


Figura 5.1

En la siguiente gráfica representamos las correspondientes funciones de distribución:

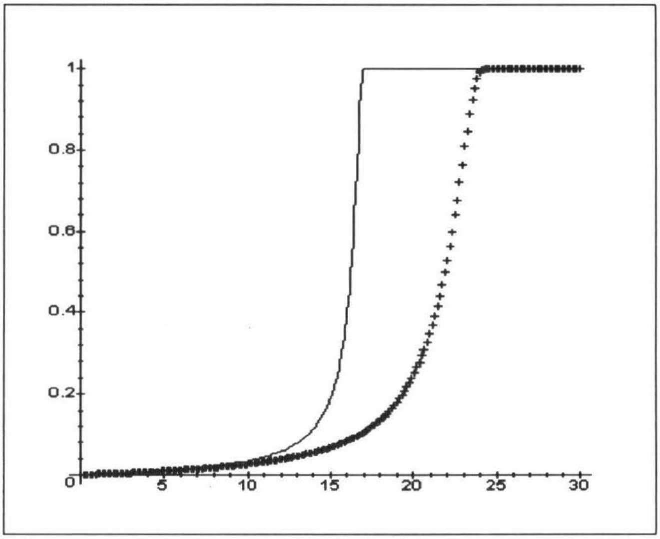


Figura 5.2

Asimismo, en las dos siguientes figuras se representan las funciones de densidad y distribución del valor actual para un tipo de interés de valoración $i = 0.04$ *y dos cabezas, una de 40 años (línea continua) y otra de 50 años (línea de puntos):*

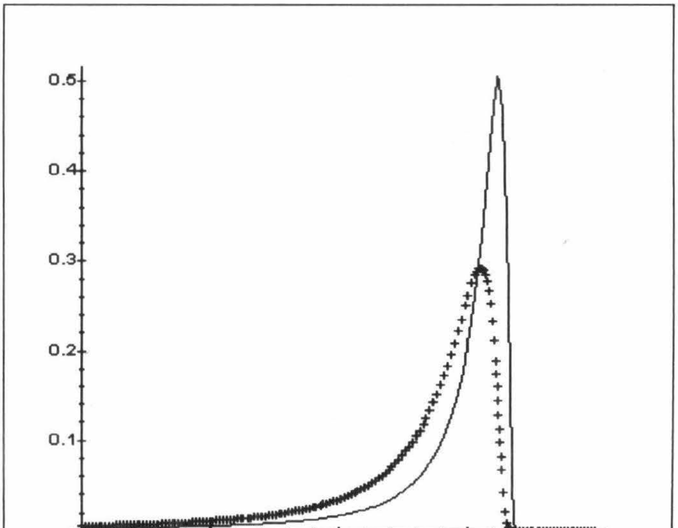


Figura 5.3

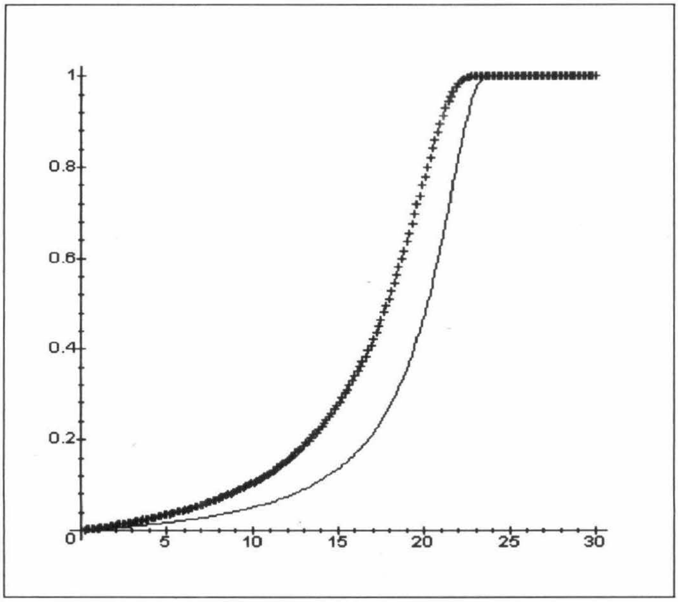


Figura 5.4

Ejemplo 7 *Disponer de las funciones de densidad y distribución del valor actual de la renta nos permite resolver problemas como el del cálculo de la probabilidad de que el valor actual de la renta supere a su esperanza matemática o a cualquier otro valor. Hagámoslo tomando la ley de mortalidad del ejemplo anterior y para $x = 30$ e $i = 0.04$.*

Hemos de disponer de la función de densidad de la vida residual:

$$g_{30}(t) = {}_tp_{30}\ \mu_{30+t} = e^{-\int_{30}^{30+t} 0.00065+0.00006\ 1.09^s ds}\ (0.00065 + 0.00006\ 1.09^{30+t})$$

Para el cálculo de la esperanza matemática del valor actual basta calcular la siguiente integral (hemos tomado como edad límite $\omega = 115$) :

$$a_{30} = \int_0^{85} \frac{1-(1+0.04)^{-t}}{\log(1.04)}\ g_{30}(t)\ dt = 20.7255$$

La función de distribución del valor actual es

$$F(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\int_{30}^{30-\frac{\ln(1-\ln(1.04)\ z)}{\ln(1.04)}} 0.00065+0.00006\ 1.09^s ds} & si \quad 0 \le z < \frac{1}{\ln(1.04)} \\ 1 & si \quad z \ge \frac{1}{\ln(1.04)} \end{cases}$$

y la probabilidad buscada es

$$1 - F(20.7255) = 0.6799$$

Notemos que la distribución de probabilidad del valor actual de la renta posee una notable asimetría negativa (observe la figura 5.1, gráfica de puntos) ya que su coeficiente de asimetría es -2.5754, *siendo su media inferior a su mediana* (21.86835).

