6

Rentas vitalicias (II). Rentas fraccionadas y rentas variables

6.1 Introducción

Con este capítulo finalizamos el estudio de las rentas, tratando las **fraccionadas** y las **variables**.

En el capítulo anterior hemos estudiado rentas de cuantía constante, tanto continuas como discretas, suponiendo en este último caso que los capitales vencen al principio o al final de cada año, siempre que (x) siga con vida. La valoración de estas rentas no presenta grandes dificultades, al disponer de las probabilidades anuales de muerte y supervivencia que son proporcionadas por las tablas de mortalidad.

Cuando el vencimiento de los capitales que componen la renta se produce con mayor frecuencia que una vez al año, al no disponer de las probabilidades exactas de muerte y supervivencia para las correspondientes fracciones de año se ha de recurrir a diferentes hipótesis que conducen a diversas expresiones aproximadas para los valores actuales actuariales de las correspondientes rentas (nosotros consideraremos únicamente la hipótesis de distribución uniforme de los fallecimientos y la de linealidad de los D_x). Dedicamos al estudio de tales **rentas fraccionadas** el epígrafe 6.3.

Posteriormente, en el epígrafe 6.4 tratamos las **rentas variables**, en las que abandonamos la hipótesis de la cuantía constante de los capitales.

Finalmente, en el epígrafe 6.5 estudiamos las **rentas variables fraccionadas.**

6.2 Rentas Fraccionadas Constantes

Dada la cabeza (x), supondremos ahora que en cada fracción m-ésima de año vence un capital de cuantía $\frac{1}{m}$, mientras la citada cabeza esté con vida. En el siguiente esquema se representan los vencimientos de una renta prepagable.

$$\frac{1}{m} \quad \frac{1}{m} \quad \frac{1}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{m} \quad \frac{1}{m} \ldots\ldots$$

$$x \quad x+\frac{1}{m} \quad x+\frac{2}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots x+1 \quad x+1+\frac{1}{m} \ldots$$

El estudio del valor actual de este tipo de rentas precisa disponer de las probabilidades de muerte y supervivencia de (x) para las correspondientes fracciones de año. Pero como las tablas de mortalidad únicamente nos proporcionan probabilidades anuales, deberemos recurrir a diversas fórmulas aproximadas fundamentadas en distintas hipótesis.

6.2.1 Hipótesis de distribución uniforme de los fallecimientos

Consideremos una **renta fraccionada, inmediata, ilimitada y prepagable** para una cabeza de edad x, la cual cobrará o pagará un capital de cuantía $\frac{1}{m}$ al comienzo de cada fracción m-ésima de año, siempre que siga con vida.

Razonando como en el capítulo anterior y considerando las variables aleatorias K_x y $S^{(m)}$ (véase el apartado 4.7), el **valor actual de la renta fraccionada** resulta ser una variable aleatoria

$$Z = \frac{1 - v^{K_x + S^{(m)}}}{d(m)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} K_x = 0, 1, 2, \ldots \\ S^{(m)} = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m}{m} \end{array} \right.$$

en la que

$$d(m) = m(1 - (1-d)^{\frac{1}{m}}) = m(1 - (1+i)^{-\frac{1}{m}})$$

es el tanto nominal anual de descuento de frecuencia m.

Recordando que

$$A_x^{(m)} = E(v^{K_x + S^{(m)}})$$

y llamando

$$\ddot{a}_x^{(m)} = E(Z)$$

tenemos

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d(m)}$$

Ahora bien, bajo la **hipótesis de distribución uniforme de los fallecimientos** sabemos que

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j(m)} A_x = \frac{i}{j(m)}(1 - d\ \ddot{a}_x)$$

y por tanto,

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{d(m)} - \frac{i}{j(m)\, d(m)} + \frac{i\, d}{j(m)\, d(m)} \ddot{a}_x$$

esto es,

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{i\, d}{j(m)\, d(m)} \ddot{a}_x - \frac{i - j(m)}{j(m)\, d(m)}$$

Siendo

$$\alpha(m) = \frac{i\, d}{j(m)\, d(m)} \quad y \quad \beta(m) = \frac{i - j(m)}{j(m)\, d(m)}\,^{*}$$

suele escribirse

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\, \ddot{a}_x - \beta(m)$$

A partir del valor actual actuarial de la renta prepagable e ilimitada es posible obtener fácilmente el correspondiente a otros tipos de rentas. Así:

a) **Renta diferida y prepagable**:

$$_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_nE_x\, \ddot{a}_{x+n}^{(m)} = {}_nE_x\, (\alpha(m)\, \ddot{a}_{x+n} - \beta(m)) = \alpha(m)\, {}_{n/}\ddot{a}_x - \beta(m)\, {}_nE_x \quad (6.1)$$

b) **Renta temporal prepagable**:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\, \ddot{a}_x - \beta(m) - (\alpha(m)\, {}_{n/}\ddot{a}_x - \beta(m)\, {}_nE_x) =$$

$$= \alpha(m)\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x) \quad (6.2)$$

c) **Renta diferida y temporal prepagable**:

$$_{r/n}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_rE_x\, \ddot{a}_{x+r:\overline{n}|}^{(m)} = {}_rE_x(\alpha(m)\, \ddot{a}_{x+r:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_{x+r})) =$$

$$= \alpha(m)\, {}_{r/n}\ddot{a}_x - \beta(m)({}_rE_x - {}_{n+r}E_x) \quad (6.3)$$

d) **Renta ilimitada y postpagable**:

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} = \alpha(m)\, (a_x + 1) - \beta(m) - \frac{1}{m} =$$

