11

Rentas y seguros sobre varias cabezas

11.1 Introducción

Completamos con este capítulo el estudio de los seguros sobre varias cabezas tratando las rentas y seguros asi como las primas y reservas matemáticas. Formalmente su estudio es análogo al realizado para los seguros sobre una cabeza, aunque da lugar a una numerosa casuística debido a lo cual trataremos sólo los casos más relevantes siendo natural la generalización a capitales y tipos de interés variables. Mención especial merecen las rentas de supervivencia de aplicación para las prestaciones de viudedad y orfandad.

11.2 Seguros sobre varias cabezas

Consideremos un grupo u que se considera extinguido al producirse un suceso en relación con la muerte y supervivencia de las cabezas que lo componen lo que implica el pago del capital asegurado. En aquellos grupos para los que se dispone de la distribución de probabilidad de su vida residual o del número de años completos de vida hasta la muerte es posible estudiar el valor actual del seguro de forma análoga a como se hizo en aquellos sobre una cabeza.

Refirámonos, en primer lugar, al **factor de actualización actuarial**. Planteemos el seguro a capital diferido, esto es, si el grupo u sigue con vida dentro de t años, recibirá una unidad monetaria, no recibiéndo nada en caso contrario. El valor actual es una variable aleatoria

$$Z = \begin{cases} v^t & si \;\; T_u > t \\ 0 & si \;\; T_u \leq t \end{cases}$$

con

$$P(T_u > t) = {}_tp_u \quad y \quad P(T_u \leq t) = {}_tq_u$$

Su **esperanza matemática** es el correspondiente **factor de actualización actuarial** (prima única pura del seguro a capital diferido)

$${}_tE_u = E(Z) = v^t \; {}_tp_u \tag{11.1}$$

Ejemplo 20 *Sea $u = x_1x_2$, el capital unitario se paga en caso de que el grupo siga con vida dentro de t años, o sea, que vivan ambas cabezas dentro de t años. Evidentemente*

$$ {}_tE_{x_1x_2} = v^t \ {}_tp_{x_1x_2} $$

Para los grupos que se extinguen al primer fallecimiento, el factor de actualización actuarial sigue verificando la propiedad de escindibilidad, esto es,

$$ {}_{s+r}E_{x_1x_2\ \dots\ x_n} = {}_sE_{x_1x_2\ \dots\ x_n}\ {}_rE_{x_1+s\ x_2+s\ \dots\ x_n+s} $$

cuya prueba es elemental teniendo en cuenta (10.6). Esta propiedad no es cierta en general para el resto de los grupos.

El factor de actualización actuarial para otros grupos se puede expresar en función de los factores de actualización actuarial de grupos que se extinguen al primer fallecimiento. Analicemos algunos casos:

Ejemplo 21 *Sea $u = \overline{x_1\ x_2\ x_3}$, el grupo se extingue al último fallecimiento, por tanto, dentro de t años se considera con vida si al menos una de las tres cabezas se encuentra con vida.*

$$ {}_tE_{\overline{x_1x_2x_3}} = E(Z) = v^t\ {}_tp_{\overline{x_1x_2x_3}} = $$

$$ v^t(\ {}_tp_{x_1} + \ {}_tp_{x_2} + \ {}_tp_{x_3} - \ {}_tp_{x_1x_2} - \ {}_tp_{x_1x_3} - \ {}_tp_{x_2x_3} + \ {}_tp_{x_1x_2x_3}) = $$

$$ = \ {}_tE_{x_1} + \ {}_tE_{x_2} + \ {}_tE_{x_3} - \ {}_tE_{x_1x_2} - \ {}_tE_{x_1x_3} - \ {}_tE_{x_2x_3} + \ {}_tE_{x_1x_2x_3} $$

Ejemplo 22 *Sea $u = x_1 : \overline{x_2\ x_3}$. El grupo se considera vivo dentro de t años cuanto esta viva (x_1) y al menos una de las cabezas (x_2) y (x_3). Ahora*

$$ {}_tE_{x_1:\overline{x_2x_3}} = E(Z) = v^t\ {}_tp_{x_1:\overline{x_2x_3}} = v^t\ {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{\overline{x_2\ x_3}} = $$

$$ = v^t\ {}_tp_{x_1}(\ {}_tp_{x_2} + \ {}_tp_{x_3} - \ {}_tp_{x_2\ x_3}) = $$

$$ = \ {}_tE_{x_1x_2} + \ {}_tE_{x_1x_3} - \ {}_tE_{x_1x_2x_3} $$

Centrándonos en los **seguros para el caso de fallecimiento,** en el supuesto de que el capital asegurado se paga al final del año de extinción de u y representando mediante K_u la variable aleatoria número de años completos de vida hasta la extinción del grupo, el valor actual, para el caso de un seguro vida entera es una variable aleatoria

$$ Z = v^{K_u+1}, \quad K_u = 0, 1, 2, \dots $$

Supuesto conocida la distribución de probabilidad de K_u, que en general se obtiene a partir de las probabilidades de muerte y supervivencia de cada cabeza del grupo, es posible obtener la **esperanza matemática** de Z, **prima única pura**,

$$A_u = E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, P(K_u = k) \tag{11.2}$$

Asimismo para el seguro temporal, el valor actual actuarial es, elementalmente

$$A_{\overset{1}{u}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, P(K_u = k)$$

y para el seguro vida entera diferido

$${}_{n/}A_u = \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} \, P(K_u = k)$$

El lector puede obtener sin dificultad los correspondientes momentos de orden superior.

Ejemplo 23 *Sea $u = x_1 \, x_2$, un grupo de dos cabezas que se extingue al primer fallecimiento. Consideremos un seguro sobre este grupo que implica el pago de un capital unitario al final del año de extinción del mismo. Sabemos que*

$$P(K_u = k) = {}_{k/}q_{x_1x_2} = {}_kp_{x_1x_2} \; q_{x_1+k \; x_2+k}$$

Así

$$A_{x_1x_2} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \; {}_kp_{x_1x_2} \; q_{x_1+k \; x_2+k}$$

Ejemplo 24 *De nuevo para $u = x_1 \, x_2$ podemos plantear un seguro mixto simple tal que si u se extingue antes de n años al final del año de fallecimiento se produce el pago de un capital unitario y si el citado grupo vive n años más se pagará asimismo un capital unitario. El valor actual actuarial es*

$$A_{x_1x_2:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \; {}_{k/}q_{x_1x_2} + v^n \; {}_np_{x_1x_2}$$

En la anterior expresión

$$A_{\overset{1}{\widehat{x_1x_2}}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \; {}_{k/}q_{x_1x_2}$$

es el valor actual actuarial del correspondiente seguro temporal para el grupo $u = x_1\, x_2$ *que se extingue al primer fallecimiento y*

$$A_{x_1 x_2 : \overset{\;\;1}{\overline{n|}}} = v^n \; {}_n p_{x_1 x_2} = (\; {}_n E_{x_1 x_2})$$

el capital diferido.

