[5] GONZÁLEZ CATALÁ, V. T. (1992): *"Análisis de las operaciones financieras, bancarias y bursátiles"*. Madrid: Ciencias Sociales.
[6] MENEU, V.; M.P. JORDÁ; M.T. BARREIRA. (1996): *"Operaciones financieras en el mercado español"*. Barcelona: Ariel.
[7] PRIETO PÉREZ, E. (1992): "Análisis financiero de los empréstitos-obligaciones". Madrid: ICE.
[8] RODRÍGUEZ, A. (1994): *"Matemática de la financiación"*. Barcelona: Ediciones S.

ANÁLISIS DE LOS MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES SOBRE ÍNDICES DE CATÁSTROFES. UN MODELO ALTERNATIVO.

María José Pérez Fructuoso[1] y Antonio Alegre Escolano[2]

RESUMEN

En este artículo se analizan en primer lugar las hipótesis de evolución propuestas en la literatura actuarial para explicar el comportamiento del índice de pérdidas subyacente de los "*catastrophe insurance derivatives*". Alternativamente, se propone un modelo estocástico continuo de evolución de dicho índice de siniestralidad. Las catástrofes se clasifican en tres categorías y para cada una de ellas se realizan diferentes hipótesis acerca de la magnitud, el número y el proceso de reclamaciones asociado. En este contexto, se obtiene el comportamiento de la ratio de siniestralidad por agregación mediante la convolución de la distribución individual de cada catástrofe y se determina el proceso estocástico seguido por el índice de pérdidas subyacente de las opciones catastróficas consideradas.

PALABRAS CLAVE: Cuantía de siniestros pendiente de declarar, Cuantía declarada de siniestros, Tasa instantánea de declaración de siniestros, Proceso de Wiener, Proceso de Poisson, Distribución Condicionada, Distribución Exponencial.

[1] Departamento de Economía de la Empresa Universidad Carlos III de Madrid.
[2] Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial Universidad de Barcelona.

1. INTRODUCCIÓN

El número de catástrofes y los daños producidos por cada una de ellas han aumentado sensiblemente desde la década de los noventa, lo que ha obligado a combinar el reaseguro tradicional con otros métodos complementarios para cubrir este tipo de siniestralidad. En esta línea, y ante la magnitud de los daños causados por los huracanes *Andrew* e *Iniki* entre agosto y septiembre de 1992, el *Chicago Board of Trade* (C.B.O.T.) lanza al mercado, en diciembre de ese mismo año, el primer activo derivado diseñado específicamente para la industria del seguro: los contratos de futuros y de opciones sobre riesgos catastróficos, *CAT-futures* y opciones *CAT*.

Los contratos *CAT* tenían como subyacente una ratio de siniestralidad, *LR*, que relacionaba la cuantía total de las pérdidas, $L(T_2)$, derivadas de las catástrofes ocurridas y declaradas durante un determinado periodo, con el volumen estimado de primas, π, que se destinaban a cubrir dichas pérdidas. La naturaleza de *LR* es aleatoria porque $L(T_2)$ es un valor desconocido a lo largo de toda la vida del contrato: a priori, se ignora el número de catástrofes que van a producirse, su magnitud y el momento de ocurrencia; tampoco se conoce el ritmo de declaración de los siniestros asociados.

Para superar las deficiencias técnicas de los contratos *CAT* [Alcántara, F. (1999)], nacieron en septiembre de 1995 las opciones *PCS*, basadas también en un índice de pérdidas de naturaleza catastrófica, pero con la diferencia de que el denominador de dicho índice es un valor constante, igual a 100 millones de dólares.

Un aspecto relevante en el análisis teórico de estas opciones es su valoración a lo largo de un intervalo temporal determinado, lo cual requiere un modelo que permita calcular la evolución en el tiempo de la suma total de las pérdidas, $L(T_2)$, y, obviamente, de la ratio de siniestralidad subyacente de este tipo de contratos. Diversos autores [Cummins, D. y Geman, H. (1995)] [Geman, H. y Yor, M. (1997)] se han ocupado de la cuestión, desarrollando modelos de valoración basados en dos hipótesis: por una parte, procesos geométricos de Wiener, que describen cómo evoluciona la declaración instantánea de los siniestros; por otra, procesos de Poisson, que incluyen en el modelo la posibilidad de ocurrencia de grandes catástrofes.

Describir la declaración instantánea de los siniestros mediante un proceso geométrico de Wiener supone que la velocidad de declaración crezca exponencialmente en promedio dentro del período considerado. Sin embargo, empíricamente se manifiesta lo contrario: cuando se produce la catástrofe se producen casi inmediatamente la mayor parte de las declaraciones de siniestros y a medida que transcurre el tiempo dichas declaraciones disminuyen. Tampoco es asumible que esa tasa sea discontinua, tal y como sostienen Cummins y Geman (1995), al introducir el proceso de salto debido a las grandes catástrofes en la definición de $S(t)$; o que las grandes catástrofes se introduzcan directamente en la definición de $L(T)$, según afirman Geman y Yor (1997): estos enfoques agregados en cuanto al comportamiento de la velocidad de los siniestros no se corresponden con una distribución tendencialmente uniforme de su ocurrencia.