---

*Por ejemplo:
Para $i = 0.06$,

$$\alpha(12) = 1.000281 \quad y \quad \beta(12) = 0.468119$$

y para $i = 0.04$,

$$\alpha(12) = 1.000127 \quad y \quad \beta(12) = 0.464888$$

$$= \alpha(m)\ a_x - \gamma(m) \tag{6.4}$$

donde

$$\gamma(m) = \alpha(m) - \beta(m) - \frac{1}{m} = \frac{d(m) - d}{j(m)\ d(m)}$$

e) **Renta diferida y postpagable**:

$$_{n/}a_x^{(m)} = {}_nE_x\ a_{x+n}^{(m)} = \alpha(m)\ _{n/}a_x - \gamma(m)\ _nE_x \tag{6.5}$$

f) **Renta temporal y postpagable**:

$$a_{x:\overline{n|}}^{(m)} = a_x^{(m)} - {}_{n/}a_x^{(m)} = \alpha(m)\ a_{x:\overline{n|}} - \gamma(m)(1 - {}_nE_x) \tag{6.6}$$

g) **Renta diferida y temporal postpagable**:

$$_{r/n}a_x^{(m)} = {}_rE_x\ a_{x+r:\overline{n|}}^{(m)} = {}_rE_x(\alpha(m)\ a_{x+r:\overline{n|}} - \gamma(m)(1 - {}_nE_{x+r})) = \tag{6.7}$$

$$= \alpha(m)\ _{r/n}a_x - \gamma(m)(\ _rE_x - {}_{n+r}E_x) \tag{6.8}$$

6.2.2 Hipótesis de linealidad de D_x

Aceptando la hipótesis de linealidad de la función D_x es posible obtener expresiones aproximadas, muy utilizadas en la práctica, para los valores actuales actuariales de las rentas fraccionadas. Es importante hacer notar que la hipótesis de linealidad de las D_x es diferente de la hipótesis de linealidad de las l_x que, como ya sabemos, equivale a la de la distribución uniforme de la mortalidad.

Consideremos, en primer lugar, la **renta inmediata, ilimitada, postpagable y fraccionada**. Planteemos el valor actual actuarial de la renta como la suma de los valores actuales de cada uno de los capitales de cuantía $\frac{1}{m}$ que vencen al final de cada fracción m-ésima de año, esto es,

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\ v^{\frac{1}{m}}\ _{\frac{1}{m}}p_x + \frac{1}{m}\ v^{\frac{2}{m}}\ _{\frac{2}{m}}p_x + ... + \frac{1}{m}\ v^{\frac{m}{m}}\ _{\frac{m}{m}}p_x + \frac{1}{m}\ v^{1+\frac{1}{m}}\ _{1+\frac{1}{m}}p_x + ... =$$

$$= \frac{1}{m}\ _{\frac{1}{m}}E_x + \frac{1}{m}\ _{\frac{2}{m}}E_x + ... + \frac{1}{m}\ _{\frac{m}{m}}E_x + \frac{1}{m}\ _{1+\frac{1}{m}}E_x + ... =$$

$$= \frac{1}{m}\ (\frac{D_{x+\frac{1}{m}}}{D_x} + \frac{D_{x+\frac{2}{m}}}{D_x} + ... + \frac{D_{x+\frac{m}{m}}}{D_x} + \frac{D_{x+1+\frac{1}{m}}}{D_x} + ...) =$$

$$= \sum_{p=o}^{\omega-x-1} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m}\ \frac{D_{x+p+\frac{k}{m}}}{D_x} \right) = \sum_{p=o}^{\omega-x-1} \frac{1}{m\ D_x} \left(\sum_{k=1}^{m} D_{x+p+\frac{k}{m}} \right)$$

La hipótesis de linealidad de las D_x nos permite escribir

$$D_{x+p+\frac{k}{m}} = D_{x+p} + \frac{k}{m}(D_{x+p+1} - D_{x+p})$$

y por tanto,

$$\sum_{k=1}^{m} D_{x+p+\frac{k}{m}} = \sum_{k=1}^{m} \left(D_{x+p} + \frac{k}{m}(D_{x+p+1} - D_{x+p}) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} D_{x+p} + \frac{D_{x+p+1} - D_{x+p}}{m} \sum_{k=1}^{m} k = m\ D_{x+p} + \frac{m+1}{2}(D_{x+p+1} - D_{x+p})$$

Así pues,

$$a_x^{(m)} = \sum_{p=o}^{\omega-x-1} \frac{1}{m\ D_x} \left(m\ D_{x+p} + \frac{m+1}{2}(D_{x+p+1} - D_{x+p}) \right) =$$

$$= \sum_{p=o}^{\omega-x-1} \frac{D_{x+p}}{D_x} + \frac{m+1}{2m} \sum_{p=o}^{\omega-x-1} \frac{(D_{x+p+1} - D_{x+p})}{D_x} =$$

$$= \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m} = a_x + 1 - \frac{m+1}{2m}$$

luego obtenemos

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} \tag{6.9}$$

Asimismo el caso prepagable es sencillo partiendo de este resultado:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = a_x^{(m)} + \frac{1}{m} = a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m} = \ddot{a}_x - 1 + \frac{m+1}{2m} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \tag{6.10}$$

Y de forma elemental (procediendo como en 6.2.1) el valor actual actuarial de las restantes rentas diferidas y temporales resulta ser igual a:

$$_{n/}a_x^{(m)} = {}_{n/}a_x + \frac{m-1}{2m}\ {}_nE_x \tag{6.11}$$

$$_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_{n/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\ {}_nE_x \tag{6.12}$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = a_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\ (1 - {}_nE_x) \tag{6.13}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\,(1 - {}_nE_x) \tag{6.14}$$

$$_{r/n}a^{(m)}_x = {}_{r/n}a_x + \frac{m-1}{2m}\,({}_rE_x - {}_{r+n}E_x) \tag{6.15}$$

$$_{r/n}\ddot{a}^{(m)}_x = {}_{r/n}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\,({}_rE_x - {}_{r+n}E_x) \tag{6.16}$$

6.3 Rentas Variables

6.3.1 Rentas variables continuas

Consideremos una cabeza de edad x. y una función de densidad de capital (ahora no necesariamente constante) que representaremos mediante la letra C.

$$C : [0, \omega - x] \to R$$

Notemos que $C(t)$ nos da el valor de dicha función a la edad $x + t$.