Ejemplo 25 *Sea* $u = \overline{x_1 x_2 x_3}$, *un grupo de tres cabezas que se extingue al último fallecimiento. Consideremos un seguro sobre este grupo que implica el pago de un capital unitario al final del año de extinción del mismo.*

Sabemos que

$$P(K_u = k) = {}_{k/}q_{\overline{x_1 x_2 x_3}} = {}_{k/}q_{x_1} + {}_{k/}q_{x_2} + {}_{k/}q_{x_3} - {}_{k/}q_{x_1 x_2} - {}_{k/}q_{x_1 x_3} -$$

$$- {}_{k/}q_{x_2 x_3} + {}_{k/}q_{x_1 x_2 x_3}$$

Por tanto

$$A_{\overline{x_1 x_2 x_3}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \; {}_{k/}q_{\overline{x_1 x_2 x_3}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} (\; {}_{k/}q_{x_1} + {}_{k/}q_{x_2} + {}_{k/}q_{x_3} - {}_{k/}q_{x_1 x_2} - {}_{k/}q_{x_1 x_3} - {}_{k/}q_{x_2 x_3} + {}_{k/}q_{x_1 x_2 x_3}) =$$

$$= A_{x_1} + A_{x_2} + A_{x_3} - A_{x_1 x_2} - A_{x_1 x_3} - A_{x_2 x_3} + A_{x_1 x_2 x_3}$$

con lo que la prima única pura de este seguro queda en función de las primas únicas de seguros para grupos que se extinguen al primer fallecimiento.

Notemos que para los seguros sobre grupos que se extinguen al último fallecimiento es fácil establecer la siguiente fórmula general (análoga a la establecida en el capítulo anterior para la probabilidad de supervivencia),

$$A_{\overline{x_1 x_2 \,\dots\, x_n}} = S_1^A - S_2^A + S_3^A + \dots + (-1)^{n-1} S_n^A$$

con

$$S_m^A = \sum A_{x_{i_1} \,\dots\, x_{i_m}}$$

Notemos que

$${}_{k/}q_u = {}_k p_u - {}_{k+1} p_u$$

por lo que la estructura de la expresión de las probabilidades de supervivencia en función de las correspondientes a un grupo que se extingue el primer fallecimiento, se trasmite a las probabilidades de fallecimiento.

Ejemplo 26 *Sea* $u = \overline{x_1x_2}$ *un grupo que se extingue al último fallecimiento, el valor actual actuarial de un seguro temporal es*

$$A_{\overset{1}{\overline{x_1x_2}}:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_{k/}q_{\overline{x_1x_2}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}({}_{k/}q_{x_1} + {}_{k/}q_{x_2} - {}_{k/}q_{x_1x_2}) =$$

$$= A_{\overset{1}{x_1}:\overline{n}|} + A_{\overset{1}{x_2}:\overline{n}|} - A_{\overset{1}{\widehat{x_1x_2}}:\overline{n}|}$$

Ejemplo 27 *Sea* $u = \overline{x_1x_2x_3x_4}^{\,2}$ *un grupo de cuatro cabezas que se extingue al tercer (4-2+1) fallecimiento, pagándose el capital asegurado al final del año de fallecimiento.*

Siguiendo el mismo razonamiento del ejemplo y observación anteriores el valor actual actuarial del correspondiente seguro es

$$A_{\overline{x_1x_2x_3x_4}^{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k/}q_{\overline{x_1x_2x_3x_4}^{2}} = \sum_{j=2}^{4}(-1)^{j-2}\binom{j-1}{2-1} S_j^A = S_2^A - 2\ S_3^A + 3\ S_4^A =$$

$$= A_{x_1x_2} + A_{x_1x_3} + A_{x_1x_4} + A_{x_2x_3} + A_{x_2x_4} + A_{x_3x_4} - 2\ A_{x_1x_2x_3} - 2\ A_{x_1x_2x_4} -$$

$$-2\ A_{x_1x_3x_4} - 2\ A_{x_2x_3x_4} + 3\ A_{x_1x_2x_3x_4}$$

Hagamos notar que no tendría sentido un seguro sobre el grupo $\overline{x_1x_2x_3x_4}^{[2]}$.

Asimismo es posible establecer seguros sobre grupos compuestos.

Ejemplo 28 *Sea* $u = \overline{vw}$ *con* $v = x_1$ *y* $w = x_2x_3$. *El capital asegurado se paga a la extinción de u, esto es, una vez extinguidos v y w. Por tanto el capital se paga cuando hayan fallecido la cabeza de edad* x_1 *y una o ambas de edad* x_2 *y* x_3.

El valor actual actuarial es

$$A_{\overline{x_1:x_2x_3}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k/}q_{\overline{x_1:x_2x_3}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} ({}_{k/}q_{x_1} + {}_{k/}q_{x_2x_3} - {}_{k/}q_{x_1x_2x_3}) =$$

$$= A_{x_1} + A_{x_2x_3} - A_{x_1x_2x_3}$$

Notemos que

$${}_{k/}q_{\overline{x_1:x_2x_3}} = {}_{k}p_{\overline{x_1:x_2x_3}} - {}_{k+1}p_{\overline{x_1:x_2x_3}} =$$

$$= ({}_{k}p_{x_1} + {}_{k}p_{x_2x_3} - {}_{k}p_{x_1x_2x_3}) - ({}_{k+1}p_{x_1} + {}_{k+1}p_{x_2x_3} - {}_{k+1}p_{x_1x_2x_3}) =$$

$$= {}_{k/}q_{x_1} + {}_{k/}q_{x_2x_3} - {}_{k/}q_{x_1x_2x_3}$$

Cuando el capital asegurado se paga en el momento de la extinción de u, el valor actual para el caso de un seguro vida entera es una variable aleatoria

$$Z = v^{T_u} \quad T_u \geq 0$$

conocida la función de densidad $g_u(t)$ de T_u (vida residual de u), la esperanza matemática del valor actual es,

$$\bar{A}_u = \int_0^\infty v^t \; g_u(t) \; dt \tag{11.3}$$

pudiéndose obtener fácilmente las expresiones de momentos de orden superior.