5.3 Rentas Temporales.

Las **rentas temporales** se caracterizan porque los capitales que las constituyen son exigibles o pagaderos hasta el fallecimiento de la cabeza considerada pero como mucho hasta que se alcance cierto momento del tiempo.

5.3.1 Caso discreto

Renta prepagable

Consideremos una cabeza de edad x que habrá de recibir o pagar una unidad monetaria en el momento actual y en cada uno de los aniversarios mientras siga con vida y como máximo hasta alcanzar la edad $x+n$.

Ciertamente, el **valor actual** de esta renta es una variable aleatoria Z que es función del número de años completos de vida hasta la muerte de (x). Con un razonamiento análogo al realizado en el estudio de la renta ilimitada, está claro que

$$Z = f(K_x) = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} & cuando \quad K_x = 0,1,....n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & cuando \quad K_x = n, n+1,..... \end{cases}$$

siendo, además

$$P(Z = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}) = {}_{k/}q_x \quad k = 0,1,2,...,n-1.$$

y

$$P(Z = \ddot{a}_{\overline{n}|}) = {}_{n}p_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} {}_{k/}q_x$$

La **esperanza matemática** de esta variable aleatoria, o **valor actual actuarial** de la renta, se representa por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ y es igual a

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_{k/}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_{n}p_x \tag{5.22}$$

La **varianza** es, elementalmente,

$$Var(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2\ {}_{k/}q_x + \ddot{a}^2_{\overline{n}|}\ {}_{n}p_x - (\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2 \tag{5.23}$$

Asimismo, es fácil probar que

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x \tag{5.24}$$

Obtengamos ahora la **relación entre el valor actual actuarial de la renta temporal y el del seguro mixto simple**.

Sabemos que los valores que toma el valor actual del seguro mixto simple vienen dados por

$$Z_1 = f(K_x) = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x = 0, 1, 2...n-1 \\ v^n & K_x = n, n+1, n+2, ... \end{cases}$$

y ya que

$$\ddot{a}_{\overline{k+1}|} = \frac{1 - v^{k+1}}{d}$$

tenemos

$$Z = \frac{1 - Z_1}{d} \quad K_x = 0, 1, 2, ...$$

Por tanto,

$$E(Z) = \frac{1 - E(Z_1)}{d}$$

esto es,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} \tag{5.25}$$

Asimismo,

$$Var(Z) = \frac{Var(Z_1)}{d^2} \tag{5.26}$$

A continuación expresaremos $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ en **símbolos de conmutación**:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v^{k+x} \, l_{x+k}}{v^x \, l_x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{5.27}$$

Valor final de la renta. El **valor final de la renta temporal y prepagable**, que representaremos mediante $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$, es

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|}= \frac{1}{{}_nE_x}\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{5.28}$$

Notemos asimismo que

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|}= \frac{1}{{}_nE_x} \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_kE_x}{{}_nE_x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{}_{n-k}E_{x+k}} \tag{5.29}$$

(donde $\frac{1}{{}_nE_x}$ es el factor de capitalización actuarial.).

Asumiendo el **modelo determinista**, es posible justificar el valor final de la renta partiendo de la siguiente pregunta: ¿qué cantidad C podrá recibir cada uno de los l_{x+n} individuos que alcanzan con vida la edad $x+n$, supuesto que cada uno de los l_x individuos vivos a la edad x entrega una unidad monetaria, que asimismo la entregan los l_{x+1} que alcanzan la edad $x+1$, y así sucesivamente hasta los l_{x+n-1} que alcanzan con vida la edad $x+n-1$?.

Ciertamente, planteando la equivalencia financiera al final de la operación obtendremos

$$C.l_{x+n} = (1+i)^n\, l_x + (1+i)^{n-1}\, l_{x+1} + ... + (1+i)\, l_{x+n-1}$$

de donde

$$C = \frac{1}{v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}} + \frac{1}{v^{n-1} \frac{l_{x+n}}{l_{x+1}}} + ... + \frac{1}{v^n \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}} =$$

$$= \frac{1}{v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}} \left(1 + v\frac{l_{x+1}}{l_x} + ... + v^{n-1}\frac{l_{x+n-1}}{l_x} \right) = \frac{1}{{}_nE_x}\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Así pues, el valor buscado es precisamente el valor final:

$$C = \ddot{s}_{x:\overline{n}|}$$

Renta postpagable

Consideremos una cabeza de edad x que habrá de recibir o pagar una unidad monetaria en cada uno de los aniversarios mientras siga con vida y como máximo hasta alcanzar la edad $x+n$.