Supondremos, en primer lugar, que mientras (x) vive, recibe o paga de forma continua una renta cuya cuantía viene dada por la función de densidad de capital C.

Si consideramos una **renta variable continua, inmediata e ilimitada**, el valor actual de la misma es una variable aleatoria que depende de la vida residual de (x), esto es,

$$Z = f(T_x) = \int_0^{T_x} C(z)\, e^{-\delta\, z}\, dz \quad ^{\dagger}$$

La **esperanza matemática** de su valor actual, o **valor actual actuarial** de la renta, es

$$(V\bar{a}C)_x = E(Z) = \int_0^{\infty} f(t)\; g_x(t)\; dt \tag{6.17}$$

Es fácil probar, integrando por partes como en el epígrafe 5.2.2, que

$$(V\bar{a}C)_x = \int_0^{\infty} C(t)\; {}_tE_x\; dt \tag{6.18}$$

Asimismo, la **varianza** de su valor actual es igual a

$$Var(Z) = \int_0^{\infty} (f(t))^2\; g_x(t)\; dt - (E(Z))^2$$

† Notemos que cuando $C(z) = 1$ nos encontramos con una renta constante y unitaria (véase 5.2.2).

No posee especial dificultad el tratamiento de los casos temporal y diferido, siendo el valor actual actuarial de la correspondiente **renta temporal**

$$(V\bar{a}C)_{x:\overline{n}|} = \int_0^n C(t)\ {}_tE_x\ dt \tag{6.19}$$

y el de la **renta diferida**

$${}_{n/}(V\bar{a}C)_x = \int_n^\infty C(t)\ {}_tE_x\ dt \tag{6.20}$$

verificándose la igualdad

$${}_{n/}(V\bar{a}C)_x = (V\bar{a}C)_x - (V\bar{a}C)_{x:\overline{n}|} \tag{6.21}$$

cuya prueba es elemental. También se verifica que

$${}_{n/}(V\bar{a}C)_x = {}_nE_x\ (V\bar{a}C)_{x+n} \tag{6.22}$$

Para probarla basta tener en cuenta que

$${}_nE_x\ (V\bar{a}C)_{x+n} = {}_nE_x \int_0^\infty C(n+t)\ {}_tE_{x+n}\ dt = \int_0^\infty C(n+t)\ {}_{n+t}E_x\ dt$$

y después de hacer el cambio de variable $n+t=s$ se obtiene, elementalmente,

$${}_nE_x\ (V\bar{a}C)_{x+n} = \int_n^\infty C(s)\ {}_sE_x\ ds = {}_{n/}(V\bar{a}C)_x$$

Asmismo, el valor actual actuarial de la **renta diferida y temporal** es igual a

$${}_{n/m}(V\bar{a}C)_x = \int_n^{n+m} C(t)\ {}_tE_x\ dt \tag{6.23}$$

y se verifica que

$${}_{n/m}(V\bar{a}C)_x = {}_nE_x\ (V\bar{a}C)_{x+n:\overline{m}|} \tag{6.24}$$

El procedimiento que hemos empleado para calcular el valor actual actuarial de las rentas temporal, diferida y diferida y temporal no permite el cálculo de momentos de mayor orden para su valor actual. Invitamos al lector a definir la variable aleatoria del valor actual de estas rentas y a calcular sus principales momentos.

Como **casos clásicos de rentas continuas variables** cabe citar:

a) Cuando $C(t) = [t+1]$, la esperanza matematica del valor actual es

$$(I\bar{a})_x = \int_0^\infty [t+1]\ {}_tE_x\ dt \tag{6.25}$$

b) Cuando $C(t) = t$ tenemos

$$(\overline{Ia})_x = \int_0^\infty t\ {}_tE_x\ dt \tag{6.26}$$

c) Cuando

$$C(t) = \begin{cases} n - [t] & si \quad t \leq n \\ 0 & si \quad t > n \end{cases}$$

tenemos

$$(D\bar{a})_{x:\overline{n|}} = \int_0^n (n - [t])\ {}_tE_x\ dt \tag{6.27}$$

6.3.2 Rentas variables discretas

Consideremos una cabeza de edad x y sea $C = \{C_0, C_1, C_2, ...\}$ el conjunto cuyos elementos son los términos de la renta .

Supondremos, en primer lugar, que (x) recibe o paga C_0 en el presente instante, C_1 si alcanza con vida la edad $x+1$, C_2 si alcanza con vida la edad $x+2$ y así sucesivamente:

C_0 $\quad$ C_1 $\quad$ C_2............................C_n........

x $\quad$ $x+1$ $\quad$ $x+2$..........................$x+n$.........

Si consideramos una **renta variable, discreta, inmediata, ilimitada y prepagable,** el valor actual de la misma es una variable aleatoria que depende del número de años completos de vida hasta la muerte de (x), esto es,

$$Z = f(K_x) = \sum_{t=0}^{K_x} C_t\ v^t \qquad K_x = 0, 1, 2, ...$$

siendo además,

$$P(Z = \sum_{t=0}^{k} C_t\ v^t) = {}_{k/}q_x$$

La **esperanza matemática** de Z, o **valor actual actuarial** de la renta, es igual a

$$(V\ddot{a}C)_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} f(k)\ {}_{k/}q_x \tag{6.28}$$

probándose con facilidad que

$$(V\ddot{a}C)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_k \ {}_kE_x \tag{6.29}$$

Asimismo, la **varianza** de Z es igual a

$$Var(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} f(k)^2 \ {}_{k/}q_x - ((V\ddot{a}C)_x)^2$$