De igual forma el valor actual actuarial del seguro temporal es

$$\bar{A}^{\,1}_{u:\overline{n|}} = \int_0^n v^t \; g_u(t) \; dt$$

y del seguro vida entera diferido

$$_{n/}\,\bar{A}_u = \int_n^\infty v^t \; g_u(t) \; dt$$

Ejemplo 29 *Considerando $u = x_1x_2x_3$, es claro que la esperanza matemática del valor actual del seguro vida entera con pago de un capital unitario en el momento del primer fallecimiento es*

$$\bar{A}_{x_1x_2x_3} = \int_0^\infty v^t \; g_{x_1x_2x_3}(t) \; dt = \int_0^\infty v^t \; {}_tp_{x_1} \; {}_tp_{x_2} \; {}_tp_{x_2} \; (\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + \mu_{x_2+t}) \; dt$$

recordemos que

$$g_{x_1x_2 \;...\; x_n}(t) = (\; {}_tp_{x_1} \;.....\; {}_tp_{x_n}) \; (\mu_{x_1+t} + ... + \mu_{x_n+t})$$

Ejemplo 30 *Sea $u = \overline{x_1x_2x_3}$. El capital asegurado se paga en el instante del último fallecimiento y la esperanza matemática del valor actual es*

$$\bar{A}_{\overline{x_1x_2x_3}} = \int_0^\infty v^t \; g_{\overline{x_1x_2x_3}}(t) \; dt$$

Ahora bien, sabemos que

$$g_{\overline{x_1x_2x_3}}(t) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j-1} \; (-S_j^{'}) = (-S_1^{'}) - (-S_2^{'}) + (-S_3^{'})$$

siendo

$$-S_j' = \sum ({}_t p_{x_{i_1}:\ldots:x_{i_j}}) \, (\mu_{x_{i_1}+t} + \ldots + \mu_{x_{i_j}+t})$$

la suma de las funciones de densidad de la vida residual de los $\binom{n}{j}$ grupos de j cabezas que se extinguen al primer fallecimiento y que se pueden formar con las n cabezas del grupo inicial, por tanto,

$$\bar{A}_{\overline{x_1 x_2 x_3}} = \int_0^\infty v^t \; g_{\overline{x_1 x_2 x_3}}(t) \; dt =$$

$$= \int_0^\infty v^t \; (g_{x_1}(t) + g_{x_2}(t) + g_{x_3}(t) - g_{x_1 x_2}(t) - g_{x_1 x_3}(t) - g_{x_2 x_3}(t) + g_{x_1 x_2 x_3}(t)) \; dt =$$

$$= \bar{A}_{x_1} + \bar{A}_{x_2} + \bar{A}_{x_3} - \bar{A}_{x_1 x_2} - \bar{A}_{x_1 x_3} - \bar{A}_{x_2 x_3} + \bar{A}_{x_1 x_2 x_3}$$

Ejemplo 31 *Consideremos un seguro temporal sobre el grupo $u = \overline{x_1 x_2}$ cuando el capital asegurado se paga en el momento del último fallecimiento siempre que éste suceda antes de n años.*

$$\bar{A}_{\overset{\;\;1}{\overline{x_1 x_2}}:\overline{n|}} = \int_0^n v^t \; g_{\overline{x_1 x_2}}(t) \; dt == \int_0^n v^t \; (g_{x_1}(t) + g_{x_2}(t) - g_{x_1 x_2}(t)) \; dt =$$

$$= \bar{A}_{\overset{1}{x_1}:\overline{n|}} + \bar{A}_{\overset{1}{x_2}:\overline{n|}} - \bar{A}_{\overset{\;\;1}{\widehat{x_1 : x_2}}:\overline{n|}}$$

donde

$$\bar{A}_{\overset{\;\;1}{\widehat{x_1 x_2}}:\overline{n|}} = \int_0^n v^t \; g_{x_1 x_2}(t) \; dt$$

es el valor actual actuarial de un seguro temporal de n años sobre el grupo que se extingue al primer fallecimiento $u = x_1 x_2$.

También existen seguros en los que para el cobro del capital asegurado se exige el fallecimiento en un determinado orden. En estos casos la valoración es más compleja debiendo seguirse un razonamiento diferente. Analicemos dos ejemplos:

Ejemplo 32 *Sea un seguro vida entera sobre dos cabezas de edades x_1 y x_2, tal que el capital asegurado se paga en el instante de fallecer (x_1) pero sólo si (x_2) sigue con vida. Representemos mediante Z a la variable aleatoria valor actual de la indemnización y calculemos la prima única pura*

$$\bar{A}_{\overset{1}{x_1} x_2} = E(Z)$$

para ello necesitamos definir la variable aleatoria condicionada

$$(Z/T_{x_1}=t)=\begin{cases} 0 & \begin{matrix}(si\ x_2\ ha\ fallecido)\\ con\ probabilidad\ (1-\ {}_tp_{x_2})\end{matrix} \\ v^t & \begin{matrix}(si\ (x_2)\ no\ ha\ fallecido)\\ con\ probabilidad\ {}_tp_{x_2}\end{matrix}\end{cases}$$

Se trata, obviamente, de una variable aleatoria discreta cuya esperanza resulta ser

$$E(Z/T_{x_1}=t)=v^t\ {}_tp_{x_2}$$

Ya estamos en condiciones de calcular la prima única pura apoyándonos en una conocida propiedad de las esperanzas condicionadas,

$$\bar{A}_{\overset{1}{x_1}x_2}=E(Z)=E_t(E(Z/T_{x_1}=t))=E_t(v^t\ {}_tp_{x_2})=\int_0^\infty v^t\ {}_tp_{x_2}\ g_{x_1}(t)\ dt=$$

$$=\int_0^\infty v^t\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ dt$$

Ejemplo 33 *Sean ahora tres cabezas de edades x_1, x_2 y x_3. Supongamos que el capital asegurado se paga al fallecer (x_1) pero sólo si es la segunda cabeza en fallecer. Al igual que en el ejemplo anterior, llamamos Z a la variable aleatoria valor actual de la indemnización y calculamos la prima única pura*

$$\bar{A}_{\overset{2}{x_1}x_2x_3}=E(Z)$$

para ello definamos la variable aleatoria condicionada

$$(Z/T_{x_1}=t)=\begin{cases} 0 & \begin{matrix}(si\ (x_1)\ no\ es\ el\ segundo\ en\ morir\\ con\ probabilidad\ (1-\ {}_tp_{\overline{x_2:x_3}}^{[1]})\end{matrix} \\ v^t & \begin{matrix}(si\ (x_1)\ es\ el\ segundo\ en\ morir)\\ con\ probabilidad\ {}_tp_{\overline{x_2:x_3}}^{[1]}\end{matrix}\end{cases}$$

Su esperanza matemática es

$$E(Z/T_{x_1}=t)=v^t\ {}_tp_{\overline{x_2:x_3}}^{[1]}$$

y la prima única pura,

$$\bar{A}_{\overset{2}{x_1}x_2x_3}=E(Z)=E_t(E(Z/T_{x_1}=t))=E_t(v^t\ {}_tp_{\overline{x_2x_3}}^{[1]})=\int_0^\infty v^t\ {}_tp_{\overline{x_2x_3}}^{[1]}\ g_{x_1}(t)\ dt=$$

$$= \int_0^\infty v^t \ {}_tp_{\overline{x_2x_3}}^{[1]} \ {}_tp_{x_1} \ \mu_{x_1+t} \ dt = \int_0^\infty v^t \ (\ {}_tp_{x_2} + \ {}_tp_{x_3} - 2 \ {}_tp_{x_2x_3}) \ {}_tp_{x_1} \ \mu_{x_1+t} \ dt =$$

$$= \bar{A}_{\overset{1}{x_1}x_2} + \bar{A}_{\overset{1}{x_1}x_3} - 2 \ \bar{A}_{\overset{1}{x_1}x_2x_3}$$

Recordemos que

$${}_tp_{\overline{x_2x_3}}^{[1]} = \sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}\binom{j}{1}S_j = S_1 - 2 \ S_2 = \ {}_tp_{x_2} + \ {}_tp_{x_3} - 2 \ {}_tp_{x_2x_3}$$

11.3 Rentas sobre varias cabezas

Para el estudio de las rentas sobre varias cabezas el planteamiento es similar al de los seguros. Limitándonos únicamente a la renta unitaria e ilimitada para los casos discreto prepagable y continuo, el lector no ha de tener dificultad en desarrollar las rentas temporales y diferidas asi como el caso discreto postpagable.

