FRANQUICIAS ESTOCÁSTICAS

Angel Vegas Montaner. Universidad de Alcalá. angel.vegas@uah.es
Roberto Escuder Vallés. Universidad de Valencia. Roberto.Escuder@uv.es
Julián Oliver Raboso. Universidad Pontificia Comillas. julian@joliver.es

RESUMEN: El presente trabajo constituye la segunda parte del que lleva por título "Franquicias Estadísticas y Estocásticas" que por su extensión dividimos en las partes naturales que lo constituyen, si bien con una total unidad expositiva. En este artículo se analizan diversos modelos de probabilidad para la tarificación de seguros con franquicias. Es un problema tradicional en la práctica diaria de las compañías de seguros generales la no aplicación en muchas ocasiones de modelos adecuados para el cálculo de franquicias en virtud de supuestas dificultades que el desarrollo de programas informáticos ampliamente extendidos hacen, en los momentos actuales, de extremada facilidad utilizar. El presente trabajo pretende, con una visión evidentemente práctica, poner a disposición de los actuarios que operan en los departamentos técnicos y comerciales de las compañías de seguros de sencillas herramientas estadísticas que les permitan, con fundamento técnico, tarificar tales tipos de seguros con franquicia. En concreto, se plantea la aplicación de los modelos exponencial, gamma y lognormal para tarificar franquicias absolutas y mixtas, desarrolladas todas a través de Visual Basic para Excel. La estructura del trabajo es modular, es decir, pretende ser auto comprensivo, por lo que introduce conceptos como las distribuciones de probabilidad consideradas y su inferencia que podrían ser obviados por elementales, pero que pensamos hacen más útil nuestro trabajo para sus lectores si se presentan de manera básica.

PALABRAS CLAVE: Seguros Generales, Franquicias, Franquicias Absolutas y Mixtas, Modelos estadísticos, Distribución Exponencial, Distribución Gamma, Distribución Lognormal, Visual Basic, Excel.

1.- INTRODUCCIÓN

Entenderemos por ***franquicias estocásticas*** las obtenidas mediante métodos probabilísticos, que nos permitan determinar el descuento técnico que podría incluirse en la tarifa como consecuencia de la introducción del correspondiente tipo de franquicia, a partir de hipótesis sobre la ***distribución de probabilidad*** que modeliza, de la manera más adecuada, la distribución del coste de un siniestro (la distribución *subyacente* en el fenómeno de la siniestralidad).

Es clásica la dialéctica entre los modelos empíricos y los modelos teóricos, sobre su bondad relativa y conveniencia. Para describir esta dicotomía, acudamos a las acertadas palabras de Hossack *et al*[1]: "Cuando los datos disponibles son muy abundantes y han sido recogidos de la forma más apropiada para su tratamiento, resulta factible hacer frente a la mayoría de las cuestiones planteadas en la práctica de los seguros generales, sin más que utilizar las distribuciones empíricas. Sin embargo, más frecuentemente nos encontramos en la situación en la cual la base de datos dista de ser abundante y además no encontrarse en la forma más conveniente para su tratamiento. En tales ocasiones, sólo es posible efectuar cálculos si se admiten determinadas hipótesis. En otras palabras, se formula un modelo y se hace uso de las distribuciones teóricas. Las distribuciones descritas en este capítulo son muy útiles en esta tarea. Incluso cuando la base de datos es amplia, las distribuciones teóricas son todavía esenciales (por ejemplo, para estimar la dimensión de la cola extrema de la distribución del coste de un siniestro, a efectos de cálculo de las primas de reaseguro)". Concluyendo: "Otros elementos que otorgan especial importancia a tales distribuciones teóricas son:

1.- Sus convenientes y bien conocidas ***propiedades***, que facilitan el análisis de muchos problemas (por ejemplo, el Teorema Central del Límite; la propiedad aditiva de variables aleatorias de Poisson independientes);