Observación

Procediendo como en el epígrafe 5.5.1 para el caso de las rentas constantes, es posible obtener una útil expresión recursiva. Pero para ello debemos cambiar ligeramente la notación:

En general, para una renta cuyos términos (asociados a cada edad) son

$$C_x \quad x = 0, 1, 2, ..., \omega - 1, \omega$$

se obtiene con facilidad

$$(V\ddot{a}C)_x = C_x + v \ p_x \ (V\ddot{a}C)_{x+1} \tag{6.30}$$

donde ahora es

$$(V\ddot{a}C)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_{x+k} \ v^k \ {}_kp_x$$

Retomando de nuevo el hilo principal de nuestra discusión, no posee especial dificultad el planteamiento de los casos temporal y diferido, siendo el valor actual actuarial de la correspondiente **renta temporal**

$$(V\ddot{a}C)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \ {}_kE_x \tag{6.31}$$

y el de la **renta diferida**

$$_{n/}(V\ddot{a}C)_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} C_k \ {}_kE_x \tag{6.32}$$

verificándose asimismo las igualdades

$$_{n/}(V\ddot{a}C)_x = (V\ddot{a}C)_x - (V\ddot{a}C)_{x:\overline{n}|} \tag{6.33}$$

$$_{n/}(V\ddot{a}C)_x = {}_nE_x\ (V\ddot{a}C)_{x+n} \tag{6.34}$$

Para las **rentas diferidas y temporales** se tiene

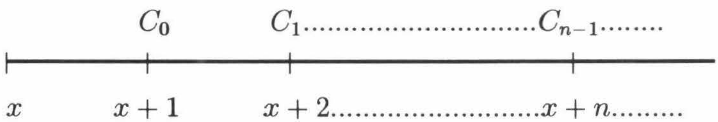
$$_{n/m}(V\ddot{a}C)_x = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_k\ {}_kE_x \tag{6.35}$$

verificándose

$$_{n/m}(V\ddot{a}C)_x = {}_nE_x\ (V\ddot{a}C)_{x+n:\overline{m}|}$$

Por las mismas razones aducidas en el caso continuo, invitamos al lector a definir la variable aleatoria valor actual de las rentas temporal, diferida y diferida y temporal y a calcular sus principales momentos.

El lector tampoco ha de tener problema alguno para estudiar las correspondientes rentas postpagables (ahora los términos vencen al final de cada año, en caso de supervivencia)



Sus valores actuales actuariales son

$$(VaC)_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} C_{k-1}\ {}_kE_x \tag{6.36}$$

$$(VaC)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}\ {}_kE_x \tag{6.37}$$

$$_{n/}(VaC)_x = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} C_{k-1}\ {}_kE_x \tag{6.38}$$

verificándose que

$$_{n/}(VaC)_x = (VaC)_x - (VaC)_{x:\overline{n}|} \tag{6.39}$$

$$_{n/}(VaC)_x = {}_nE_x\ (VaC)_{x+n} \tag{6.40}$$

Asimismo,

$$_{n/m}(VaC)_x = \sum_{k=n+1}^{n+m} C_{k-1}\ {}_kE_x \tag{6.41}$$

verificándose

$$_{n/m}(VaC)_x = \ _nE_x\ (VaC)_{x+n:\overline{m|}}$$

Rentas unitarias

Un tipo de rentas variables que tradicionalmente han merecido una especial atención en los textos de matemática actuarial son las denominadas **rentas unitarias**, o siguiendo la terminología anglosajona, "**increasing**". Una **renta unitaria** es una renta variable en progresión aritmética en la que su primer término y su diferencia son la unidad.

Estudiaremos a continuación algunas de estas rentas unitarias, centrándonos únicamente en su valor actual actuarial.

a) **Renta ilimitada y prepagable**:

Cuando $C_k = k+1$, para $k = 0, 1, 2, ...$, el valor actual actuarial se representa mediante $(I\ddot{a})_x$, siendo igual a

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (k+1)\ _kE_x \tag{6.42}$$

Ciertamente, se verifica que

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1}\ _{k/}\ddot{a}_x \tag{6.43}$$

En efecto,

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} (k+1)\ _kE_x = 1 + 2\ _1E_x + 3\ _2E_x + ... + (\omega - x)\ _{\omega-x-1}E_x =$$

$$= (1 +\ _1E_x +\ _2E_x + ... +\ _{\omega-x-1}E_x) + (\ _1E_x + ... +\ _{\omega-x-1}E_x) + ... +\ _{\omega-x-1}E_x =$$

$$= \ddot{a}_x +\ _{1/}\ddot{a}_x + ... +\ _{\omega-x-1/}\ddot{a}_x$$

b) **Renta temporal y prepagable**:

Su valor actual actuarial es

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\ _kE_x \tag{6.44}$$

verificándose

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}\ _{k/n-k}\ddot{a}_x \tag{6.45}$$

c) **Renta diferida e ilimitada**:

$$_{n/}(I\ddot{a})_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} (k-n+1)\ {}_kE_x \tag{6.46}$$

verificándose

$$_{n/}(I\ddot{a})_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} {}_{k/}\ddot{a}_x \tag{6.47}$$

d) **Renta diferida y temporal**:

$$_{m/n}(I\ddot{a})_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} (k-m+1)\ {}_kE_x \tag{6.48}$$

y también

$$_{m/n}(I\ddot{a})_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k/m+n-k}\ddot{a}_x \tag{6.49}$$

e) Consideremos ahora una renta unitaria con la característica de que el primer término es la unidad y los sucesivos se incrementan en una unidad hasta el n-ésimo, a partir del cual todos los restantes son de cuantía n.