Dado un grupo u, los capitales vencen mientras dicho grupo no se extinga. El valor actual de la renta es una variable aleatoria cuyos valores son

$$Z = f(K_x) = \ddot{a}_{\overline{K_u+1}|} \quad K_u = 0, 1, 2, ...$$

y además

$$P(Z = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}) = \ {}_{k/}q_u \quad k = 0, 1, 2, ...$$

La **esperanza matemática** de esta variable aleatoria, valor actual actuarial de la renta que se representa por $\ddot{a}_u$, es

$$\ddot{a}_u = E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \ {}_{k/}q_u \tag{11.4}$$

Al igual que en las rentas sobre una cabeza, el valor actual actuarial de la renta puede obtenerse como la suma de los valores actuales actuariales de cada uno de los capitales unitarios con vencimiento al comienzo de cada año en caso de supervivencia de u. Se prueba con facilidad que

$$\ddot{a}_u = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ {}_kp_u \tag{11.5}$$

ya que ${}_kp_u$ puede expresarse en función de las probabilidades de supervivencia para grupos que se extinguen al primer fallecimiento, es claro que de forma natural $\ddot{a}_u$ quedará expresado como función de rentas sobre grupos que se extinguen al primer fallecimiento.

En el caso de la renta continua, el valor actual de la renta es una variable aleatoria cuyos valores son

$$Z = f(K_x) = \ddot{a}_{\overline{T_u}|} \quad T_u \geq 0$$

La **esperanza matemática** de esta variable aleatoria, valor actual actuarial de la renta que se representa por $\bar{a}_u$, es

$$\bar{a}_u = E(Z) = \int_0^\infty \ddot{a}_{\overline{t}|}\, g_u(t)\, dt \tag{11.6}$$

y también

$$\bar{a}_u = \int_0^\infty {}_tE_u\, dt \tag{11.7}$$

Espresándose $\bar{a}_u$ en función de rentas de grupos que se extinguen al primer fallecimiento.

Ejemplo 34 *Sea $u = \overline{x_1x_2x_3}$. Los capitales de la renta vencen al principio de cada año mientras esté viva al menos una de las tres cabezas. Tenemos*

$$\ddot{a}_{\overline{x_1x_2x_3}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_{\overline{x_1x_2x_3}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k(\ {}_kp_{x_1} + {}_kp_{x_2} + {}_kp_{x_3} - {}_kp_{x_1x_2} - {}_kp_{x_1x_3} - {}_kp_{x_2:x_3} + {}_kp_{x_1x_2x_3}) =$$

$$= \ddot{a}_{x_1} + \ddot{a}_{x_2} + \ddot{a}_{x_3} - \ddot{a}_{x_1x_2} - \ddot{a}_{x_1x_3} - \ddot{a}_{x_2x_3} + \ddot{a}_{x_1x_2x_3}$$

En general, representando mediante

$$S_m^{\ddot{a}} = \sum \ddot{a}_{x_{i_1}\ \dots\ x_{i_m}}$$

podemos escribir

$$\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\ \dots\ x_n}} = S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}} + \dots + (-1)^{n-1} S_n^{\ddot{a}}$$

o también, en caso de una renta que se paga mientras en un grupo de n cabezas vivan al menos m,

$$\ddot{a}_{\overline{\overset{m}{x_1x_2\ \dots\ x_n}}} = \sum_{j=m}^{n} (-1)^{j-m} \binom{j-1}{m-1} S_j^{\ddot{a}}$$

lo que puede generalizarse a las rentas temporales y a las diferidas.

Ejemplo 35 *Siendo* $u = \overline{x_1x_2x_3}^{\,2}$, *el valor actual actuarial de una renta unitaria diferida n años y postpagable es*

$$_{n/}a_{\overline{x_1x_2x_3}^{\,2}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k \; _kp_{\overline{x_1x_2x_3}^{\,2}} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k (\; _kp_{x_1x_2} + \; _kp_{x_1x_3} + \; _kp_{x_2x_3} - 2 \; _kp_{x_1x_2x_3}) =$$

$$= \; _{n/}a_{x_1x_2} + \; _{n/}a_{x_1x_3} + \; _{n/}a_{x_2x_3} - 2 \; _{n/}a_{x_1x_2x_3}$$

Asimismo es posible establecer rentas sobre grupos compuestos.

Ejemplo 36 *Sea* $u = vw$ *con* $v = \overline{x_1x_2}$ *y* $w = x_3$,

$$\ddot{a}_u = \ddot{a}_{\overline{x_1x_2}:x_3,} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; _kp_{\overline{x_1x_2}:x_3,} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; _kp_{\overline{x_1x_2}} \; _kp_{x_3,} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k (\; _kp_{x_1} + \; _kp_{x_2} - \; _kp_{x_1x_2}) \; _kp_{x_3,} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k (\; _kp_{x_1x_3,} + \; _kp_{x_2x_3,} - \; _kp_{x_1x_2x_3,}) =$$

$$= \ddot{a}_{x_1x_3,} + \ddot{a}_{x_2x_3,} - \ddot{a}_{x_1x_2x_3}$$

Ejemplo 37 *Considerando* $u = \overline{x_1x_2x_3}$, *el valor actual actuarial de una renta continua y unitaria para este grupo es*

$$\bar{a}_{\overline{x_1x_2x_3}} = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{t|}} \; g_{\overline{x_1x_2x_3}}(t) \; dt$$

$$= \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{t|}} \; (g_{x_1}(t) + g_{x_2}(t) + g_{x_3}(t) - g_{x_1x_2}(t) - g_{x_1x_3}(t) - g_{x_2x_3}(t) + g_{x_1x_2x_3}(t)) \; dt =$$

$$= \bar{a}_{x_1} + \bar{a}_{x_2} + \bar{a}_{x_3} - \bar{a}_{x_1x_2} - \bar{a}_{x_1x_3} - \bar{a}_{x_2x_3} + \bar{a}_{x_1x_2x_3}$$