Ciertamente, el **valor actual** de esta renta es una variable aleatoria Z que es función del número años completos de vida hasta la muerte de (x). Razonando de forma análoga al caso de las rentas ilimitadas, obtenemos que

$$Z = f(K_x) = \begin{cases} a_{\overline{K_x}|} & \textit{cuando} \quad K_x = 0, 1, ..., n-1 \\ a_{\overline{n}|} & \textit{cuando} \quad K_x = n, n+1, ... \end{cases}$$

siendo además

$$P(Z = a_{\overline{k}|}) = {}_{k/}q_x \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

y

$$P(Z = a_{\overline{n}|}) = {}_{n}p_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} {}_{k/}q_x$$

La **esperanza matemática** de esta variable aleatoria, o **valor actual actuarial** de la renta, se representa por $a_{x:\overline{n}|}$ y es igual a

$$a_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{\overline{k}|} \, {}_{k/}q_x + a_{\overline{n}|} \, {}_{n}p_x \tag{5.30}$$

La **varianza** es, elementalmente,

$$Var(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{\overline{k}|})^2 \, {}_{k/}q_x + a^2_{\overline{n}|} \, {}_{n}p_x - (a_{x:\overline{n}|})^2 \tag{5.31}$$

Asimismo, es fácil probar que

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_{k}E_x \tag{5.32}$$

También es clara la siguiente **relación entre las rentas temporales prepagables y postpagables:**

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

Expresemos ahora $a_{x:\overline{n}|}$ en **símbolos de conmutación**:

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \, \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{v^{k+x} \, l_{x+k}}{v^x \, l_x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \tag{5.33}$$

Al igual que para el caso discreto, el **valor final** de la renta postpagable viene dado por

$$s_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{{}_nE_x}\, a_{x:\overline{n|}} \tag{5.34}$$

siendo asimismo

$$s_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{{}_{n-k}E_{x+k}} \tag{5.35}$$

5.3.2 Caso continuo

Supondremos ahora que (x) recibe o paga de forma continua y uniforme una unidad monetaria anual mientras viva pero como máximo hasta la edad $x+n$.

El **valor actual** de la renta es una variable aleatoria que depende de T_x,

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x|}} & si \quad 0 \leq T_x < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}} & si \quad T_x > n \end{cases}$$

Su **esperanza matemática** o **valor actual actuarial**, que se representa mediante $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$, es igual a

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = E(Z) = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t|}}\, g_x(t)\; dt + \bar{a}_{\overline{n|}}\; {}_np_n \tag{5.36}$$

y por ser

$$E(Z^2) = \int_0^n (\bar{a}_{\overline{t|}})^2\; g_x(t)\; dt + (\bar{a}_{\overline{n|}})^2\; {}_np_n$$

la **varianza** de Z resulta ser

$$Var(Z) = E(Z^2) - (\bar{a}_{x:\overline{n|}})^2$$

Es posible probar con facilidad que

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n {}_tE_x\; dt \tag{5.37}$$

Asimismo, su **relación con el seguro mixto simple** es la siguiente:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1 - \overline{A}_{x:\overline{n|}}}{\delta} \tag{5.38}$$

Finalmente, el **valor final** de la renta es

$$\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_nE_x}\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} \tag{5.39}$$

Distribución de probabilidad del valor actual

Conocida la distribución de probabilidad de T_x, y siendo

$$h(z) = -\frac{\ln(1-\delta\ z)}{\delta}$$

se demuestra fácilmente que la función de densidad-probabilidad del valor actual es

$$f(z) = \begin{cases} \frac{{}_{h(z)}p_x.\mu_{x+h(z)}}{1-\delta.z} & si \quad 0 \leq z < \bar{a}_{\overline{n}|} \\ {}_np_x & si \quad z = \bar{a}_{\overline{n}|} \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases} \tag{5.40}$$

y la función de distribución

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z < 0 \\ {}_{h(z)}q_x & si \quad 0 \leq z < \bar{a}_{\overline{n}|} \\ 1 & si \quad z \geq \bar{a}_{\overline{n}|} \end{cases}$$

5.4 Rentas Diferidas

Las **rentas diferidas** ilimitadas se caracterizan porque los capitales que las constituyen son exigibles o pagaderos hasta el fallecimiento de la cabeza considerada, pero a partir de una determinada edad .

5.4.1 Caso discreto

Renta prepagable

Consideremos una cabeza de edad x que habrá de recibir o pagar una unidad monetaria en el momento de alcanzar la edad $x+n$ y en cada uno de los aniversarios mientras siga con vida.

Estudiemos la variable aleatoria **valor actual** Z. Es claro que

$$Z = f(K_x) = \begin{cases} 0 & cuando \quad K_x = 0, 1, ...n-1 \\ {}_{n/}\ddot{a}_{\overline{K_x-n+1}|} & cuando \quad K_x = n, n+1, ..., \omega - x - 1 \end{cases}$$

siendo

$$P(Z=0) = {}_nq_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}q_x$$

$$P(Z = {}_{n/}\ddot{a}_{\overline{k-n+1|}}) = {}_{k/}q_x \quad k = n, n+1, \ldots.., \omega - x - 1$$

La **esperanza matemática** de esta variable aleatoria, o **valor actual actuarial** de la renta, se representa por ${}_{n/}\ddot{a}_x$ y es igual a

$$_{n/}\ddot{a}_x = E(Z) = 0\ {}_nq_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} {}_{n/}\ddot{a}_{\overline{k-n+1|}}\ {}_{k/}q_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} {}_{n/}\ddot{a}_{\overline{k-n+1|}}\ {}_{k/}q_x \tag{5.41}$$

Asimismo, es fácil probar que

$$_{n/}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} {}_kE_x \tag{5.42}$$

Finalmente, en función de los **símbolos de conmutación**,

$$_{n/}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^k\ \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x} \tag{5.43}$$

Dos importantes propiedades del valor actual actuarial de esta renta son:

1.- El valor actual actuarial de la renta diferida n años y prepagable para una cabeza de edad x es igual al producto del factor de actualizacion actuarial para una cabeza de edad x diferido n años y del valor actual actuarial de una renta inmediata y prepagable para una cabeza de edad $x+n$; ésto es

$$_{n/}\ddot{a}_x = {}_nE_x\ \ddot{a}_{x+n} \tag{5.44}$$

2.- El valor actual actuarial de la renta diferida n años y prepagable para una cabeza de edad x es igual a la diferencia del valor actual actuarial de una renta inmediata ilimitada y prepagable y de una renta inmediata temporal n años y prepagable, ambas para una cabeza de edad x; esto es,

$$_{n/}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{5.45}$$

Las demostraciones de ambas se realizan en el ejercicio 2.