El valor actual actuarial es, elementalmente,

$$(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}\ddot{a}_x \tag{6.50}$$

y también

$$(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = (I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} + n\ {}_{n/}\ddot{a}_x \tag{6.51}$$

En general, si la renta está además diferida m períodos tenemos

$$_{m/}(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k/}\ddot{a}_x \tag{6.52}$$

y también

$$_{m/}(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = {}_{m/n}(I\ddot{a})_x + n\ {}_{m+n/}\ddot{a}_x \tag{6.53}$$

Concluyamos refiriéndonos a las **rentas decrecientes con diferencias entre sus términos unitarias**. Sea el primer término de cuantía n, el segundo de cuantía n-1...., y el n-ésimo de cuantía 1.

El valor actual actuarial de esta renta se representa, supuesta prepagable, mediante $(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$,siendo

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ {}_kE_x = n\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_{1/n-1}(I\ddot{a})_x \tag{6.54}$$

y también

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} \ddot{a}_{x:\overline{k}|} \tag{6.55}$$

Análogamente, para las rentas unitarias postpagables tenemos

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} k\ {}_kE_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-2} {}_{k/}a_x \tag{6.56}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} k\ {}_kE_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/n-k}a_x \tag{6.57}$$

$${}_{n/}(Ia)_x = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} (k-n)\ {}_kE_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-2} {}_{k/}a_x \tag{6.58}$$

$${}_{m/n}(Ia)_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} (k-m)\ {}_kE_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k/m+n-k}\ddot{a}_x \tag{6.59}$$

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = \sum_{k=1}^{n} {}_{k/}a_x = (Ia)_{x:\overline{n}|} + n\ {}_{n/}a_x \tag{6.60}$$

$${}_{m/}(I_{\overline{n}|}a)_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} {}_{k/}a_x = {}_{m/n}(Ia)_x + n\ {}_{m+n/}a_x \tag{6.61}$$

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\ {}_kE_x = n\ a_{x:\overline{n}|} - {}_{1/n-1}(Ia)_x = \sum_{k=1}^{n} a_{x:\overline{k}|} \tag{6.62}$$

Variación en progresión aritmética y geométrica. Funciones de Conmutación

Ciertamente, las rentas variables en progresión aritmética más sencillas son las unitarias. Su expresión mediante funciones de conmutación es fácil, definiendo previamente una nueva función de conmutación que se representa mediante la letra S:

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + ... + N_{\omega-1}$$

Así,

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_{k/}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{N_{x+k}}{D_x} = \frac{S_x}{D_x}, \tag{6.63}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/n-k}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N_{x+k} - N_{x+n}}{D_x} = \frac{S_x - S_{x+n} - n\, N_{x+n}}{D_x} \tag{6.64}$$

$${}_{m/n}(I\ddot{a})_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k/m+n-k}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{N_{x+k} - N_{x+m+n}}{D_x} =$$

$$= \frac{S_{x+m} - S_{x+m+n} - n\, N_{x+m+n}}{D_x} \tag{6.65}$$

$$(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N_{x+k}}{D_x} = \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x} \tag{6.66}$$

$${}_{m/}(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k/}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{N_{x+k}}{D_x} = \frac{S_{x+m} - S_{x+m+n}}{D_x} \tag{6.67}$$

y finalmente,

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} = \frac{n\, N_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_x} \tag{6.68}$$

Asimismo, para las rentas postpagables tenemos

$$(Ia)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-2} {}_{k/}a_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-2} \frac{N_{x+k+1}}{D_x} = \frac{S_{x+1}}{D_x} \tag{6.69}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/n-k}a_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N_{x+k+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\, N_{x+n+1}}{D_x} \tag{6.70}$$

$$ {}_{m/n}(Ia)_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k/m+n-k}a_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{N_{x+k+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} =$$

$$= \frac{S_{x+m+1} - S_{x+m+n+1} - n\, N_{x+m+n+1}}{D_x} \tag{6.71}$$

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}a_x = \sum_{k=0}^{n} \frac{N_{x+k+1}}{D_x} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1}}{D_x} \tag{6.72}$$

$$ {}_{m/}(I_{\overline{n}|}a)_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k/}a_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{N_{x+k+1}}{D_x} = \frac{S_{x+m+1} - S_{x+m+n+1}}{D_x} \tag{6.73}$$

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} a_{x:\overline{k}|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_{x+1} - N_{x+k+1}}{D_x} = \frac{n\, N_{x+1} - S_{x+2} + S_{x+n+2}}{D_x} \tag{6.74}$$

Consideremos ahora rentas variables en progresión aritmética más generales. Sea una renta, inmediata, ilimitada y prepagable cuyos términos varían en progresión aritmética, siendo el primer año de cuantía c, el segundo año $c + h$, el tercero $c + 2h$...; esto es, $C = \{c, c + h, c + 2h, ...\}$.

Su valor actual actuarial es

$$(V\ddot{a}C)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (c + k\ h)\ {}_kE_x \tag{6.75}$$

Ciertamente,

$$(V\ddot{a}C)_x = c \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_kE_x + h \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k\ {}_kE_x = c\ \ddot{a}_x + h\ {}_{1/}(I\ddot{a})_x \tag{6.76}$$

por lo que, en símbolos de conmutación,

$$(V\ddot{a}C)_x = c\ \frac{N_x}{D_x} + h\ \frac{S_{x+1}}{D_x} \tag{6.77}$$

Procediendo análogamente, tenemos

$$_{n/}(V\ddot{a}C)_x = c\frac{N_{x+n}}{D_x} + h\frac{S_{x+n+1}}{D_x} \tag{6.78}$$

$$(V\ddot{a}C)_{x:\overline{n|}} = c\ \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} + h\ \frac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)\ N_{x+n}}{D_x} \tag{6.79}$$

y

$$_{m/n}(V\ddot{a}C)_x = c\ \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} + h\ \frac{S_{x+m+1} - S_{x+m+n} - (n-1)\ N_{x+m+n}}{D_x} \tag{6.80}$$