---

[1] HOSSACK, I.B. , POLLARD J.H. y ZEHNWIRTH, B. (2.001). *Introducción a la Estadística con aplicaciones a los Seguros Generales*. Ed. MAPFRE.
http://www.mapfre.com/fundaciones/es/FundacionMapfreEstudios/publicaciones/pu_libros/pu_libros_FME/pu_libros_seguros31.shtml?idm=0900ab3781865139&seccion=publicaciones/pu_libros&ruta=Publicaciones|Libros&titulo2=null&categoria=null
Ep. 5.10.- *La importancia de las distribuciones teóricas en los seguros generales*. Pag. 112-113.

2.- El hecho de que la distribución se encuentre totalmente definida a través de un ***pequeño número de parámetros*** (uno en el caso de Poisson y exponencial; dos en el caso de la normal, lognormal, gamma, Pareto y binomial negativa) y no sea necesario operar con una extensa tabla de frecuencias observadas;

3.- El hecho de que dichas distribuciones nos permiten efectuar ***inferencias*** acerca del comportamiento de las ***carteras de seguros***;

4.- Su conveniencia para el trabajo matemático conducente al desarrollo de útiles propiedades teóricas (Teoría del Riesgo).

Por todas estas razones, las ***distribuciones teóricas de probabilidad*** son herramientas preferibles a las distribuciones empíricas de frecuencias en muchas ocasiones prácticas".

¿Cuáles son las ***distribuciones de probabilidad*** que más nos van a interesar en nuestro análisis de las franquicias?. Como indicábamos antes, las que modelicen, de la manera más adecuada, la ***distribución del coste de un siniestro***. Diversos autores han tratado con extensión y profundidad esta importante cuestión, tanto desde el punto de vista general (Klugman[2] y, más recientemente, Kleiber[3]) como desde el específico de las franquicias (Ferrara[4], Hickerstaff[5], Benckert[6], Strauss[7], Mack[8], etc.). Nosotros centraremos nuestro análisis en ***tres*** modelos: La ***distribución exponencial***, la ***distribución gamma*** y la ***distribución logarítmico-normal*** o ***lognormal***. En realidad, la ***distribución exponencial*** es un caso particular de ***distribución***

---

[2] - HOGG, Robert V. y KLUGMAN, Stuart A. (1.984). *Loss Distributions*. Ed. WILEY.
- KLUGMAN, Stuart A., PANJER, Harry H. y WILLMOT, Gordon E. (1.998). *Loss Models. From Data to Decisions*. Ed. WILEY.

[3] KLEIBER, Chistian y KOTZ, Samuel (2.003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*. Ed. WILEY.

[4] FERRARA, Giovanna (1.971). *Distributions des Sinlstres Incendie Selon leur Cout*. The ASTIN Bulletin. Vol. 6. Pag. 31-41.

[5] HICKERSTAFF, David R. (1.972). *Automobile Collision Deductibles and Repair Cost Groups: The Lognormal Model*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. Pag 68-102.

[6] BENCKERT, Lars-Gunnard y JUNG, Jan (1.974). *Statistical Models of Claim Distributions in Fire Insurance*. The ASTIN Bulletin. Vol. 8.1. Pag. 1-25.

[7] STRAUSS, J. (1.975). *Deductibles in Industrial Fire*. The ASTIN Bulletin. Vol. 8.2. Pag. 378-393.

[8] - MACK, Thomas (1.983). *The Utility of Deductibles from the Insurer's Point of View*. ASTIN Colloquium Lindau.
- MACK, Thomas (1.984). *Premium Calculation for Deductible Policies with an Aggregate Limit*. The ASTIN Bulletin. Vol. 14.2. Pag. 105-121.

gamma, pero esa es una mera propiedad matemática. Vamos a hacer un breve inventario de los aspectos fundamentales para el trabajo con estas distribuciones.