Renta postpagable

Consideremos una cabeza de edad x que habrá de recibir o pagar una unidad monetaria en el momento de alcanzar la edad $x+n+1$ y en cada uno de los aniversarios mientras siga con vida.

Estudiemos la variable aleatoria **valor actual** Z. Es claro que

$$Z = f(K_x) = \begin{cases} 0 & \textit{cuando} \quad K_x = 0, 1, ..., n-1 \\ {}_{n/}a_{\overline{K_x - n|}} & \textit{cuando} \quad K_x = n, n+1, ..., \omega - x - 1 \end{cases}$$

siendo

$$P(Z = 0) = {}_nq_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}q_x$$

$$P(Z = {}_{n/}a_{\overline{k-n|}}) = {}_{k/}q_x \quad k = n, n+1, ..., \omega - x - 1$$

La **esperanza matemática** de esta variable aleatoria, o **valor actual actuarial** de la renta, se representa mediante ${}_{n/}a_x$, siendo igual a

$${}_{n/}a_x = E(Z) = 0 \; {}_nq_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} {}_{n/}a_{\overline{k-n|}} \; {}_{k/}q_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} {}_{n/}a_{\overline{k-n|}} \; {}_{k/}q_x \tag{5.46}$$

Asimismo, es fácil probar que

$${}_{n/}a_x = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} {}_kE_x \tag{5.47}$$

Finalmente, en **símbolos de conmutación**,

$${}_{n/}a_x = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \tag{5.48}$$

Al igual que en el caso prepagable, se verifican las igualdades

$${}_{n/}a_x = {}_nE_x \; a_{x+n} \tag{5.49}$$

y

$${}_{n/}a_x = a_x - a_{x:\overline{n|}} \tag{5.50}$$

5.4.2 Caso continuo

Supondremos ahora que (x) recibe o paga de forma continua y uniforme una unidad monetaria anual mientras viva, pero a partir de la edad $x+n$.

El **valor actual** de la renta es una variable aleatoria que depende de T_x,

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq T_x < n \\ {}_{n/}\,\bar{a}_{\overline{T_x-n|}} & si \quad T_x \geq n \end{cases}$$

Su **esperanza matemática** o **valor actual actuarial**, que se representa mediante ${}_{n/}\bar{a}_x$, es igual a

$${}_{n/}\bar{a}_x = E(Z) = 0\ {}_nq_x + \int_n^{+\infty} {}_{n/}\,\bar{a}_{\overline{t-n|}}\, g_x(t)\ dt = \int_n^{+\infty} {}_{n/}\,\bar{a}_{\overline{t-n|}}\, g_x(t)\ dt \tag{5.51}$$

y por ser

$$E(Z^2) = 0\ {}_nq_x + \int_n^{+\infty} \left({}_{n/}\bar{a}_{\overline{t-n|}}\right)^2 g_x(t)\ dt$$

la **varianza** de Z resulta ser

$$Var(Z) = E(Z^2) - \left({}_{n/}\bar{a}_x\right)^2$$

Es posible probar con facilidad que

$${}_{n/}\bar{a}_x = \int_n^{+\infty} {}_tE_x\ dt \tag{5.52}$$

Al igual que en el caso discreto, se verifican las igualdades

$${}_{n/}\bar{a}_x = {}_nE_x\ \bar{a}_{x+n} \tag{5.53}$$

y

$${}_{n/}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n|}} \tag{5.54}$$

cuya demostración se realiza en el ejercicio 2.

Observación 4 *El lector no debe tener dificultad en realizar el estudio de las* ***rentas temporales y diferidas*** *y obtener la siguientes expresiones:*

$${}_{m/n}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{m/}\ddot{a}_{\overline{k-m+1|}}\ {}_{k/}q_x + {}_{m/}\ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{m+n}p_x \tag{5.55}$$

$$_{m/n}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_kE_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} \tag{5.56}$$

$$_{m/n}\ddot{a}_x = {}_mE_x \; \ddot{a}_{x+m:\overline{n|}} \tag{5.57}$$

$$_{m/n}a_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{m/}a_{\overline{k-m|}} \; {}_{k/}q_x + {}_{m/}a_{\overline{n|}} \; {}_{m+n}p_x \tag{5.58}$$

$$_{m/n}a_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} {}_kE_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} \tag{5.59}$$

$$_{m/n}a_x = {}_mE_x \; a_{x+m:\overline{n|}} \tag{5.60}$$

$$_{m/n}\overline{a}_x = E(Z) = \int_m^{m+n} {}_{m/}\bar{a}_{\overline{t-m|}} \; g_x(t) \; dt + {}_{m/}\overline{a}_{\overline{n|}} \; {}_{m+n}p_x \tag{5.61}$$

$$_{m/n}\overline{a}_x = \int_m^{m+n} {}_tE_x \; dt \tag{5.62}$$

$$_{m/n}\overline{a}_x = {}_mE_x \; \bar{a}_{x+m:\overline{n|}} \tag{5.63}$$

5.5 Expresiones recursivas

Al igual que en el caso de los seguros, es posible calcular los valores actuales actuariales de las rentas como soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales o en diferencias.