11.4 Rentas de supervivencia

Dadas dos cabezas de edades x_1 y x_2 (o en dos grupos de varias cabezas u y v), podemos pensar en una renta a cobrar mientras viva x_2 (v) pero a partir del fallecimiento de x_1 (u). Tal renta se denomina **de supervivencia.**

Para un tratamiento elemental de estas rentas estudiaremos en primer lugar el valor actual de un capital unitario que vence dentro de t años si vive x_2 habiendo fallecido x_1. Ciertamente el valor actual es una variable aleatoria

$$Z = \begin{cases} v^t & si \quad T_{x_2} > t \; y \; T_{x_1} \leq t \\ 0 & si \quad en \; otro \; caso \end{cases}$$

Ya que

$$P(Z = v^t) = {}_tq_{x_1} \; {}_tp_{x_2}$$

la esperanza matemática de este valor actual, que representaremos mediante ${}_tE_{x_1/x_2}$ es

$${}_tE_{x_1/x_2} = E(Z) = v^t \; {}_tq_{x_1} \; {}_tp_{x_2} = v^t \; (1 - \; {}_tp_{x_1}) \; {}_tp_{x_2} \tag{11.8}$$

Notemos ademas que

$${}_tE_{x_1/x_2} = v^t \; (1 - \; {}_tp_{x_1}) \; {}_tp_{x_2} = v^t \; {}_tp_{x_2} - v^t \; {}_tp_{x_1} \; {}_tp_{x_2} = \; {}_tE_{x_2} - \; {}_tE_{x_1x_2}$$

En general, para dos grupos u y v

$${}_tE_{u/v} = \; {}_tE_v - \; {}_tE_{uv} \tag{11.9}$$

Representando mediante a_{x_1/x_2} el valor actual actuarial de una renta anual unitaria a cobrar mientras viva (x_2) pero a partir del fallecimiento de x_1 (notemos que el primer término de la renta vence al final del año de fallecimiento de x_1 siempre que esté viva x_2), tenemos

$$a_{x_1/x_2} = \sum_{t=1}^{\infty} \; {}_tE_{x_1/x_2} = \sum_{t=1}^{\infty}(\; {}_tE_{x_2} - \; {}_tE_{x_1x_2}) = a_{x_2} - a_{x_1x_2} \tag{11.10}$$

En general para dos grupos u y v,

$$a_{u/v} = a_v - a_{uv} \tag{11.11}$$

Ejemplo 38 *Sean $u = \overline{x_1x_2}$ y $v = x_3$*

$$a_{u/v} = a_{\overline{x_1x_2}/x_3} = a_{x_3} - a_{\overline{x_1x_2}:x_3} = a_{x_3} - a_{x_1x_2} - a_{x_1x_3} + a_{x_1x_2x_3}$$

los términos de la renta vencen mientras viva (x_3), pero una vez que hayan fallecido (x_1) y (x_2).

En el caso de la renta continua

$$\bar{a}_{x_1/x_2} = \int_0^\infty {}_tE_{x_1/x_2}\, dt = \int_0^\infty v^t\, (1 - {}_tp_{x_1})\, {}_tp_{x_2}\, dt = \bar{a}_{x_2} - \bar{a}_{x_1 x_2} \tag{11.12}$$

En general para dos grupos u y v, se tiene

$$\bar{a}_{u/v} = \bar{a}_v - \bar{a}_{uv}$$

Las rentas de supervivencia pueden se interpretadas como seguros cuyo capital asegurado se paga si fallece en primer lugar una de las cabezas.

En efecto, tomemos (11.12)

$$\bar{a}_{x_1/x_2} = \int_0^\infty v^t\, (1 - {}_tp_{x_1})\, {}_tp_{x_2}\, dt = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{x_2}\, {}_tq_{x_1}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{x_2}\, (\int_0^t {}_zp_{x_1}\, \mu_{x_1+z}\, dz)\, dt = \int_0^\infty (\int_0^t v^t\, {}_tp_{x_2}\, {}_zp_{x_1}\, \mu_{x_1+z}\, dz)\, dt$$

tenemos una integral doble cuyo recinto de integración es

$$A = \{(t,z) \in R^2 /\ 0 \leq t < \infty,\ 0 \leq z \leq t\}$$

conjunto que puede expresarse también como

$$A = \{(t,z) \in R^2 /\ 0 \leq z < \infty,\ z \leq t \leq \infty\}$$

por lo que

$$\bar{a}_{x_1/x_2} = \int_0^\infty (\int_z^\infty v^t\, {}_tp_{x_2}\, {}_zp_{x_1}\, \mu_{x_1+z}\, dt)\, dz = \int_0^\infty (\int_z^\infty v^t\, {}_tp_{x_2}\, dt)\, {}_zp_{x_1}\, \mu_{x_1+z}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty {}_{z/}a_{x_2}\, {}_zp_{x_1}\, \mu_{x_1+z}\, dt = \int_0^\infty v^z\, {}_zp_{x_2}\, \bar{a}_{x_2+z}\, {}_zp_{x_1}\, \mu_{x_1+z}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty v^z\, \bar{a}_{x_2+z}\, {}_zp_{x_2}\, {}_zp_{x_1}\, \mu_{x_1+z}\, dt$$

que coincide con el valor actual actuarial de un seguro sobre el grupo de dos cabezas de edades x_1 y x_2, cuyo capital asegurado se paga si fallece la primera cabeza antes que la segunda, siendo el capital asegurado una renta vitalicia para la segunda cabeza, a recibir a partir del fallecimiento de la primera.

11.5 Primas y reservas matemáticas

En cuanto a las primas periódicas en el momento de establecer la equivalencia actuarial, se ha de tener cierto cuidado respecto a la finalización de su pago con el fin de evitar el supuesto de pago de primas cuando ya no existe posibilidad de indemnización alguna.

Ejemplo 39 *Sea* $u = x_1x_2x_3$. *Consideremos un seguro vida entera con pago del capital asegurado (unitario) al final del año de extinción de* u.

Ya que el grupo se extingue al primer fallecimiento, es razonable pensar que las primas se han de pagar como maximo mientras las tres cabezas se encuentren con vida. Repesentando la prima anual constante mediante $P_{x_1x_2x_3}$, *la equivalencia acturial conduce a*

$$P_{x_1x_2x_3}\ \ddot{a}_{x_1x_2x_3} = A_{x_1x_2x_3}$$

En caso de que se estableciese una temporalidad para el pago de primas de n *años, escribiriamos*

$$_nP_{x_1x_2x_3}\ \ddot{a}_{x_1x_2x_3:\overline{n|}} = A_{x_1x_2x_3}$$

donde $\ddot{a}_{x_1x_2x_3:\overline{n|}}$ *representa el valor actual actuarial de una renta temporal* n *años sobre el grupo* u.