El presente trabajo presenta un nuevo modelo de comportamiento del subyacente de las opciones sobre índices de catástrofes, en el que la cuantía total de cada catástrofe se obtiene sumando dos magnitudes: la cuantía de siniestros declarada y la cuantía de siniestros pendiente de declarar. Sobre esta base, se considera en primer lugar que la dinámica de la declaración de los siniestros es determinista, de modo que el factor aleatorio existente en el modelo se debe únicamente al número, tamaño e instante de ocurrencia de los sucesos catastróficos; y como hipótesis central, se asume que la cuantía de las declaraciones de siniestros derivados de una catástrofe es creciente en el tiempo y proporcional a la variable "cuantía de siniestros pendiente de declarar", según un valor constante denominado "tasa instantánea de declaración de siniestros" [Alegre, A. *et al.* (1999)]. En segundo término, se incorpora la aleatoriedad en el modelo mediante una perturbación de ruido blanco en la tasa de declaración de siniestros, para representar más adecuadamente el comportamiento irregular de las declaraciones de siniestros en el tiempo.

Bajo estas hipótesis, puede obtenerse el total de declaraciones y, por tanto, el índice de pérdidas *LR*, a través de la convolución de la distribución de la cuantía total de declaraciones de pérdidas para cada catástrofe. Todo ello considerando la información disponible acerca de los sucesos catastróficos ya ocurridos, y los siniestros asociados que se han declarado hasta un determinado momento t del periodo de negociación de estos activos derivados [Pérez, M. J. (2000)].

Por último, se comparan los resultados obtenidos en los tres modelos existentes a través de las hipótesis sobre las que se basan tanto la ocurrencia de las catástrofes como la declaración de los siniestros asociados a las mismas.

2. MODELO DETERMINISTA DE LA DINÁMICA DEL PROCESO DE DECLARACIÓN DE SINIESTROS

2.1 Hipótesis sobre la ocurrencia de las catástrofes

Las catástrofes se clasifican en tres grupos en función de su cuantía considerando que, a efectos de las entidades aseguradoras norteamericanas, un suceso tiene carácter catastrófico cuando causa como mínimo 5 millones de dólares de pérdidas en bienes asegurados y afecta a un número significativo de asegurados y de aseguradores [Board of Trade of the City of Chicago, (1995)]:

- k_j^1 representa la magnitud de las catástrofes de pequeña cuantía (*small catastrophes*).

- k_j^2 representa la magnitud de las catástrofes de cuantía media.

- k_j^3 representa la magnitud de las grandes catástrofes (*major catastrophes*).

En general,

$$k_j^i \quad \text{con } i = 1,2,3 \quad j = 1,2,\ldots,N^i(t)$$

donde:

- k_j^i son variables aleatorias independientes y equidistribuídas dentro de cada grupo i y con distribuciones diferentes según el tipo de catástrofe que se produce.

- $N^i(t)$ es el número aleatorio de catástrofes ocurridas durante el periodo de tiempo considerado. Este número se representa mediante distribuciones de Poisson independientes para cada tipo i de catástrofe, de intensidad $\lambda^i T_1$ con $i = 1,2,3$ [3], donde λ^i es el número medio anual de catástrofes ocurridas del tipo i [Hossack, I.B. *et al.* (1983)].

Finalmente, se definen las variables t_j^i con $i = 1,2,3$ y $j = 1,2,\ldots,N^i(t)$ como los momentos en los que pueden producirse las catástrofes, con $t_j^i \leq T_1$ y donde T_1 indica la amplitud del periodo en el que la ocurrencia de una catástrofe se incluye en la elaboración del índice de pérdidas subyacente del contrato.

Al representar el número de catástrofes ocurridas del tipo i a través de una distribución de Poisson de parámetro λ^i, el tiempo que transcurre entre dos sucesos de Poisson, entre la ocurrencia de dos catástrofes consecutivas del mismo tipo, $t_j^i - t_{j-1}^i$, se obtiene a partir de una distribución exponencial de parámetro λ^i [Durá Peiró, J.M., López Cuñat, J.M., (1988)].

2.2 Hipótesis sobre la dinámica de las declaraciones de siniestros

Como hipótesis de partida para desarrollar el modelo se supone que en el momento $t_j^i \in [0, T_1]$ sobreviene una catástrofe de cuantía k_j^i. En ese momento se inicia el proceso de declaración de los siniestros asociados a dicha catástrofe hasta el final del periodo de declaración de pérdidas definido en el contrato, T_2.

[3] $\lambda^i T_1$ es el número medio de catástrofes del tipo i ocurridas en el periodo de pérdidas, $[0, T_1]$.