5.5.1 Rentas discretas

Consideremos, en primer lugar, la **renta inmediata e ilimitada** en el caso **prepagable**. En efecto,

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_kE_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k \; {}_kp_x = 1 + v \; p_x + v^2 \; {}_2p_x + v^3 \; {}_3p_x + ... + v^{\omega-x-1} \; {}_{\omega-x-1}p_x =$$

$$= 1 + v \; p_x \; (1 + v \; p_{x+1} + v^2 \; {}_2p_{x+1} + ... + v^{\omega-x-2} \; {}_{\omega-x-2}p_{x+1}) = 1 + v \; p_x \sum_{k=0}^{\omega-x-2} v^k \; {}_kp_{x+1}$$

esto es,

$$\ddot{a}_x = 1 + v \; p_x \; \ddot{a}_{x+1} \tag{5.64}$$

Y recordando que $\ddot{a}_x = a_x + 1$, se obtiene con facilidad la correspondiente fórmula recursiva para el caso **postpagable**:

$$a_x = v\ p_x + v\ p_x\ a_{x+1} \tag{5.65}$$

Asimismo, para la **renta temporal** se obtiene

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + v\ p_x\ \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}} \tag{5.66}$$

Hemos obtenido dos expresiones recursivas que nos permiten obtener, a partir del valor actual actuarial de la renta para una determinada edad, el correspondiente a la edad anterior (o posterior si despejamos $\ddot{a}_{x+1}$).

5.5.2 Rentas continuas

Obtendremos ahora algunas ecuaciones diferenciales cuyas soluciones proporcionan el valor actual actuarial de una renta continua como función de la edad x.

Consideremos en primer lugar la **renta inmediata e ilimitada**. Su derivada es igual a

$$\frac{d}{dx}\ \overline{a}_x = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{+\infty} v^t{}_tp_x\ dt\right) = \int_0^{+\infty} v^t \frac{d}{dx}({}_tp_x)\ dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} v^t{}_tp_x\ (\mu_x - \mu_{x+t})\ dt = \mu_x \int_0^{+\infty} v^t{}_tp_x\ dt - \int_0^{+\infty} v^t{}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt =$$

$$= \mu_x\ \overline{a}_x - \overline{A}_x = \mu_x\ \overline{a}_x - (1 - \delta\ \overline{a}_x)$$

Por tanto, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dx}\ \overline{a}_x = (\delta + \mu_x)\ \overline{a}_x - 1$$

Nos encontramos ahora en disposición de probar con facilidad la expresión (4.93):

$$\frac{d}{dx}\ \overline{A}_x = (\delta + \mu_x)\ \overline{A}_x - \mu_x$$

En efecto,

$$\frac{d}{dx}\,\overline{A}_x = -\delta\,\frac{d}{dx}\,\bar{a}_x = -\delta\,(\delta+\mu_x)\,(\frac{1-\overline{A}_x}{\delta}) + \delta = -(\delta+\mu_x)\,(1-\overline{A}_x) + \delta =$$

$$= (\delta+\mu_x)\,\overline{A}_x - \mu_x$$

con lo que queda demostrada la **ecuación diferencial para el seguro vida entera** comentada en el capítulo anterior.

Asimismo, derivando el valor actual actuarial de la **renta temporal** tenemos

$$\frac{d}{dx}\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt\right) = \int_0^n v^t\frac{d}{dx}({}_tp_x)\,dt =$$

$$= \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,(\mu_x-\mu_{x+t})\,dt = \mu_x\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt - \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$= \mu_x\;\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \mu_x\;\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} =$$

$$= \mu_x\;\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1-\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}) + \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} =$$

$$= (\delta+\mu_x)\;\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1-\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})$$

Obtenemos, por tanto, la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dx}\;\bar{a}_{x:\overline{n}|} = (\delta+\mu_x)\;\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1-\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}) \tag{5.67}$$

Podemos ahora probar con facilidad (4.95) y (4.94). Sabemos que

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1-\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dx}\,\bar{A}_{x:\overline{n}|} = -\delta\,\frac{d}{dx}\;\bar{a}_{x:\overline{n}|} = -\delta\,((\delta+\mu_x)\;\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1-\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})) =$$

$$= -\delta \left((\delta + \mu_x) \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\delta} - (1 - \bar{A}_{\underset{x:\overline{n|}}{1}}) \right) = (\delta + \mu_x)\, \bar{A}_{x:\overline{n|}} - \delta\, \bar{A}_{\underset{x:\overline{n|}}{1}} - \mu_x$$

Asimismo,

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \bar{A}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}_{\underset{x:\overline{n|}}{1}}$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dx}\, \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \frac{d}{dx}\, \bar{A}_{x:\overline{n|}} - \frac{d}{dx}\, \bar{A}_{\underset{x:\overline{n|}}{1}} =$$

$$= (\delta + \mu_x)\, (\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + \bar{A}_{\underset{x:\overline{n|}}{1}}) - \delta\, \bar{A}_{\underset{x:\overline{n|}}{1}} - \mu_x - \bar{A}_{\underset{x:\overline{n|}}{1}}\, (\mu_x - \mu_{x+n}) =$$

$$= (\delta + \mu_x)\, \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} - \mu_x + \bar{A}_{\underset{x:\overline{n|}}{1}}\, \mu_{x+n}$$

5.6 Tipos de interés variables

Abandonemos ahora la hipótesis de que el tipo de interés de valoración es constante.