Asimismo, en el caso postpagable tenemos

$$(VaC)_x = c\ \frac{N_{x+1}}{D_x} + h\ \frac{S_{x+2}}{D_x} \tag{6.81}$$

$$_{n/}(VaC)_x = c\frac{N_{x+n+1}}{D_x} + h\frac{S_{x+n+2}}{D_x} \tag{6.82}$$

$$(VaC)_{x:\overline{n|}} = c\ \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + h\ \frac{S_{x+2} - S_{x+n+1} - (n-1)\ N_{x+n+1}}{D_x} \tag{6.83}$$

$$_{m/n}(VaC)_x = c\ \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} + h\ \frac{S_{x+m+2} - S_{x+m+n+1} - (n-1)\ N_{x+m+n+1}}{D_x} \tag{6.84}$$

Consideremos ahora una renta inmediata, ilimitada y prepagable cuyos términos varían en **progresión geomética,** siendo el primer año de cuantía c, el segundo año $c\ q$, el tercero $c\ q^2$ ...; esto es, $C = \{c, cq, cq^2, ...\}$.

Su valor actual actuarial es

$$(V\ddot{a}C)_x = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (cq^k)\ {}_kE_x \tag{6.85}$$

Para $c = 1$, se representa mediante ${}^q\ddot{a}_x$, siendo

$${}^q\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} q^k\ {}_kE_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} q^k\ v^k\ {}_kp_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (qv)^k\ {}_kp_x \tag{6.86}$$

y llamando $v' = q\ v$,

$$^{q}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (v')^k\,{}_kp_x = \frac{N'_x}{D'_x} \tag{6.87}$$

donde D'_x y N'_x son los correspondientes símbolos de conmutación para un tipo de interés

$$i' = \frac{1+i-q}{q}$$

donde i es el tipo de interés técnico e i' es el resultado de despejar en $v' = q\ v$, esto es,

$$\frac{1}{(1+i')} = \frac{q}{(1+i)}$$

Procediendo análogamente se obtienen la siguientes expresiones:

$$^{q}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k\ {}_kE_x = \sum_{k=0}^{n-1} (qv)^k\,{}_kp_x = \frac{N'_x - N'_{x+n}}{D'_x} \tag{6.88}$$

$$^{q}_{n/}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} q^{k-n}\ {}_kE_x = \frac{1}{q^n}\sum_{k=n}^{\omega-x-1} (qv)^k\,{}_kp_x = \frac{1}{q^n}\,\frac{N'_{x+n}}{D'_x} \tag{6.89}$$

$$^{q}_{n/m}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{n+m-1} q^{k-n}\ {}_kE_x = \frac{1}{q^n}\sum_{k=n}^{n+m-1} (qv)^k\,{}_kp_x = \frac{1}{q^n}\,\frac{N'_{x+n} - N'_{x+n+m}}{D'_x} \tag{6.90}$$

Asimismo, los valores actuales actuariales de las correspondientes rentas postpagables son

$$^{q}a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} (v')^k\,{}_kp_x = \frac{1}{q}\frac{N'_{x+1}}{D'_x} \tag{6.91}$$

$$^{q}a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} q^k\ {}_kE_x = \sum_{k=1}^{n} (qv)^k\,{}_kp_x = \frac{1}{q}\frac{N'_{x+1} - N'_{x+n+1}}{D'_x} \tag{6.92}$$

$$^{q}_{n/}a_x = \sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} q^{k-n}\ {}_kE_x = \frac{1}{q^n}\sum_{k=n+1}^{\omega-x-1} (qv)^k\,{}_kp_x = \frac{1}{q^{n+1}}\,\frac{N'_{x+n+1}}{D'_x} \tag{6.93}$$

$$^{q}_{n/m}a_x = \sum_{k=n+1}^{n+m} q^{k-n-1}\ {}_kE_x = \frac{1}{q^{n+1}}\sum_{k=n+1}^{n+m} (qv)^k\,{}_kp_x = \frac{1}{q^{n+1}}\,\frac{N'_{x+n+1} - N'_{x+n+m+1}}{D'_x} \tag{6.94}$$

6.4 Rentas Variables Fraccionadas

Las **rentas variables fraccionadas** pueden estudiarse sin excesiva dificultad empleando los desarrollos anteriores. Basta considerarlas como rentas variables no fraccionadas en las que la cuantía del término anual es una renta fraccionada constante y temporal un año y aplicar la expresión correspondiente de la renta variable.

Consideremos una **renta variable fraccionada por m-ésimos, inmediata, ilimitada y prepagable** para una cabeza de edad x, tal que durante el primer año y al principio de cada m-ésimo de año vence un capital de cuantía $\frac{B_0}{m}$, durante el segundo año y al principio de cada m-ésimo de año vence un capital de cuantía $\frac{B_1}{m}$, y así sucesivamente.

Siendo

$$B = \{B_0, B_1, B_2, ...\}$$

y

$$C_k = B_k\ \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{1}|} \quad k = 0, 1, 2....$$

el valor actual actuarial de la renta resulta ser

$$(V\ddot{a}B)^{(m)}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_k\ {}_kE_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k\ \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{1}|}\ {}_kE_x$$

Empleando las fórmulas aproximadas desarrolladas en el epígrafe 6.2 es posible obtener una expresión aproximada para nuestra renta.