Ejemplo 40 *Sea* $u = \overline{x_1x_2}$, *y un seguro vida entera con pago del capital asegurado al final del año de extinción de* u.

Ahora el pago de primas se realizará como máximo hasta el último fallecimiento. Si esto es así, la equivalencia actuarial quedará

$$P_{\overline{x_1x_2}}\ \ddot{a}_{\overline{x_1x_2}} = A_{\overline{x_1x_2}}$$

Ejemplo 41 *Consideremos una renta de supervivencia a cobrar mientras viva* x_2 *pero a partir del fallecimiento de* x_1. *Es logico que el pago de primas se realice como máximo hasta el primer fallecimiento. En este caso la equivalencia actuarial es*

$$P(a_{x_1/x_2})\ \ddot{a}_{x_1x_2} = a_{x_1/x_2}$$

En relación con la reserva matemática hemos de indicar que, en general, cuando el grupo y la póliza se extinguen al primer fallecimiento, la valoración prospectiva no se diferencia de la corrrespondiente a seguros sobre una cabeza. Cuando esto no sucede el cálculo de la reserva puede hacerse mas complejo debido a la necesidad de contemplar las diferentes situaciones en que pueden encontrarse las cabezas del grupo h años después de suscrita la poliza. Analicemos algunos ejemplos.

Ejemplo 42 *Para el seguro vida entera del ejemplo 39, en el que el grupo se extingue al primer fallecimiento es claro que la reserva matematica h años después de suscrita la póliza es*

$$ {}_hV_{x_1x_2x_3} = A_{x_1+h\ x_2+h\ x_3+h} - P_{x_1x_2x_3}\ \ddot{a}_{x_1+h\ x_2+h\ x_3+h} $$

Ejemplo 43 *En el seguro vida entera del ejemplo 40, el grupo no se extingue al primer fallecimiento por lo que puede "estar vivo" h años despues de suscrita la póliza con diversas situaciones que condicionan la cuantía de la reserva matemática. Así:*

a) Si viven x_1 y x_2

$$ {}_hV_{\overline{x_1x_2}} = A_{\overline{x_1+h\ x_2+h}} - P_{\overline{x_1x_2}}\ \ddot{a}_{\overline{x_1+h\ x_2+h}} $$

b) Si sólo vive x_1

$$ {}_hV_{\overline{x_1x_2}} = A_{x_1+h} - P_{\overline{x_1x_2}}\ \ddot{a}_{x_1+h} $$

c) Si sólo vive x_2

$$ {}_hV_{\overline{x_1x_2}} = A_{x_2+h} - P_{\overline{x_1x_2}}\ \ddot{a}_{x_2+h} $$

Ejemplo 44 *En el caso de la renta de suprvivencia del ejemplo 41, la póliza se extingue al fallecer x_2. La reserva matemática h años después de suscrita la poliza es*

a) Si viven x_1 y x_2

$$ {}_hV(a_{x_1/x_2}) = a_{x_1+h/x_2+h} - P(a_{x_1/x_2})\ \ddot{a}_{x_1+h:x_2+h} $$

b) Si sólo vive x_2

$$ {}_hV(a_{x_1/x_2}) = \ddot{a}_{x_2+h} $$

11.6 Funciones de conmutación

Al igual que para el caso de los seguros para una cabeza, en los de varias cabezas también se han empleado las funciones de conmutación para facilitar los cálculos actuariales.

Así, se define la función

$$ D_{x_1x_2\ \dots\ x_n} = v^{\frac{x_1x_2\ \dots\ x_n}{n}}\ l_{x_1x_2\ \dots\ x_n} \tag{11.13} $$

y a partir de ella, mediante suma

$$N_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t} \tag{11.14}$$

y

$$S_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t} \tag{11.15}$$

Asimismo, la función

$$C_{x_1x_2\ ...\ x_n} = v^{\frac{x_1+x_2+\ ...\ +x_n}{n}+1}\ d_{x_1x_2\ ...\ x_n} \tag{11.16}$$

y también mediante suma

$$M_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t} \tag{11.17}$$

y

$$R_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t} \tag{11.18}$$

El cálculo mediante estas funciones de los valores actuales actuariales de rentas y seguros para grupos que se extinguen al primer fallecimiento, es sencillo. Veamos algunos ejemplos:

1.- Para el **factor de actualización actuarial**

$${}_tE_{x_1x_2\ ...\ x_n} = v^t\ {}_tp_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \frac{v^{\frac{x_1+x_2+\ ...\ +x_n}{n}+t}\ l_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t}}{v^{\frac{x_1+x_2+\ ...\ +x_n}{n}}\ l_{x_1x_2\ ...\ x_n}} =$$

$$= \frac{v^{\frac{x_1+t+x_2+t+...+x_n+t}{n}}\ l_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t}}{v^{\frac{x_1x_2\ ...\ x_n}{n}}\ l_{x_1x_2\ ...\ x_n}} = \frac{D_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t}}{D_{x_1x_2\ ...\ x_n}} \tag{11.19}$$

2.- **Seguro vida entera**

$$A_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k/}q_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x_1+k\ x_2+k\ ...\ x_n+k}}{l_{x_1x_2\ ...\ x_n}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{\frac{x_1+k+x_2+k+\ ...\ +x_n+k}{n}+1}}{v^{\frac{x_1+k+x_2+k+\ ...\ +x_n+k}{n}}} \frac{d_{x_1+k\ x_2+k\ ...\ x_n+k}}{l_{x_1x_2\ ...\ x_n}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{x_1+k\ x_2+k\ ...\ x_n+k}}{D_{x_1x_2\ ...\ x_n}} = \frac{M_{x_1x_2\ ...\ x_n}}{D_{x_1x_2\ ...\ x_n}} \tag{11.20}$$

3.- **Renta prepagable**

$$\ddot{a}_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{x_1+k\ x_2+k\ ...\ x_n+k}}{D_{x_1x_2\ ...\ x_n}} = \frac{N_{x_1x_2\ ...\ x_n}}{D_{x_1x_2\ ...\ x_n}} \tag{11.21}$$

4.- **Renta temporal prepagable**

$$\ddot{a}_{x_1x_2\ ...\ x_n:\overline{m|}} = \sum_{k=0}^{m-1} {}_kE_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D_{x_1+k\ x_2+k\ ...\ x_n+k}}{D_{x_1x_2\ ...\ x_n}} =$$

$$= \frac{N_{x_1x_2\ ...\ x_n} - N_{x_1+m\ x_2+m\ ...\ x_n+m}}{D_{x_1x_2\ ...\ x_n}} \tag{11.22}$$

11.7 Ejercicios

1.- Pruebe las siguientes igualdades.

a)

$$A_{\overline{x_1x_2}} = 1 - da_{\overline{x_1x_2}}$$

b)

$$\bar{A}_{x_1x_2} = 1 - \delta\ \bar{a}_{x_1x_2}$$

c)

$$\bar{A}_{\overline{x_1\overset{2}{x_2}x_3}} = 1 - \delta\ \bar{a}_{\overline{x_1\overset{2}{x_2}x_3}}$$