2.- DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD BÁSICAS

2.1.- DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

La *distribución exponencial* viene caracterizada porque su función de supervivencia es exponencial negativa:

$$\boxed{\overline{F}(x;\alpha) = P\left(X > x\right) = e^{-\alpha x} \quad , \text{ siendo } \; x > 0; \alpha > 0}$$

Por tanto, su *función de densidad* será también exponencial negativa (y en cuanto tal, monótona decreciente):

$$\boxed{f(x;\alpha) = \alpha\, e^{-\alpha x} \quad , \text{ siendo } x > 0; \alpha > 0}$$

El hecho de que esta *función de densidad* sea monótona decreciente tiene el *inconveniente* inicial de que *no se ajusta* de manera adecuada al perfil de la *curva teórica de coste de un siniestro*, que tendrá al menos un *máximo* (moda) en valores de siniestro inferiores a la media (por ser asimétrica positiva en la generalidad de los casos) a partir del cual la curva se transmutará de cóncava a convexa y a partir de entonces es cuado nuestra función monótona tendría la posibilidad de ser un buen modelo. Sin embargo, apreciaremos en la práctica que este inconveniente no resulta decisivo, en contra de una evidente *ventaja* que es su gran *simplicidad* (depende de ***un solo parámetro***) y por tanto aplicabilidad.

La inferencia del modelo es sencilla. En efecto, su esperanza matemática (*coste probable de un siniestro*) es:

$$\boxed{\overline{c} = E(X) = \frac{1}{\alpha}}$$

Por tanto, el *estimador por momentos* del parámetro α (único del que depende) es el *recíproco* de la *media muestral de siniestros*:

$$\boxed{\hat{\alpha} = \frac{1}{\overline{x}}}$$

Dicho estadístico también es el *estimador por máxima verosimilitud* de α, por lo que no hay duda de cómo proceder en la obtención de este modelo.

La *varianza* de esta distribución es:

$$\boxed{Var(X) = \frac{1}{\alpha^2}}$$

2.2.- DISTRIBUCIÓN GAMMA

La *distribución gamma* viene caracterizada porque su *función de densidad* es potencial-exponencial:

$$\boxed{f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\ , \text{siendo } x > 0, \alpha, \beta > 0}$$

Es decir, su función de densidad es *directamente proporcional* a la función *potencial* $x^{\alpha-1}$ e *inversamente proporcional* a la función *exponencial* $e^{\beta x}$ (la constante $\beta^{\alpha}/\Gamma(\alpha)$ únicamente viene a garantizar que la anterior función es una auténtica función de densidad, es decir, que su integral entre 0 e ∞ es uno). Dicha función es, por tanto, una indeterminación del tipo ∞/∞ cuando $x \to \infty$, que de hecho, no lo es por ser el orden de divergencia de la exponencial superior al de la potencial. Por tanto, además de ser una función adecuada para modelizar el coste de un siniestro por estar definida para valores positivos de la variable, presentar un máximo y ser asimétrica positiva, goza de la fundamental virtud de trabajar con esos dos parámetros, $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ y $\underline{\boldsymbol{\beta}}$, que son como dos *flaps* que nos permiten *aterrizar* ***más lejos*** (ramo de *cola larga* – ***long tail*** o ***heavy tail***, *responsabilidad civil del automóvil*, por ejemplo) o ***más cerca*** (ramo de *cola corta* – ***short tail***, *daños al propio vehículo*, por ejemplo). Para el primer caso, *incrementamos* el valor de $\boldsymbol{\alpha}$ y *reducimos* el de $\boldsymbol{\beta}$. Para el segundo, *disminuimos* el valor de $\boldsymbol{\alpha}$ e *incrementamos* el de $\boldsymbol{\beta}$. Por tanto, con sólo dos parámetros nos ajustamos a una amplísima gama de situaciones reales, lo que conduce a la *distribución gamma* al papel estelar que desempeña en la estadística actuarial.

Por no hablar de su rol como distribución del parámetro λ de la distribución de Poisson mixta en el caso de una distribución binomial negativa, y la trascendencia de esta propiedad en los sistemas bonus-malus clásicos basados en la frecuencia de siniestralidad.