La evidencia empírica muestra que al principio, inmediatamente después de la ocurrencia de la catástrofe, se declara una gran cantidad de siniestros, es decir, la intensidad de declaración es elevada, y a medida que pasa el tiempo el ritmo de las declaraciones asociadas a dicha catástrofe disminuye.

Se define la cuantía k_j^i de la catástrofe como la suma de dos variables:

$$k_j^i = S_j^i(t) + R_j^i(t) \qquad [2.1]$$

donde $S_j^i(t)$ es la cuantía declarada de siniestros hasta el momento t asociada a una catástrofe del tipo i ocurrida en el momento t_j^i y $R_j^i(t)$ es la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t, asociada a la catástrofe del tipo i ocurrida en t_j^i.

La siniestralidad instantánea, $dS_j^i(t)$, viene dada por una ecuación diferencial cierta que describe un crecimiento de la cuantía de siniestros declarada proporcional a la variable cuantía de siniestros pendiente de declarar

$$dS_j^i(t) = \alpha^i\left(t - t_j^i\right)R_j^i(t)dt \qquad [2.2]$$

donde $\alpha^i\left(t - t_j^i\right)$ es una función real de variable real.

Diferenciando la ecuación [2.1] resulta:

$$dS_j^i(t) = -dR_j^i(t) \qquad [2.3]$$

y sustituyendo en la ecuación [2.2], $dS_j^i(t)$ por la igualdad [2.3], se obtiene la ecuación diferencial representativa de la evolución de $R_j^i(t)$, variable fundamental en la formalización del modelo:

$$dR_j^i(t) = -\alpha^i\left(t - t_j^i\right)R_j^i(t)dt \quad \text{con } i = 2{,}3 \qquad [2.4]$$

Esta ecuación diferencial indica que la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t evoluciona de forma decreciente en el tiempo a razón de la tasa $\alpha^i\left(t - t_j^i\right)$ denominada *"tasa de declaración de siniestros"*.

La determinación de esta tasa se realiza a partir del análisis de datos empíricos y bajo la hipótesis de que los siniestros asociados a una catástrofe de cuantía media, *i=2*, se declaran más rápidamente en el tiempo que los siniestros referidos a las grandes catástrofes, *i=3*, es decir, $\alpha^2\left(t - t_j^i\right) > \alpha^3\left(t - t_j^i\right)$.

Resolviendo [2.4] para el caso concreto de una tasa instantánea de declaración de siniestros, esto es, $\alpha^i\left(t - t_j^i\right) = \alpha^i$, la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t resulta:

$$R_j^i(t) = k_j^i e^{-\alpha^i\left(t - t_j^i\right)} \quad \text{con } i = 2{,}3 \qquad [2.5]$$

con las siguientes condiciones de contorno:

- Si $t = t_j^i$ entonces $R_j^i\left(t_j^i\right) = k_j^i$, la cuantía de siniestros pendiente de declarar coincide con el volumen total de la catástrofe.

- Si $t \to \infty$ entonces $R_j^i(\infty) = 0$, la cuantía de siniestros pendiente de declarar es cero.

Sustituyendo en [2.2] la cuantía de siniestros pendiente de declarar por su valor en función de la cuantía de siniestros declarada, es decir, $R_j^i(t) = k_j^i - S_j^i(t)$, se obtiene una nueva expresión para la ecuación diferencial descriptiva de la evolución de la variable $S_j^i(t)$:

$$dS_j^i(t) = -\alpha^i\left(t - t_j^i\right)\left[k_j^i - S_j^i(t)\right]dt \quad \text{con } i = 2{,}3 \qquad [2.6]$$

y resolviendo esta ecuación diferencial resulta:

$$S_j^i(t) = k_j^i\left[1 - e^{-\alpha^i\left(t - t_j^i\right)}\right] \quad \text{con } i = 2{,}3 \qquad [2.7]$$

)e forma simétrica a la cuantía de siniestros pendiente de declarar, la :uantía declarada de siniestros está sujeta a las siguientes condiciones le contorno:

Si $t=t_j^i$ entonces $S_j^i(t_j^i)=0$, la cuantía declarada de siniestros es cero.

Si $t\rightarrow\infty$ entonces $S_j^i(t_j^i)=k_j^i$, la cuantía declarada de siniestros coincide con el volumen total de la catástrofe.