Supongamos que el tipo de interés varía anualmente. Sean i_1, i_2 ,..., i_n,... los correspondientes a los años $1, 2, ..., n, ...$ (siendo i_r es el tipo de interés del año en el que el asegurado posee la edad $x + r - 1$).

Sea

$$v_{[r-1,r]} = (1 + i_r)^{-1} \qquad r = 1, 2, ...n, ...$$

el factor de actualización del año r-ésimo, y sea

$$v_{[0,k]} = \prod_{r=1}^{k} v_{[r-1,r]}$$

el correspondiente a los k primeros años. Ciertamente, cuando $i_r = i$ para todo r, entonces

$$v_{[0,k]} = (1 + i)^{-k}$$

Para el caso de una **renta vitalicia inmediata, ilimitada y prepagable**, el valor actual es una variable aleatoria

$$Z = f(K_x) = \sum_{t=0}^{K_x} v_{[0,t]} \qquad K_x = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1$$

con $v_{[0,0]} = 1$, siendo

$$P(Z = \sum_{t=0}^{k} v_{[0,t]}) = {}_{k/}q_x \quad para \quad k = 0, 1, 2 \ldots.., \omega - x - 1$$

La **esperanza matemática** de su valor actual es

$$\ddot{a}_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \left(\sum_{t=0}^{k} v_{[0,t]} \right) {}_{k/}q_x \tag{5.68}$$

pudiendo calcularse sin dificultad el resto de sus momentos.

Asimismo, se verifica también que

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v_{[0,k]} \; {}_kp_x$$

donde $v_{[0,k]} \; {}_kp_x$ es el correspondiente factor de actualización actuarial.

En el caso de las **rentas continuas**, consideremos la función

$$\delta : [0, \omega - x] \to R$$

donde $\delta(z)$ representa el tanto instantáneo de capitalización cuando el asegurado posee la edad $x + z$. Sea también la función

$$\Lambda(t) = \int_0^t \delta(z) \, dz$$

El **valor actual** de la **renta continua, inmediata e ilimitada** es una variable aleatoria

$$Z = f(T_x) = \int_0^{T_x} e^{-\Lambda(z)} \, dz \quad (T_x \geq 0)$$

y su **valor actual actuarial** es

$$\overline{a}_x = E(Z) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t e^{-\Lambda(z)} \, dz \right) g_x(t) dt \tag{5.69}$$

Asimismo, se demuestra que

$$\overline{a}_x = \int_0^{+\infty} {}_tE_x \, dt$$

donde

$$_tE_x = v_{[0,t]}\ _tp_x \quad y \quad v_{[0,t]} = e^{-\Lambda(t)}$$

De forma totalmente análoga se introducen los tipos de interés variables en el resto de las rentas vitalicias estudiadas anteriormente.

Finalmente, es posible demostrar que con tipos de interés variables se siguen cumpliendo las propiedades típicas de las rentas diferidas

$$_{n/}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{5.70}$$

$$_{n/}\ddot{a}_x = \ _nE_x\ \ddot{a}_{x+n} \tag{5.71}$$

tanto en el caso prepagable como en el postpagable y el continuo.

5.7 Ejercicios

1.- Interprete las relaciones

$$d\ \ddot{a}_x + A_x = 1$$

$$\delta\ \bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$$

Solución:

Una unidad monetaria en el momento actual (en el que el asegurado tiene la edad x) es igual, en términos de esperanza matemática, a una renta vitalicia prepagable de cuantía anual $d = \frac{i}{1+i}$ más el pago de una unidad monetaria al final del año de fallecimiento.

En el caso continuo, la renta es uniforme y continua de cuantía anual δ.

2.- Pruebe las siguientes igualdades:

a)

$$_{n/}\ \bar{a}_x = \ _nE_x\ \ \bar{a}_{x+n}$$

b)

$$_{n/}\ \bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

c)

$$_{n/}\ddot{a}_x = \ _nE_x\ \ddot{a}_{x+n}$$

d)

$$_{n/}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Solución:

a)

$$ {}_nE_x \ \bar{a}_{x+n} = {}_nE_x \int_0^{+\infty} {}_tE_{x+n} \ dt = \int_0^{+\infty} {}_{n+t}E_x \ dt = $$

(realizando el cambio de variable $n + t = z$)

$$ = \int_n^{+\infty} {}_zE_x \ dz = {}_{n/}\bar{a}_x $$

b)

$$ {}_{n/}\bar{a}_x = \int_n^{+\infty} {}_tE_x \ dt = \int_0^{+\infty} {}_tE_x \ dt - \int_0^{n} {}_tE_x \ dt = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n|}} $$

c)

$$ {}_nE_x \ \ddot{a}_{x+n} = {}_nE_x \sum_{t=0}^{\omega-x-n-1} {}_tE_{x+n} = \sum_{t=0}^{\omega-x-n-1} {}_{n+t}E_x = \sum_{t=n}^{\omega-x-1} {}_tE_x = {}_{n/}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} $$

d)

$$ {}_{n/}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} {}_kE_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_kE_x - \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} $$

3.- Pruebe las siguientes igualdades:

a)