Considerando en primer lugar las fórmulas aproximadas obtenidas bajo la **hipótesis de distribución uniforme de los fallecimientos**, y recordando que

$$\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{1}|} = \alpha(m)\ \ddot{a}_{x+k:\overline{1}|} - \beta(m)(1 - {}_1E_{x+k}) = \alpha(m) - \beta(m)(1 - {}_1E_{x+k})$$

por ser

$$\ddot{a}_{x+k:\overline{1}|} = 1$$

tenemos

$$(V\ddot{a}B)^{(m)}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k\ \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{1}|}\ {}_kE_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k\ (\alpha(m) - \beta(m)(1 - {}_1E_{x+k}))\ {}_kE_x =$$

$$= \alpha(m) \sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k\ {}_kE_x - \beta(m)(\sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k\ {}_kE_x - \sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k\ {}_{k+1}E_x) =$$

$$= \alpha(m)(V\ddot{a}B)_x - \beta(m)((V\ddot{a}B)_x - (VaB)_x) = \tag{6.95}$$

Análogamente, para la correspondiente **renta postpagable** tenemos

$$C_k = B_k \ a^{(m)}_{x+k:\overline{1}|} \quad k = 0, 1, 2....$$

y el valor actual actuarial de la renta es, por tanto,

$$(VaB)^{(m)}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_k \ {}_kE_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k \ a^{(m)}_{x+k:\overline{1}|} \ {}_kE_x$$

Teniendo en cuenta que

$$a^{(m)}_{x+k:\overline{1}|} = \alpha(m) \ a_{x+k:\overline{1}|} - \gamma(m)(1 - \ {}_1E_{x+k}) = \alpha(m) \ {}_1E_{x+k} - \gamma(m)(1 - \ {}_1E_{x+k})$$

por ser

$$a_{x+k:\overline{1}|} = \ {}_1E_{x+k}$$

tenemos

$$(VaB)^{(m)}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k \ a^{(m)}_{x+k:\overline{1}|} \ {}_kE_x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k \ (\alpha(m) \ {}_1E_{x+k} - \gamma(m)(1 - \ {}_1E_{x+k})) \ {}_kE_x =$$

$$= \alpha(m) \sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k \ {}_{k+1}E_x - \gamma(m)(\sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k \ {}_kE_x - \sum_{k=0}^{\omega-x-1} B_k \ {}_{k+1}E_x) =$$

$$= \alpha(m)(VaB)_x - \ \gamma(m)((V\ddot{a}B)_x - (VaB)_x) \tag{6.96}$$

En general, para una **renta diferida y temporal** tenemos

$$_{n/s}(V\ddot{a}B)^{(m)}_x = \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k \ \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{1}|} \ {}_kE_x =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k \ (\alpha(m) - \beta(m)(1 - \ {}_1E_{x+k})) \ {}_kE_x =$$

$$= \alpha(m) \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k \ {}_kE_x - \beta(m)(\sum_{k=n}^{n+s-1} B_k \ {}_kE_x - \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k \ {}_{k+1}E_x) =$$

$$= \alpha(m)\ {}_{n/s}(V\ddot{a}B)_x - \beta(m)(\ {}_{n/s}(V\ddot{a}B)_x - \ {}_{n/s}(VaB)_x) \qquad (6.97)$$

y

$${}_{n/s}(VaB)_x^{(m)} = \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ a^{(m)}_{x+k:\overline{1|}}\ {}_kE_x =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ (\alpha(m)\ {}_1E_{x+k} - \gamma(m)(1 - \ {}_1E_{x+k}))\ {}_kE_x =$$

$$= \alpha(m) \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ {}_{k+1}E_x - \gamma(m)(\sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ {}_kE_x - \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ {}_{k+1}E_x) =$$

$$= \alpha(m)\ {}_{n/s}(VaB)_x - \ \gamma(m)(\ {}_{n/s}(V\ddot{a}B)_x - \ {}_{n/s}(VaB)_x) \qquad (6.98)$$

Usando la **hipótesis de linealidad de los D_x**, se obtienen expresiones más sencillas.

Recordemos que bajo esta hipótesis,

$$\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{1|}} = \ddot{a}_{x+k:\overline{1|}} - \frac{m-1}{2m}\ (1 - \ {}_1E_{x+k}) = 1 - \frac{m-1}{2m}\ (1 - \ {}_1E_{x+k})$$

y

$$a^{(m)}_{x+k:\overline{1|}} = a_{x+k:\overline{1|}} + \frac{m-1}{2m}\ (1 - \ {}_1E_{x+k}) = \ {}_1E_{x+k} + \frac{m-1}{2m}\ (1 - \ {}_1E_{x+k})$$

por lo que

$${}_{n/s}(V\ddot{a}B)_x^{(m)} = \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{1|}}\ {}_kE_x =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ (1 - \frac{m-1}{2m}\ (1 - \ {}_1E_{x+k}))\ {}_kE_x =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ {}_kE_x - \frac{m-1}{2m}(\sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ {}_kE_x - \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ {}_{k+1}E_x) =$$

$$= \ {}_{n/s}(V\ddot{a}B)_x - \frac{m-1}{2m}(\ {}_{n/s}(V\ddot{a}B)_x - \ {}_{n/s}(VaB)_x) \qquad (6.99)$$

y

$${}_{n/s}(VaB)_x^{(m)} = \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k\ a^{(m)}_{x+k:\overline{1|}}\ {}_kE_x =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k \left({}_1E_{x+k} + \frac{m-1}{2m} \left(1 - {}_1E_{x+k}\right)\right) {}_kE_x =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k \; {}_{k+1}E_x + \frac{m-1}{2m} \left(\sum_{k=n}^{n+s-1} B_k \; {}_kE_x - \sum_{k=n}^{n+s-1} B_k \; {}_{k+1}E_x \right) =$$

$$= {}_{n/s}(VaB)_x + \frac{m-1}{2m} \left({}_{n/s}(V\ddot{a}B)_x - {}_{n/s}(VaB)_x \right) \tag{6.100}$$

6.5 Ejercicios

1.- Demuéstrese que el valor actual de una renta fraccionada, inmediata, ilimitada y prepagable es la variable aleatoria

$$Z = \frac{1 - v^{K_x + S^{(m)}}}{d(m)} \qquad \begin{cases} K_x = 0, 1, 2, ... \\ S^{(m)} = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, ..., \frac{m}{m} \end{cases}$$