:n cuanto a las catástrofes de pequeña cuantía, *i=1*, se hace la ipótesis de declaración instantánea ($\alpha^1(t-t_j^i)\rightarrow\infty$) en el momento de ocurrencia, t_j^1, es decir, pasan a formar parte del índice de pérdidas irectamente,

$$R_j^i(t)=0 \qquad S_j^i(t)=k_j^i \qquad \forall t\in\left[t_j^i,T_2\right] \text{ con } i=1$$

.3 Determinación de la dinámica de la ratio de siniestralidad

.a ratio de siniestralidad de los activos derivados catastróficos onsiderados, opciones *PCS*, viene dada por la siguiente expresión:

$$LR=\frac{L(T_2)}{100\text{M}}$$

onde $L(T_2)$, el numerador, es la cuantía total de declaraciones de érdidas en T_2 asociadas a la ocurrencia de catástrofes en el periodo $),T_1]$ y el denominador es 100 millones de dólares.

e define $L(T_2)$ como la suma de tres componentes:

$$L(T_2)=L^1(T_2)+L^2(T_2)+L^3(T_2)=\sum_{i=1}^{3}L^i(T_2) \qquad [2.8]$$

donde:

- $L^1(T_2)$ es la cuantía total de declaraciones de pérdidas en T_2 asociada a las catástrofes de pequeña cuantía ocurridas en $[0,T_1]$ y que, por hipótesis, se declaran instantáneamente,

$$L^1(T_2)=\sum_{j=1}^{N^1(T_1)}S_j^1(t)=\sum_{j=1}^{N^1(T_1)}k_j^1 \qquad [2.9]$$

- $L^2(T_2)$ es la cuantía total de declaraciones de pérdidas en T_2 asociada a las catástrofes de cuantía media ocurridas en $[0,T_1]$,

$$L^2(T_2)=\sum_{j=1}^{N^2(T_1)}S_j^2(t)=\sum_{j=1}^{N^2(T_1)}k_j^2\left[1-e^{-\alpha^2\left(T_2-t_j^2\right)}\right] \qquad [2.10]$$

- $L^1(T_2)$ es la cuantía total de declaraciones de pérdidas en T_2 asociada a las grandes catástrofes ocurridas en $[0,T_1]$,

$$L^3(T_2)=\sum_{j=1}^{N^3(T_1)}S_j^3(t)=\sum_{j=1}^{N^3(T_1)}k_j^3\left[1-e^{-\alpha^3\left(T_2-t_j^3\right)}\right] \qquad [2.11]$$

Sustituyendo las expresiones $[2.9]$, $[2.10]$ y $[2.11]$ en la suma $[2.8]$, la variable $L(T_2)$ resulta:

$$L(T_2)=\sum_{j=1}^{N^1(T_1)}k_j^1+\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=1}^{N^i(T_1)}k_j^i\left[1-e^{-\alpha^i\left(T_2-t_j^i\right)}\right] \qquad [2.12]$$

La determinación de $L(T_2)$ se ha efectuado en el momento inicial del proceso. Interesa ahora determinar cómo se modifica su distribución de probabilidad cuando, con el paso del tiempo, se llega al instante *t* y se incorpora la información disponible referente a las catástrofes que ya han ocurrido en el intervalo $[0,t]$. Con este objetivo se define la variable aleatoria $L^*(T_2)$ que incluye la posible historia sobre atástrofes del intervalo $[0,t]$. Para obtener esta variable aleatoria ondicionada se calcula, en primer lugar, la cuantía total de pérdidas n cualquier momento t del intervalo $[0,T_2]$, $L(t)$, que es el ondicionante de $L(T_2)$.

:onsiderando que este intervalo $[0,T_2]$ está dividido en dos ubintervalos de valoración, $[0,T_1]$ y $(T_1,T_2]$, el valor de $L(t)$ es:

$$.(t)=L^1(t)+\sum_{i=2}^{3}L^i(t)=\sum_{j=1}^{N^1(min\{t,T_1\})}k_j^1+\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=1}^{N^i(min\{t,T_1\})}k_j^i\left[1-e^{-\alpha^i(t-t_j^i)}\right] \quad [2.13]$$

)eterminada $L(t)$, su introducción en la variable $L(T_2)$ se realiza escomponiendo la variable aleatoria condicionada en la suma de dos ariables independientes de forma que:

Si $t\in[0,T_1]$,

$$L^*(T_2)=L_1(T_2)+L_2(T_2) \quad [2.14]$$

donde $L_1(T_2)$ incluye las pérdidas correspondientes a las catástrofes ocurridas en $[0,t]$ y por tanto el condicionante, y $L_2(T_2)$ incluye las pérdidas asociadas a las catástrofes que pueden ocurrir a partir de t y hasta T_1.