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}} $$

b)

$$ A_x = v \ \ddot{a}_x - a_x $$

c)

$$ A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = v \ \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}} $$

Solución:

a)

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} {}_kE_x = 1 + a_{x:\overline{n-1|}} $$

b)

Por (5.5), sabemos que

$$d\ \ddot{a}_x + A_x = 1$$

Asimismo, es bien conocido que

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

En consecuencia,

$$A_x = 1 - d\ \ddot{a}_x = 1 - (1-v)\ddot{a}_x = 1 - \ddot{a}_x + v\ddot{a}_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

c)
Por (5.25), sabemos que

$$d\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} = 1$$

Asimismo sabemos que

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}$$

$$A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}} = {}_nE_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|} = 1 + a_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x$$

En consecuencia,

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} - {}_n E_x = 1 - (1-v)\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_n E_x = 1 - \ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + v\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_n E_x =$$

$$v\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + (1 - {}_n E_x) - (1 + a_{x:\overline{n}|} - {}_n E_x) = v\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

4.- Demuestre las siguientes igualdades:

a)

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v\ p_x\ \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$$

b)

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{1}|}\ + v\ p_x\ \bar{a}_{x+1}$$

Solución:

a)

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_kp_x = 1 + v\ p_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + ... + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x =$$

$$= 1 + v\ p_x\ (1 + v\ p_{x+1} + v^2\ {}_2p_{x+1} + ... + v^{n-2}\ {}_{n-2}p_{x+1}) = 1 + v\ p_x\ \sum_{k=0}^{n-2} v^k\ {}_kp_{x+1} =$$

$$= 1 + v\ p_x\ \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}$$

b)

$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} {}_tE_x\ dt = \int_0^{+\infty} v^t\ {}_tp_x\ dt = \int_0^1 v^t\ {}_tp_x\ dt + \int_1^{+\infty} v^t\ {}_tp_x\ dt =$$

$$(hacemos\ el\ cambio\ s = t - 1)$$

$$= \bar{a}_{x:\overline{1|}} + v\ p_x \int_0^{+\infty} v^s\ {}_sp_{x+1}\ ds = \bar{a}_{x:\overline{1|}} + v\ p_x\ \bar{a}_{x+1}$$

5.- Calcule los valores de $\bar{a}_x$ y $\bar{A}_x$ bajo la hipótesis de la fuerza de mortalidad constante.

Solución:

Si la fuerza de mortalidad es constante e igual a μ, entonces

$${}_tE_x = v^t\ {}_tp_x = e^{-\delta t}\ e^{-\mu t} = e^{-(\delta+\mu)t}$$

Por tanto,

$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} {}_tE_x\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\delta+\mu)t} dt = \frac{1}{\delta + \mu}$$

$$\bar{A}_x = 1 - \delta\ \bar{a}_x = \frac{\mu}{\delta + \mu}$$

6.- Calcule los valores de $\bar{a}_{40}$ y $\bar{A}_{40}$ bajo la hipótesis de la fuerza de mortalidad de De Moivre, tomando como edad límite $\omega = 100$ y un tipo de interés técnico $i = 0.06$.

Solución:

En el capítulo segundo estudiamos que la hipótesis de De Moivre implica que

$${}_tp_x = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

y, por tanto,

$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} {}_tE_x\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t}(1 - \frac{t}{\omega - x})dt$$

En el caso que nos ocupa tenemos que $\delta = \log(1 + 0.06) = 0.058$, luego

$$\bar{a}_{40} = \int_0^{+\infty} e^{-0.058t}\left(1 - \frac{t}{100-40}\right)dt = 12.287$$

Por otro lado,

$$\bar{A}_{40} = 1 - \delta\, \bar{a}_{40} = 1 - 0.058 \times 12.287 = 0.28735$$

7.- Calcule el límite del valor actual actuarial de una renta continua, inmediata e ilimitada, cuando el tipo de interés tiende a cero.

Solución:

Sabemos que

$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} \bar{a}_{\overline{t|}}\, g_x(t)\, dt$$

siendo $\bar{a}_{\overline{t|}}$ el valor actual de una renta financiera continua,

$$\bar{a}_{\overline{t|}} = \int_0^t e^{-\delta z} dz = \frac{1 - v^t}{\delta}$$

Tomando límites, obtenemos

$$\lim_{\delta \to 0} \bar{a}_{\overline{t|}} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1 - v^t}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} = \frac{0}{0}$$

y aplicando L'Hôpital,

$$\lim_{\delta \to 0} \bar{a}_{\overline{t|}} = \lim_{\delta \to 0} t e^{-\delta t} = t$$

En consecuencia,

$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} \bar{a}_{\overline{t|}}\, g_x(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t\, g_x(t)\, dt = E(T_x) = \overset{o}{e}_x$$

Es decir, el límite de $\bar{a}_x$ es $\overset{o}{e}_x$, la esperanza de vida completa de (x).

El lector puede demostrar fácilmente un resultado análogo en el caso discreto:

$$\lim_{i \to 0} a_x = E(K_x) = e_x$$

8.- Interprete y demuestre la siguiente desigualdad:

$$\bar{a}_x < \bar{a}_{\overline{\overset{o}{e}_x|}}$$

Solución:

Por $\bar{a}_{\overline{\overset{o}{e}_x|}}$ entendemos, evidentemente, el valor actual de una renta financiera continua cuya duración es, precisamente, la esperanza de vida completa de (x). El resultado anterior implica que no podemos calcular el "valor" de una renta continua para (x) como el valor actual de una renta financiera cuya duración sea la esperanza de vida de (x), ya que de hacerlo así estaríamos sobrevalorándola.