Solución:
Supongamos que las variables aleatorias K_x y $S^{(m)}$ toman los valores

$$K_x = k \; ; \; S^{(m)} = \frac{s}{m}$$

Entonces el valor actual de la renta financiera fraccionada resultante sería

$$\frac{1}{m} \left[1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + ... + v + v^{1+\frac{1}{m}} + ... + v^k + v^{k+\frac{1}{m}} + ... + v^{k+\frac{s-1}{m}} \right] =$$

$$= \frac{1}{m} \frac{1 - v^{k+\frac{s-1}{m}} v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1 - v^{k+\frac{s}{m}}}{d(m)}$$

Por tanto, el valor actual de la renta actuarial fraccionada, dependiente de las variables aleatorias K_x y $S^{(m)}$, resulta ser

$$Z = \frac{1 - v^{K_x + S^{(m)}}}{d(m)}$$

2.- Demuéstrese la expresión recurrente (6.30):

$$(V\ddot{a}C)_x = C_x + v \; p_x \; (V\ddot{a}C)_{x+1}$$

Solución:

$$(V\ddot{a}C)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_{x+k}\ v^k\ {}_kp_x = C_x\ v^0\ {}_0p_x + C_{x+1}\ v^1\ {}_1p_x + C_{x+2}\ v^2\ {}_2p_x + ... =$$

$$= C_x + v.p_x\left[C_{x+1} + C_{x+2}\ v^1\ p_{x+1} + C_{x+3}\ v^2\ {}_2p_{x+1} + ...\right] =$$

$$= C_x + v.p_x \sum_{k=0}^{\omega-(x+1)-1} C_{(x+1)+k}\ v^k\ {}_kp_{x+1} = C_x + v\ p_x\ (V\ddot{a}C)_{x+1}$$

3.- Encuentre las expresiones de la esperanza y de la varianza del valor actual de una renta continua temporal, y demuestre que la primera coincide con la expresión (6.18).

Solución:

Es claro que la variable aleatoria valor actual de una renta continua temporal es igual a

$$Z = f(T_x) = \begin{cases} \int_0^{T_x} C(z)e^{-\delta z}dz & T_x < n \\ \int_0^{n} C(z)e^{-\delta z}dz & T_x \geq n \end{cases}$$

Por tanto, la esperanza de la variable aleatoria anterior, o valor actual actuarial de la renta, es igual a

$$(V\bar{a}C)_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \int_0^n \left(\int_0^t C(z)e^{-\delta z}dz\right) g_x(t)dt +_n p_x \int_0^n C(z)e^{-\delta z}dz$$

Haciendo una integración por partes, en donde

$$u = \int_0^t C(z)e^{-\delta z}dz$$

$$v = -(1 - G_x(t)) = -{}_tp_x$$

se obtiene que

$$\int_0^n \left(\int_0^t C(z)e^{-\delta z}dz\right) g_x(t)dt = \left[-\ {}_tp_x.\int_0^t C(z)e^{-\delta z}dz\right]_{t=0}^{t=n} + \int_0^n C(t)e^{-\delta t}\ {}_tp_xdt =$$

$$= -\ {}_np_x \int_0^n C(z)e^{-\delta z}dz + \int_0^n C(t)\ {}_tE_x\ dt$$

En consecuencia, obtenemos que el valor actual actuarial cioncide con la expresión (6.18):

$$(V\bar{a}C)_{x:\overline{n}|} = \int_0^n C(t)\ {}_tE_x\ dt$$

Finalmente, la varianza resulta ser

$$Var(Z) = \int_0^n \left(\int_0^t C(z)e^{-\delta z} dz \right)^2 g_x(t)dt + {}_n p_x \left(\int_0^n C(z)e^{-\delta z} dz \right)^2 - (V\overline{a}C)^2_{x:\overline{n}|}$$

4.- Demuestre la equivalencia entre las expresiones (6.28) y (6.29) del valor actual actuarial de una renta variable, discreta, inmediata, ilimitada y prepagable.

Solución:

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} \left(\sum_{t=0}^{k} C_t\, v^t \right) {}_{k/}q_x = \left(C_0\, v^0\right) {}_{0/}q_x + \left(C_0\, v^0 + C_1\, v^1\right) {}_{1/}q_x +$$

$$+ \left(C_0\, v^0 + C_1\, v^1 + C_2\, v^2\right)_{2/} q_x + ... +$$

$$+ \left(C_0\, v^0 + C_1\, v^1 + ... + C_{\omega-x-1}\, v^{\omega-x-1}\right) {}_{\omega-x-1/}q_x = \left(C_0\, v^0\right) {}_1q_x +$$

$$\left(C_0\, v^0 + C_1\, v^1\right) \left({}_2q_x - {}_1q_x\right) + \left(C_0\, v^0 + C_1\, v^1 + C_2\, v^2\right) \left({}_3q_x - {}_2q_x\right) + ... +$$

$$+ \left(C_0\, v^0 + C_1\, v^1 + ... + C_{\omega-x-1}\, v^{\omega-x-1}\right) \left(1 - {}_{\omega-x-1}q_x\right) =$$

$$= C_0\, v^0 (1 - {}_{\omega-x-1}q_x + {}_{\omega-x-1}q_x - ... - {}_2q_x + {}_2q_x - {}_1q_x + {}_1q_x) +$$

$$+ C_1\, v^1 (1 - {}_{\omega-x-1}q_x + {}_{\omega-x-1}q_x - ... - {}_2q_x + {}_2q_x - {}_1q_x) +$$

$$+ C_2\, v^2 (1 - {}_{\omega-x-1}q_x + {}_{\omega-x-1}q_x - ... - {}_2q_x) + ... =$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_k\; {}_kE_x$$