Solución:

a)

$$A_{\overline{x_1x_2}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k/}q_{\overline{x_1x_2}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}(\ {}_kp_{\overline{x_1x_2}} -\ {}_{k+1}p_{\overline{x_1x_2}}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_{\overline{x_1x_2}} - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k+1}p_{\overline{x_1x_2}}) = v\ \ddot{a}_{\overline{x_1x_2}} - a_{\overline{x_1x_2}} =$$

$$= v\ \ddot{a}_{\overline{x_1x_2}} - (\ddot{a}_{\overline{x_1x_2}} - 1) = 1 - (v-1)\ \ddot{a}_{\overline{x_1x_2}} = 1 - d\ \ddot{a}_{\overline{x_1x_2}}$$

b) Ahora basta tener en cuenta

$$\bar{a}_{x_1x_2} = \int_0^{\infty} \frac{1-v^t}{\delta}\ g_{x_1x_2}(t)\ dt = \frac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_{x_1x_2})$$

c) Igual que para b)

$$\bar{a}_{\overset{2}{\overline{x_1x_2x_3}}} = \int_0^\infty \frac{1-v^t}{\delta}\, g_{\overset{2}{\overline{x_1x_2x_3}}}(t)\, dt = \frac{1}{\delta}(1- \bar{A}_{\overset{2}{\overline{x_1x_2x_3}}})$$

2.- Interprete la expresión

$$A_{\overline{(x_1x_2):(x_3x_4)}}$$

y exprésela en función de los valores actuales actuariales de seguros sobre grupos que se extinguen al primer fallecimiento.

Solución:

La expresión dada representa el valor actual actuarial de un seguro vida entera con pago del capital asegurado al final del año de la extinción del grupo que se produce al extinguirse los grupos $u = x_1x_2$ y $w = x_3x_4$. Para que se produzca ese hecho basta con que fallezca una o dos de las cabezas de un grupo y se produzca el primer fallecimiento en el otro grupo.

$$A_{\overline{(x_1x_2):(x_3x_4)}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k/}q_{\overline{(x_1x_2):(x_3x_4)}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}(\ {}_{k+1}p_{\overline{(x_1x_2):(x_3x_4)}} - \ {}_{k}p_{\overline{(x_1x_2):(x_3x_4)}}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}(\ {}_{k/}q_{x_1x_2} + \ {}_{k/}q_{x_3x_4} - \ {}_{k/}q_{x_1x_2x_3x_4}) = A_{x_1x_2} + A_{x_3x_4} - A_{x_1x_2x_3x_4}$$

3.-Interprete y calcule las expresiones:

a)

$$\bar{A}_{\overset{1}{\widehat{x_1x_2}}x_3}$$

b)

$$\bar{A}_{\overset{2}{\widehat{x_1x_2}}x_3}$$

b)

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overline{x_1x_2}}x_3}$$

Solución:

a) Es el valor actual actuarial de un seguro vida entera cuyo capital asegurado se paga en el momento de la extinción del grupo x_1x_2, siempre que esta acaezca antes del fallecimiento de (x_3); esto es el capital asegurado se paga al fallecimiento de (x_1) **o** (x_2) pero siempre que no haya fallecido previamente (x_3).

$$\bar{A}_{\overset{1}{\widehat{x_1x_2}}x_3} = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{x_1x_2x_3}\ \mu_{x_1+t:x_2+t}\ dt = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{x_1x_2x_3}(\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t})\ dt =$$

$$= \bar{A}_{\overset{1}{x_1}x_2x_3} + \bar{A}_{x_1\overset{1}{x_2}x_3}$$

b) Es el valor actual actuarial de un seguro vida entera cuyo capital asegurado se paga en el momento de la extinción del grupo $x_1 : x_2$, siempre que (x_3) haya fallecido previamente, esto es, el capital asegurado se paga al fallecimiento de (x_1) **o** (x_2) una vez fallecido (x_3)..

$$\bar{A}_{\overset{2}{\widehat{x_1x_2}}x_3} = \int_0^\infty v^t\ {}_tq_{x_3}\ {}_tp_{x_1x_2}\ \mu_{x_1+t:x_2+t}\ dt = \int_0^\infty v^t(1 - {}_tp_{x_3})\ {}_tp_{x_1x_2}(\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t})\ dt =$$

$$= \bar{A}_{x_1:x_2} - \bar{A}_{\overset{1}{x_1}x_2x_3} - \bar{A}_{x_1\overset{1}{x_2}x_3}$$

c) Es el valor actual actuarial de un seguro vida entera cuyo capital asegurado se paga en el momento de la extinción del grupo $\overline{x_1x_2}$, siempre que esta acaezca antes del fallecimiento de x_3; esto es el capital asegurado se paga al fallecimiento de (x_1) **y** (x_2) pero siempre que no haya fallecido previamente (x_3)..

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overline{x_1x_2}}x_3} = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{x_3}\ g_{\overline{x_1x_2}}(t)\ dt = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{x_3}\ (g_{x_1}(t) + g_{x_2}(t) - g_{x_1x_2}(t))\ dt =$$

$$= \overline{A}_{\overset{1}{x_1}x_3} + \overline{A}_{\overset{1}{x_2}x_3} - \overline{A}_{\overset{1}{\widehat{x_1x_2}}x_3}$$

4.-Interprete y calcule las expresiones:

a)

$$\bar{a}_{\overline{x_1x_2}:x_3}$$

b)

$$\bar{a}_{x_1x_2/x_3}$$

Solución:

a) $\overline{a}_{\overline{x_1x_2}:x_3}$ es el valor actual actuarial de una renta unitaria y continua pagadera hasta que o bien fallezca (x_3) o bien fallezcan (x_1) y (x_2).

$$\overline{a}_{\overline{x_1x_2}:x_3} = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{\overline{x_1x_2}:x_3}\ dt = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{\overline{x_1x_2}}\ {}_tp_{x_3}\ dt =$$

$$\int_0^{\infty} v^t({}_tp_{x_1} +{}_t p_{x_2} - {}_tp_{x_1x_2})\ {}_tp_{x_3}\ dt = \bar{a}_{x_1x_3} + \bar{a}_{x_1x_2} - \bar{a}_{x_1x_2x_3}$$

b) $\bar{a}_{x_1x_2/x_3}$ es el valor actual actuarial de una renta unitaria y continua pagadera mientras viva (x_3) a partir del fallecimiento de (x_1) **o** (x_2)

$$\bar{a}_{x_1x_2/x_3}=\bar{a}_{x_3} - \bar{a}_{x_1x_2x_3}$$

5.- Establezca una aproximación para

$$a^{(m)}_{x_1:x_2:...:x_n}$$

Solución:

Estamos ante el valor actual actuarial de una renta fraccionada. Ciertamente

$$a^{(m)}_{x_1:x_2:...:x_n}$$

$$a^{(m)}_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \frac{1}{m}\ {}_{\frac{1}{m}}E_{x_1x_2\ ...\ x_n} + \frac{1}{m}\ {}_{\frac{2}{m}}E_{x_1x_2\ ...\ x_n} + ...+$$

$$+\frac{1}{m}\ {}_{\frac{m}{m}}E_{x_1x_2\ ...\ x_n} + \frac{1}{m}\ {}_{1+\frac{1}{m}}E_{x_1x_2\ ...\ x_n} + ... =$$

$$= \frac{1}{m}\ (\frac{D_{x_1+\frac{1}{m}\ ...\ x_n+\frac{1}{m}:}}{D_{x_1x_2\ ...\ x_n}} + \frac{D_{x_1+\frac{2}{m}\ ...\ x_n+\frac{2}{m}:}}{D_{x_1x_2\ ...\ x_n}} + ... + \frac{D_{x_1+1+\frac{1}{m}\ ...\ x_n+1+\frac{1}{m}:}}{D_{x_1x_2\ ...\ x_n}} + ...) =$$

$$= \sum_{p=o}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m}\ \frac{D_{x_1+p+\frac{k}{m}\ ...\ x_n+p+\frac{k}{m}}}{D_{x_1:x_2:...:x_n}}\right) = \sum_{p=o}^{\infty}\frac{1}{m\ D_{x_1:x_2:...:x_n}}\left(\sum_{k=1}^{m}D_{x_1+p+\frac{k}{m}\ ...\ x_n+p+\frac{k}{m}}\right)$$

Asumiendo la hipotesis de linealidad de los D, esto es,

$$D_{x_1+p+\frac{k}{m}\ ...\ x_n+p+\frac{k}{m}} = D_{x_1+p\ ...\ x_n+p} + \frac{k}{m}(D_{x_1+p+1\ ...\ x_n+p+1} - D_{x_1+p\ ...\ x_n+p})$$

y procediendo como en el apartado 6.2.2, se obtiene elementalmente

$$a^{(m)}_{x_1x_2\ ...\ x_n} = a_{x_1x_2\ ...\ x_n} + \frac{m-1}{2m}$$

De igual forma es posible obtener el valor aproximado de las rentas temporales y diferidas, asi como para las prepagables.

6.- Pruebe que

$$a^{(m)}_{x_1/x_2} \approx a_{x_1/x_2}$$

Solución:

Aceptando la aproximación para las rentas fraccionadas del ejercicio anterior, y teniendo en cuenta que

$$a^{(m)}_{x_1/x_2} = a^{(m)}_{x_2} - a^{(m)}_{x_1x_2}$$

es claro que

$$a^{(m)}_{x_1/x_2} = a_{x_2} + \frac{m-1}{2m} - a_{x_1x_2} - \frac{m-1}{2m} = a_{x_1/x_2}$$

7.- De las tablas GKM80 y GKF80 se obtienen los siguientes datos

x	$l_x\ (GKM80)$	x	$l_x\ (GKF80)$
40	967843.22	35	978042.28
41	965692.86	36	976831.86
42	963325.27	37	975611.02
43	960712.63	38	974379.79
44	957826.14	39	973136.60
45	954636.15	40	971872.23
46	951112.19	41	970570.36
47	947223.18	42	969213.25
48	942937.51	43	967781.84

Para un varón de 40 años y una mujer de 35, calcule:

$$A_{40:35:\overline{5|}}$$

si se emplea un tipo de interés técnico del 0.03.

Solución:

Sabemos que

$$A_{40:35:\overline{5|}} = \sum_{k=0}^{4} (1+0.03)^{-(k+1)}\ {}_{k/}q_{40:35} + \ {}_5E_{40:35}$$

donde

$${}_5E_{40:35} = (1+0.05)^{-5}\ {}_5p_{40:35} = (1+0.05)^{-5}\ 0.98013163 = 0.84547016$$

$${}_{k/}q_{40:35} = \ {}_kp_{40:35}\ q_{40+k:35+k} = \ {}_kp_{40:35}\ (1 - p_{40+k:35+k})$$

obteniéndose, después de sencillos cálculos,

$$q_{40:35} = 0.00345666$$

$$_{1/}q_{40:35} = 0.00368565$$

$$_{2/}q_{40:35} = 0.00394233$$

$$_{3/}q_{40:35} = 0.00422917$$

$$_{4/}q_{40:35} = 0.00455456$$

por lo que

$$A_{40:35:\overline{5|}} = 0.86359436$$

8.- Un padre de 40 años de edad contrata un seguro mediante el cual su hijo que actualmente posee 16 años cobrará si alcanza con vida los 21 un capital de 10000000 de pesetas.

Calcúlese la prima pura anual y constante a pagar mientras vivan ambos pero como máximo durante 5 años, si se emplea un tipo de interés técnico del 0.03 y la tabla de mortalidad es la GKM80.

x	l_x $(GKM80)$	x	l_x $(GKM80)$
15	1000000	40	967843.22
16	998921.00	41	965692.86
17	997830.97	42	963325.27
18	996729.97	43	960712.63
19	995618.01	44	957826.14
20	994495.16	45	954636.15
21	993361.43	46	951112.19
22	992216.88	47	947223.18
23	991061.54	48	942937.51

Solución:

Estamos en presencia del denominado seguro dotal. Representando mendiante P la prima anual constante, la equivalencia actuarial es

$$P\ \ddot{a}_{15:40:\overline{5|}} = A_{\underset{15:\overline{5|}}{\ \ 1}}$$

donde

$$\ddot{a}_{15:40:\overline{5|}} = \sum_{k=0}^{4} (1+0.03)^{-k}\ {}_kp_{15:40}$$

y

$$A_{\overset{1}{15:\overline{5|}}} = (1+0.03)^{-5}\ {}_5p_{15}$$

siendo

$${}_kp_{15:40} = {}_kp_{15}\ {}_kp_{40} = \frac{l_{15+k}}{l_{15}}\ \frac{l_{40+k}}{l_{40}}$$

Una vez realizados los correspondientes cálculos se tiene

$${}_0p_{15:40} = 1$$

$${}_1p_{15:40} = 0.9967015973$$

$${}_2p_{15:40} = 0.9931730440$$

$${}_3p_{15:40} = 0.9893865548$$

$${}_4p_{15:40} = 0.9853134779$$

$${}_5p_{15} = 0.994495160$$

por lo que

$$\ddot{a}_{15:40:\overline{5|}} = 4.68469941889149$$

$$A_{\overset{1}{15:\overline{5|}}} = 0.8578602616883$$

y la prima anual constante es

$$P = 10000000\ \frac{A_{\overset{1}{15:\overline{5|}}}}{\ddot{a}_{15:40:\overline{5|}}} = 1831195.952$$