O por no hablar de su rol en relación con la *distribución exponencial*, al ser la convolución de exponenciales una gamma. En efecto, la distribución exponencial es un *caso particular* de distribución gamma, una *gamma de un parámetro*:

$$\boxed{\begin{cases} -\ Gamma(\alpha,\beta):\ f(x)=\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\ ,\ x>0 \\ -\ \text{Si } \alpha=1 \Rightarrow\ Exp(\beta):\ f(x)=\beta e^{\ \beta x} \end{cases}}$$

Pues bien, la *convolución* de *n variables Exp*(α) es una *variable gamma* $\Gamma(n,\alpha)$. Esta propiedad es relevante en la Teoría del Riesgo.

Como vemos, la *distribución gamma* tiene una importancia muy grande en muchos ámbitos de la matemática actuarial. En nuestro caso, la estimación de franquicias a través de dicho modelo será una de las aplicaciones relevantes.

Los *momentos* fundamentales de la distribución gamma serán:

$$\begin{cases} \text{Media: } E(X) = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ \text{Varianza: } Var(X) = \dfrac{\alpha}{\beta^2} \end{cases}$$

Por tanto, los *estimadores por momentos* de los parámetros α y β son:

$$\hat{\alpha} = \frac{\overline{x}^2}{s^2}$$
$$\hat{\beta} = \frac{\overline{x}}{s^2} = \frac{\hat{\alpha}}{\overline{x}}$$

Los *estimadores por máxima verosimilitud* de los parámetros α y β son:

$$\sum_{k=0}^{n} n_k \left(\frac{1}{\alpha} + \ldots + \frac{1}{\alpha + k - 1} \right) = \sum_{k=0}^{n} n_k \log\left(1 + \frac{\overline{x}}{\alpha}\right)$$
$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\alpha}}{\overline{x}}$$

La dificultad evidente de resolver la primera ecuación para obtener el estimador de α hace que siempre se utilicen en esta distribución los estimadores por momentos.

2.3.- DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

Diremos que la *variable aleatoria* ξ sigue una *distribución logarítmico-normal* o *lognormal* $LN(\mu,\sigma)$ si su *logaritmo natural* sigue una *distribución normal* $N(\mu,\sigma)$:

$$\boxed{X : LN(\mu,\sigma) \Leftrightarrow Y = \ln X : N(\mu,\sigma)}$$

Por tanto, la *función de densidad* de la *distribución* $LN(\mu,\sigma)$ es:

$$\boxed{f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{para} \quad x>0;\sigma>0}$$

La anterior función de densidad es una función adecuada para modelizar el coste de un siniestro por estar definida para valores positivos de la variable, presentar un máximo y ser asimétrica positiva.

Los *momentos* fundamentales de la distribución lognormal serán:

$$\begin{cases} \text{Media: } E\left(X;\mu,\sigma^2\right) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} = \sqrt{e^{2\mu+\sigma^2}} \\ \text{Varianza: } Var\left(X;\mu,\sigma^2\right) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) \end{cases}$$

Dada la relación entre *media* y *varianza*, el *coeficiente de variación* juega un papel relevante en la inferencia del modelo:

$$\boxed{a = \frac{\sigma(X)}{E(X)} = \sqrt{e^{\sigma^2}-1}}$$

De donde, en función del coeficiente de variación:

$$\boxed{\sigma^2 = \ln\left(1+a^2\right)}$$

$$\boxed{\mu = \ln\frac{E(X)}{\sqrt{1+a^2}}}$$

Por tanto, los *estimadores por momentos* de los parámetros μ y σ^2 son:

$$\hat{\mu} = \ln\left(\frac{\bar{x}^2}{\sqrt{\bar{x}^2 + s^2}}\right) = \ln\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{1 + a^2}}\right)$$
$$\hat{\sigma}^2 = \ln\left[1 + \left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2\right] = \ln\left(1 + a^2\right)$$

que se pueden expresar de la siguiente forma en función de los dos primeros momentos con relación al origen:

$$\hat{\mu} = \ln \bar{x} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = 2 \ln \bar{x} - \frac{1}{2} \ln \hat{\alpha}_2$$
$$\hat{\sigma}^2 = \ln \hat{\alpha}_2 - 2 \ln \bar{x}$$