Si $t\in(T_1,T_2]$,

$$L^*(T_2)=L_1(T_2) \quad [2.15]$$

ya que no pueden incorporarse nuevas catástrofes a la ratio de siniestralidad.

n general, la expresión de la componente $L_1(T_2)$ para cualquier ıstante t del periodo de formación de la ratio de siniestralidad, $[0,T_2]$, :sulta:

$$L_1(T_2)=\sum_{i=1}^{3}L_1^i(t)=$$

$$=\sum_{j=1}^{N^1(\min\{t,T_1\})}k_j^1+\sum_{i=2}^{3}\left[\sum_{j=1}^{N^i(\min\{t,T_1\})}\left(k_j^i/L^i(t)\right)-\left[\sum_{j=1}^{N^1(\min\{t,T_1\})}\left(k_j^i/L^i(t)\right)-L^i(t)\right]e^{-\alpha^i(T_2-t)}\right] \quad [2.16]$$

En el caso $t\leq T_1$ se obtiene la variable $L_2(T_2)$, que no depende de la cuantía $L(t)$ por ser el número de catástrofes un proceso de Poisson con incrementos independientes,

$$L_2(T_2)=\sum_{i=1}^{3}L_2^i(T_2)=\sum_{h=1}^{N^1(T_1-t)}k_h^1+\sum_{i=2}^{3}\sum_{h=1}^{N^i(T_1-t)}k_h^i\left[1-e^{-\alpha^i(T_2-t_h^i)}\right] \quad [2.17]$$

siendo $t_h^i=t+\sum_{w=1}^{h}t_w^{'i}$ y $t_w^{'i}\rightarrow Exp(\lambda^i)$.

Al realizar una estimación de la ratio de siniestralidad en el momento $t<T_2$ se considera la distribución de la cuantía total de declaraciones condicionada al valor $L(t)$, que incorpora la historia de las catástrofes ocurridas en $[0,t]$ dada por la suma $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{N^i(t)}k_j^i$ resultando entonces que si $t\leq T_1$, $L_1(T_2)$ es un valor cierto y la única aleatoriedad de $L^*(T_2)$ es debida a la componente $L_2(T_2)$ que determina el futuro y no se ve afectada por el condicionante. Por el contrario, si $t>T_1$ la cuantía $L^*(T_2)$ es siempre un valor cierto porque $L_2(T_2)\equiv 0$.

3. INCORPORACIÓN DEL PROCESO DE WIENER EN EL MODELO

A través de un proceso de Wiener se incorpora la aleatoriedad en el proceso que describe la dinámica de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, dando lugar a la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dR_j^i(t) = -\alpha^i R_j^i(t)dt + \sigma^i R_j^i(t)dw_j^i\left(t - t_j^i\right) \quad \text{con } i = 2{,}3 \qquad [3.1]$$

:on $t_j^i \in [0, T_1]$ y $t \in \left[t_j^i, T_2\right]$

/ donde:

α^i es la tasa instantánea de declaración de siniestros que representa la tendencia del proceso.

σ^i es una constante que representa la volatilidad del proceso.

$w_j^i\left(t - t_j^i\right)$ es un proceso de Wiener estándar asociado a la catástrofe del tipo i ocurrida en el momento t_j^i.

:l proceso de Wiener recoge las diferencias en cuanto a la intensidad e declaración de los siniestros porque cada catástrofe tiene aracterísticas propias no explicitadas en el modelo. Se considera que l ritmo de la declaración de los siniestros asociados es diferente para ada una de las catástrofes que se producen. En el modelo se refleja ste hecho, considerando perturbaciones diferentes a través de rocesos de Wiener independientes.

erturbar la tasa de declaración de siniestros con un ruido blanco npliado por σ^i puede provocar un crecimiento temporal de la cuantía : siniestros pendiente de declarar, $R_j^i(t)$, debido a la relación inversa ie se ha definido en dicha variable. Es decir, en un momento del :mpo, la cuantía de siniestros pendiente de declarar sería más grande ie la cuantía de siniestros pendiente de declarar en el momento

anterior. Esto puede suceder en el caso en que, después de realizadas las declaraciones de siniestros, la tasación de los peritos dé lugar a valoraciones de pérdidas inferiores a las estimadas inicialmente.

Por ello, la incorporación de la aleatoriedad mediante un proceso de Wiener únicamente es válida para valores de σ^i lo suficientemente pequeños de tal forma que la probabilidad de que la cuantía de siniestros pendiente de declarar fuese creciente, sea prácticamente despreciable.

Para resolver [3.1] se aplica el lema de Itô a la transformación $y = \ln R_j^i(t)$ [Devolder, P. (1993)], de donde se obtiene:

$$R_j^i(t) = k_j^i e^{-\left(\alpha^i + \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t - t_j^i\right) + \sigma^i w_j^i\left(t - t_j^i\right)} \qquad [3.2]$$

resultado que coincide con [2.5] cuando $\sigma^i = 0$.