La desigualdad que queremos demostrar se deduce inmediatamente de la **desigualdad de Jensen**, cuyo enunciado recordamos a continuación:

Desigualdad de Jensen: Si X es una variable aleatoria y f es una función convexa, entonces se verifica que

$$E\left[f(X)\right] \geq f\left[E(X)\right]$$

siendo la desigualdad estricta si f es estrictamente convexa (es decir, si $f'' > 0$).

Análogamente, si f es una función cóncava, entonces

$$E\left[f(X)\right] \leq f\left[E(X)\right]$$

siendo la desigualdad estricta si f es estrictamente cóncava (es decir, si $f'' < 0$).

En nuestro caso, T_x es una variable aleatoria y la función

$$f(t) = \bar{a}_{\bar{a}_{\overline{t|}}}$$

es estrictamente cóncava, ya que

$$f''(t) = -\delta e^{-\delta t} < 0, \forall t$$

En consecuencia, se tiene que

$$\bar{a}_x = E\left[\bar{a}_{\overline{T_x|}}\right] < \bar{a}_{E(T_x)} = \bar{a}_{\overline{\overset{o}{e}_x|}}$$

El lector puede demostrar de forma análoga que

$$a_x < \bar{a}_{\overline{\overset{o}{e}_x|}}$$

9.- Demuestre las siguientes igualdades:

a)

$$_{n/m}\overline{a}_x = {}_nE_x \, \overline{a}_{x+n:\overline{m}|}$$

b)

$$_{n/m}\overline{a}_x = \overline{a}_{x:\overline{n+m}|} - \overline{a}_{x:\overline{n}|}$$

c)

$$_{n/m}\overline{a}_x = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|} - \overline{A}_{x:\overline{n+m}|}}{\delta}$$

Solución:

a)

$$_{n/m}\overline{a}_x = \int_n^{n+m} {}_tE_x \, dt = {}_n E_x . \int_n^{n+m} {}_{t-n}E_{x+n} \, dt = {}_n E_x . \int_0^{m} {}_zE_{x+n} \, dz = {}_n E_x \, \overline{a}_{x+n:\overline{m}|}$$

b)

$$_{n/m}\overline{a}_x = \int_n^{n+m} {}_tE_x \, dt = \int_0^{n+m} {}_tE_x \, dt - \int_0^{n} {}_tE_x \, dt = \overline{a}_{x:\overline{n+m}|} - \overline{a}_{x:\overline{n}|}$$

c)

$$_{n/m}\overline{a}_x = \overline{a}_{x:\overline{n+m}|} - \overline{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - \overline{A}_{x:\overline{n+m}|}}{\delta} - \frac{1 - \overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|} - \overline{A}_{x:\overline{n+m}|}}{\delta}$$

10.- Una cabeza de edad x, que ha recibido de una entidad bancaria un préstamo de cuantía C y que ha de devolver mediante al pago de n anualidades postpagables de cuantia a, contrata un seguro de anualidades mediante el cual si fallece antes de la completa amortización del préstamo la entidad aseguradora se hará cargo del pago de las anualidades pendientes de pago.

Calcule la prima única pura de este seguro.

Solución:

De acuerdo al siguiente esquema,

a a..................................a................a

x $x+1$ $x+2$..........................$x+n-1$.........$x+n$

si el asegurado fallece a la edad x, al final de ese año y de los restantes el asegurador ha de pagar a, por tanto, la cuantía de la indemnización es

$$a\ \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

si fallece a la edad $x+1$ será

$$a\ \ddot{a}_{\overline{n-1}|}$$

si fallece a la edad $x+n-1$

$$a\ \ddot{a}_{\overline{1}|}$$

Por tanto nos encontramos ante un seguro temporal variable (decreciente) en el conjunto de los capitales asegurados es

$$C = \{a\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, a\ \ddot{a}_{\overline{n-1}|}, ..., a\ \ddot{a}_{\overline{1}|}\}$$

El valor actual actuarial es

$$(VAC)_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ a\ \ddot{a}_{\overline{n-k}|}\ {}_{k/}q_x$$

que puede, despues de sencillos calculos expresararse en función de rentas. En efecto

$$(VAC)_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ a\ \ddot{a}_{\overline{n-k}|}\ {}_{k/}q_x = a\sum_{k=0}^{n-1} v^{k}\ v\ \ddot{a}_{\overline{n-k}|}\ {}_{k/}q_x = a\sum_{k=0}^{n-1} v^{k}\ a_{\overline{n-k}|}\ {}_{k/}q_x =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n-1} v^{k}\ \frac{1-v^{n-k}}{i}\ {}_{k/}q_x = a\sum_{k=0}^{n-1} \frac{v^{k}-v^{n}}{i}\ {}_{k/}q_x = a\sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1-v^{n}}{i} - \frac{1-v^{k}}{i})\ {}_{k/}q_x =$$

$$= a(\ a_{\overline{n}|}\sum_{k=0}^{n-1}\ {}_{k/}q_x\ - \sum_{k=0}^{n-1} a_{\overline{k}|}\ {}_{k/}q_x) = a(\ a_{\overline{n}|}\ {}_{n}q_x - (a_{x:\overline{n}|} - a_{\overline{n}|}\ {}_{n}p_x)) =$$

$$= a\ (a_{\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|})$$