Los *estimadores por máxima verosimilitud* de los parámetros m y σ^2 son:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \hat{\mu})^2}{n}$$

es decir, como era lógico, *media* y *varianza* de la *muestra de los logaritmos de coste.*

3.- FRANQUICIA ABSOLUTA ESTOCÁSTICA

Si por $\underline{S}$ representamos la ***siniestralidad total*** que genera una póliza en el periodo de exposición al riesgo y por X_i el coste del eventual siniestro i-ésimo, se verificará que el coste que asume el asegurador por la contratación de una póliza en el ramo correspondiente es:

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

siendo N el número de siniestros en que ha incurrido dicha póliza en dicho periodo de cobertura. Evidentemente, N es una variable aleatoria, con lo que $\underline{S}$ es una suma de variables aleatorias en número aleatorio, es decir, un proceso estocástico. ¿Cuál es su *valor probable* (siniestralidad probable de la póliza, ***prima de riesgo*** si seguimos el principio de tarificación del valor esperado)?. Si suponemos que S es una convolución, es decir, que todas las variables sumandos X_i son *idénticamente distribuidas* y *estocásticamente independientes* entre sí – distribuciones *iid* - (esta condición no será necesaria para la esperanza matemática de la suma, si para la varianza), en virtud de la propiedad de la media de las variables condicionadas

$$\boxed{E(X) = \underset{Y}{E}\left[E(X/Y)\right]}$$

se verificará que:

$$\boxed{\begin{aligned} E(S) &= \underset{N}{E}\left[E(S/N)\right] = \underset{N}{E}\left[NE(X_i)\right] = \\ &= \underset{N}{E}\left[N\overline{c}\right] = \overline{c}\,\underset{N}{E}\left[N\right] = \overline{n}.\overline{c} \end{aligned}}$$

Por tanto, la ***prima de riesgo sin franquicia*** será el ***producto*** del ***número probable de siniestros*** $\overline{n}$ por el ***coste probable de un siniestro*** $\overline{c}$.

Una de las ventajas de trabajar con ***distribuciones de probabilidad*** es la posibilidad de utilizar la ***varianza*** de la distribución analizada, es decir, medir su dispersión, para valorar cómo afecta la introducción de la franquicia no sólo a la siniestralidad esperada por el asegurador, sino a su nivel de riesgo al otorgar la cobertura. Pues bien, para el cálculo de la varianza de S se hace preciso utilizar la propiedad de la varianza de las variables condicionadas:

$$\boxed{Var(X) = \underset{Y}{E}\left[Var(X/Y)\right] + \underset{Y}{Var}\left[E(X/Y)\right]}$$

Si suponemos no sólo que ***S*** es una convolución sino además que sigue una distribución de ***Poisson Compuesta No Ponderada***, es decir, que el *número de siniestros* sigue una *distribución de Poisson* con λ *no aleatorio*, resultaría:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
Var(S) &= \underset{N}{Var}\left[E(S/N)\right] + \underset{N}{E}\left[Var(S/N)\right] = \\
&= \underset{N}{Var}\left[NE(X_i)\right] + \underset{N}{E}\left[NVar(X_i)\right] = \\
&= \underset{N}{Var}\left[N\overline{c}\right] + \underset{N}{E}\left[N\left(c_2 - \overline{c}^2\right)\right] = \\
&= \overline{c}^2 \underbrace{\underset{N}{Var}(N)}_{Poisson} + \left(c_2 - \overline{c}^2\right)\underbrace{\underset{N}{E}(N)}_{Poisson} = \\
&= \overline{n}.\overline{c}^2 + \overline{n}.\left(c_2 - \overline{c}^2\right) = \overline{n}.c_2 = \overline{n}.\left(\sigma_c^2 + \overline{c}^2\right)
\end{aligned}
}
$$