A partir de la relación definida en el modelo entre las variables $R_j^i(t)$ y $S_j^i(t)$, y considerando [3.2], la cuantía declarada de siniestros hasta t, $S_j^i(t)$, se obtiene como sigue:

$$S_j^i(t) = k_j^i \left[1 - e^{-\left(\alpha^i + \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t - t_j^i\right) + \sigma^i w_j^i\left(t - t_j^i\right)}\right] \qquad [3.3]$$

Para las catástrofes de pequeña cuantía, $i = 1$:

$$R_j^i(t) = 0 \qquad S_j^i(t) = k_j^i \qquad \forall t \in \left[t_j^i, T_2\right] \text{ con } i = 1$$

3.1 Cálculo de $L(T_2)$

Igual que en la versión cierta del modelo, la variable $L(T_2)$ se define como la suma de tres componentes dando lugar, en este caso, a la siguiente expresión:

$$L(T_2)=\sum_{i=1}^{3} L^i(T_2)=\sum_{j=1}^{N^1(T_1)} k_j^1+\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=1}^{N^i(T_1)} k_j^i\left[1-e^{-\left(\alpha^i+\frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)(T_2-t_j^i)+\sigma^i w_j^i(T_2-t_j^i)}\right] \quad [3.4]$$

3.2 Cálculo de $L(t)$

Siguiendo la metodología utilizada en el modelo determinista de declaración de siniestros, se obtiene la información disponible acerca de las declaraciones de siniestros realizadas hasta t, $L(t)$, condicionante de $L(T_2)$, resultando:

$$L(t)=L^1(t)+\sum_{i=2}^{3} L^i(t)=\sum_{j=1}^{N^1(\min\{t,T_1\})} k_j^1+\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=1}^{N^i(\min\{t,T_1\})} k_j^i\left[1-e^{-\left(\alpha^i+\frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)(t-t_j^i)+\sigma^i w_j^i(t-t_j^i)}\right] \quad [3.5]$$

3.3 Cálculo de $L^*(T_2)$

Para incorporar el condicionante $L(t)$ en la cuantía total de declaraciones de pérdidas al final del periodo de formación de la ratio de siniestralidad, T_2, se divide la variable aleatoria condicionada $L^*(T_2)$ en la suma de dos componentes, $L_1(T_2)$ y $L_2(T_2)$.

La componente $L_1(T_2)$ para cualquier $t\in[0,T_2]$ tiene la siguiente expresión:

$$L_1(T_2)=\sum_{i=1}^{3} L_1^i(T_2)=\sum_{j=1}^{N^1(\min\{t,T_1\})} k_j^1+$$
$$+\sum_{i=2}^{3}\left[L^i(t)+\sum_{j=1}^{N^i(\min\{t,T_1\})}\left(k_j^i/L^i(t)\right)\left[1-e^{-\left(\alpha^i+\frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)(T_2-t)+\sigma^i w_j^i(T_2-t)}\right]e^{-\left(\alpha^i+\frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)(t-t_j^i)+\sigma^i w_j^i(t-t_j^i)}\right] \quad [3.6]$$

$L_1(T_2)$ incorpora la aleatoriedad del proceso de declaraciones en el intervalo $(t,T_2]$ que se produce como consecuencia de la introducción del proceso de Wiener y que, por tanto, no se producía en el modelo continuo determinista de evolución de las declaraciones de pérdidas.

En el caso $t\le T_1$, la componente $L_2(T_2)$ es:

$$L_2(T_2)=\sum_{i=1}^{3} L_2^i(T_2)=\sum_{h=1}^{N^1(T_1-t)} k_h^1+\sum_{i=2}^{3}\sum_{h=1}^{N^i(T_1-t)} k_h^i\left[1-e^{-\left(\alpha^i+\frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)(T_2-t_h^i)+\sigma^i w_h^i(T_2-t_h^i)}\right], \quad [3.7]$$

con $t_h^i=t+\sum_{w=1}^{h} t_w'^i$ y $t_w'^i \to Exp(\lambda^i)$.

4. REVISIÓN DE LOS MODELOS

Se señalan a continuación las diferencias básicas que separan al modelo continuo propuesto en este trabajo de los modelos de valoración preexistentes, realizando una comparación de los efectos derivados de asumir las respectivas hipótesis sobre las cuales se asientan.

En cuanto a las diferencias referentes a las hipótesis sobre la ocurrencia de las catástrofes, tanto Cummins y Geman (1995) como Geman y Yor (1997) suponen que la cuantía total de las grandes catástrofes es un valor constante e igual para cada una de ellas, esto es, k o θ respectivamente.

En el modelo propuesto, se clasifican las catástrofes en tres categorías en función de su magnitud, k_j^i con $i=1,2,3$ y se supone que dichas cuantías son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas dentro de cada grupo i y con diferente distribución según el tipo de catástrofe que se produzca.

Por otra parte, en los tres modelos considerados, el número de catástrofes se representa a través de distribuciones de Poisson, pero en nuestro caso, al realizar una clasificación tripartita de las catástrofes, se definen tres distribuciones de Poisson independientes con parámetros distintos para cada una de ellas. Este hecho, deriva en la utilización de distribuciones exponenciales para formalizar el tiempo de interocurrencia entre dos catástrofes consecutivas del mismo tipo.

Respecto a las hipótesis sobre la dinámica de la declaración de siniestros, Cummins y Geman (1995), que desarrollan un modelo para valorar los contratos de futuros *CAT*, definen la variable $S(t)$ como el proceso de reclamaciones instantáneo, esto es, $S(t)$ determina la cuantía total de las declaraciones de siniestros por unidad de tiempo, y a partir de dicha cuantía calculan el total de declaraciones de siniestros en $T, L(T)$. En este modelo, la dinámica de $S(t)$ tiene dos comportamientos diferentes según el trimestre considerado. Así, en el trimestre de pérdidas, la evolución de $S(t)$ se representa a través de un proceso browniano geométrico, con tendencia α que describe la aleatoriedad en las declaraciones de siniestros y las pequeñas catástrofes. En este trimestre, un proceso de Poisson describe la posibilidad de ocurrencia de grandes catástrofes,

$$dS(t)=S(t^-)\left[\alpha dt+\sigma d\tilde{w}(t)\right]+k dN(t)$$

En el trimestre *run-off*, la evolución de $S(t)$ sigue por un proceso browniano geométrico, con tendencia α', que representa la aleatoriedad en el ritmo de las declaraciones,

$$dS(t)=S(t)\left[\alpha' dt+\sigma d\tilde{w}(t)\right]$$

Determinado el comportamiento de la siniestralidad instantánea, la cuantía total de las pérdidas al final del periodo contemplado en el contrato, $L(T)$, se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$L(T)=\int_0^T S(s)ds$$

En el modelo de Geman y Yor (1997), los autores representan la dinámica del subyacente de las opciones *PCS*: la cuantía total de declaraciones, $L(t)$, y consideran dos evoluciones diferentes para esta cuantía en cada uno de los periodos diferenciados en el contrato. En el periodo de pérdidas, $[0,T_l]$, $L(t)$ sigue un *Poisson-diffusion process* cuya ecuación diferencial estocástica es:

$$dL(t)=S(t)dt+\theta dN(t)$$

donde $S(t)$ es un proceso browniano geométrico que describe la aleatoriedad de las declaraciones de siniestros, $N(t)$ un proceso de Poisson, de intensidad α, representativo de las grandes catástrofes y θ una constante positiva que indica la magnitud de los saltos provocados por la ocurrencia de grandes catástrofes.

En el periodo de desarrollo, $(T_l,T]$, la dinámica de $L(t)$ se representa mediante un proceso browniano geométrico a través de $S(t)$, con parámetros de tendencia y volatilidad diferentes a los que caracterizan el periodo de pérdidas,

$$dL(t)=S(t)dt$$

A la vista de los trabajos existentes, y en lo referente a la evolución del subyacente, creemos que el modelo alternativo planteado se adapta con mayor precisión a la realidad del proceso objeto de estudio. Las razones argumentadas al respecto pueden resumirse como sigue: en los modelos precedentes, se asume un proceso geométrico de Wiener para formalizar la tasa de crecimiento en las declaraciones. Esta hipótesis, lleva implícita un crecimiento exponencial, en promedio, de la declaración instantánea de siniestros dentro del intervalo temporal considerado. Este planteamiento agregado en cuanto al comportamiento de la velocidad de declaración de los siniestros no se corresponde con una distribución más o menos uniforme de la ocurrencia de los mismos dentro de un intervalo temporal concreto, pues es difícil entender que el proceso de agregación sea exponencial y no lineal. Por ello, el modelo aquí sistematizado se basa en una hipótesis de evolución individual de cada una de las catástrofes sobrevenidas, como se expone a continuación.

El modelo continuo desarrollado, tanto cierto como aleatorio, considera que la cuantía total de una catástrofe, k_j^i, es la suma de la cuantía declarada de siniestros en t, $S_j^i(t)$, y de la cuantía de siniestros pendiente de declarar en ese momento, $R_j^i(t)$ variable fundamental en el proceso de formalización del modelo. En la versión cierta del mismo, se representa su evolución a través de la ecuación diferencial ordinaria [2.4] que describe un decrecimiento temporal de la cuantía de siniestros pendiente de declarar a razón de la tasa instantánea de declaración de siniestros.

Para perturbar la tasa instantánea de declaración se utiliza un proceso de Wiener, resultando la ecuación diferencial estocástica [3.1].

Las dos ecuaciones diferenciales empleadas para representar la dinámica de $R_j^i(t)$, están definidas únicamente para las catástrofes de cuantía media y de gran cuantía, $i=2,3$. Las catástrofes del tipo $i=1$ son consideradas catástrofes de pequeña cuantía. En este punto, la contribución a la mejora de los modelos previos es considerar que este tipo de catástrofes de pequeña cuantía se declaran instantáneamente en el momento en que se producen y, por tanto, la cuantía de siniestros pendiente de declarar asociada a dichas catástrofes siempre será cero (podrían generalizarse las ecuaciones diferenciales para cualquier tipo de catástrofe, atribuyendo un valor infinito a la tasa de declaración de siniestros asociada a las catástrofes del tipo $i=1$).

En la versión aleatoria del modelo continuo, se resuelve la ecuación diferencial estocástica [3.1] mediante la aplicación del lema de Itô, resultando el proceso estocástico que determina la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t asociado a una determinada catástrofe dado por la expresión [3.2].

La cuantía de siniestros declarada, $S_j^i(t)$, se obtiene en la expresión [3.3] como la diferencia entre la cuantía total de la catástrofe, k_j^i y la cuantía de siniestros pendiente de declarar asociada a dicha catástrofe, $R_j^i(t)$.

$R_j^i(t)$ es una variable aleatoria cuya distribución dependerá de la distribución de probabilidad de la cuantía total de la catástrofe, k_j^i. Si, al igual que en los modelos previos, se hace la hipótesis de que dicha cuantía total es un valor constante, la variable aleatoria $R_j^i(t)$ seguirá una distribución lognormal, siendo los parámetros de la distribución normal asociada,

$$N\left(\ln k_j^i - \left(\alpha^i + \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t - t_j^i\right) \sigma^i \sqrt{t - t_j^i}\right) .$$

Esto supone que, en promedio, el importe de las declaraciones de siniestros pendiente de declarar muestre, en el tiempo, un decrecimiento exponencial asintótico al eje de abscisas y, consecuentemente, la cuantía declarada de siniestros crezca asintoticamente a k_j^i,

$$E\left[R_j^i(t)\right] = k_j^i e^{-\alpha^i\left(t - t_j^i\right)} \qquad E\left[S_j^i(t)\right] = k_j^i\left[1 - e^{-\alpha^i\left(t - t_j^i\right)}\right]$$

La cuantía total de las declaraciones en T_2, $L(T_2)$, se determina mediante la convolución de la cuantía de siniestros declarada hasta T_2 asociada a cada una de las catástrofes por separado.

5. CONCLUSIONES

El modelo continuo propuesto simplifica el cálculo de la variable fundamental de la ratio de siniestralidad considerada, $L(T_2)$. Dicho modelo permite, en primer lugar, clasificar las catástrofes y estimar estadísticamente los parámetros correspondientes a las distribuciones de la cuantía de dichas catástrofes. Como ampliación de los modelos previos, se considera que además de ser aleatorio el número de catástrofes también lo es la cuantía de cada una de ellas. Esta última hipótesis da lugar a clasificar las catástrofes en tres categorías. No obstante, la parte central del modelo continuo desarrollado es la definición de la dinámica de las declaraciones de siniestros basada en un crecimiento proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar a razón de la tasa instantánea de declaración de siniestros.

Posteriormente, para adaptar mejor esta tasa a la realidad que presenta factores irregulares en el comportamiento a lo largo del tiempo, se incorpora en dicha tasa una perturbación de ruido blanco planteando la correspondiente ecuación diferencial estocástica. La obtención del total de declaraciones al final del periodo considerado se ha obtenido por agregación como se resume en las expresiones [2.12] y [3.4] que hacen referencia a $L(T_2)$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Alegre, A.; Badia, C.; Pérez, M.J. (1997). "Un modelo para la valoración de contratos de futuros sobre riesgos catastróficos", *en: Activos Derivados. Matemática de las operaciones financieras '97.* Publicaciones de la Universidad de Barcelona. Barcelona. pp. 691-712.

[2] Alcántara, F. (1999). "Las PCS Catastrophe Insurance Options como coberturas alternativas al reaseguro tradicional para riesgos extraordinarios". *Actuarios*, mayo-junio, pp. 47-55.

[3] Board of Trade of the City of Chicago. (1995). *PCS Options. A User's Guide. C.B.O.T.* Chicago.

[4] Cummins, D.; Geman, H. (1995). "Pricing catastrophe insurance futures and call spreads: An arbitrage approach", *en: Actuarial approach for financial risk, 5 AFIR International Congress,* Bruxelles, Vol. 3, pp.45-80.

[5] Devolder, P. (1993). Finance Stochastique. Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles (Belgique).

[6] Durá Peiró, J.M.; López Cuñat , J.M. (1988). *Fundamentos de estadística.* Ariel Economía. Barcelona.

[7] Geman, H.; Yor, M. (1997). "Stochastic time changes in catastrophe option pricing". *Insurance: Mathematics and economics,* Vol 21, pp. 185-193.

[8] Hossack, I. B.; Pollard, J.; Zehnwirth, B. (1983). *Introductory statistics with applications in general insurance.* Cambridge University Press. London.

[9] Pérez, M. J. (2000). "Definiciones alternativas de evolución del ratio de siniestralidad subyacente en los contratos de activos derivados sobre riesgos catastróficos", *en: La cobertura aseguradora como Instrumento financiero de reconstrucción. Las consecuencias económicas de las catástrofes naturales. Prevención y seguro.* Consorcio de Compensación de Seguros. Madrid.