Así pues:

$$\boxed{E(S) = \overline{n}.\overline{c}}$$

$$\boxed{Var(S) = \overline{n}.c_2 = \overline{n}.\left(\sigma_c^2 + \overline{c}^2\right)}$$

siendo c_2 el *momento de segundo orden con relación al origen* de la *distribución del coste de un siniestro*, en la que la *varianza* es σ^2_c.

Si suponemos ***S*** es una *convolución* que sigue una distribución de ***Poisson Compuesta Ponderada*** resultaría:

$$\boxed{E(S) = \overline{c} \cdot E(N) = \overline{c} \cdot E(\lambda)}$$

$$\boxed{Var(S) = c_2 \cdot E(\lambda) + \overline{c}^2 \cdot \sigma_\lambda^2}$$

En el caso de que ***S*** siga una distribución de ***Poisson Compuesta Ponderada con una gamma*** $\underline{\boldsymbol{\lambda : \Gamma(nh, h)}}$ resultaría:

$$\boxed{E(S) = \overline{c} \cdot \overline{n}}$$

$$\boxed{Var(S) = \overline{c} \cdot \left(c_2 + \frac{\overline{c}^2}{h} \right)}$$

Como hemos indicado anteriormente, supondremos que la introducción de una franquicia *no alterará* la distribución tanto del número de siniestros como del coste de cada uno de ellos, es decir, que dicha fórmula aseguradora no genera *fraude* de tal forma que sólo se modifica la *distribución* de quién soporta la carga siniestral, pero no la magnitud de la misma. Por tanto, desde el punto de vista del *asegurador* no se producirá modificación alguna en la frecuencia de siniestralidad esperada $\overline{n}$ (media con y sin franquicia) y sólo se modificará la distribución del coste de un siniestro (a su cargo), con la consiguiente modificación de momentos de la misma (coste probable, varianza, etc.).

Si representamos por $\overline{c}$ el ***coste probable de un siniestro sin franquicia*** y por $\overline{c}_A$[9] el ***coste probable a cargo del asegurador de un siniestro con franquicia absoluta*** A, el ***descuento técnico*** δ que correspondería a la introducción de tal franquicia sería:

$$\boxed{\delta = 1 - \frac{\overline{n} \cdot \overline{c}_A}{\overline{n} \cdot \overline{c}} = 1 - \frac{\overline{c}_A}{\overline{c}}}$$

Así pues, procede calcular $\overline{c}_A$ a efectos de estimar el ***descuento técnico*** δ que correspondería a la introducción de la franquicia absoluta $\underline{\boldsymbol{A}}$:

[9] Como tendremos ocasión de ver, la franquicia absoluta es importante no sólo en si sino por ser posible expresar los demás tipos de franquicias por combinaciones lineales de la expresión correspondiente a una franquicia absoluta. Por tanto, convendremos en representar por $\overline{c}_A$ al coste probable del siniestro a cargo del asegurador neto de franquicia absoluta A y, para las demás franquicias (F por ejemplo) representaremos dicho coste probable por $\overline{c}^F$, que de alguna forma se expresará en función de una franquicia absoluta $\overline{c}_F$.

$$\begin{aligned}\overline{c}_A &= \int_A^{\infty}(x-A)f(x)dx = \\ &= \int_A^{\infty} xf(x)dx - A\int_A^{\infty} f(x)dx = \\ &= \int_0^{\infty} xf(x)dx - \int_0^{A} xf(x)dx - A\int_A^{\infty} f(x)dx = \\ &= E(X) - E\left[X / X \in (0;A)\right] - A\overline{F}(A)\end{aligned}$$

Es decir, el *coste probable del siniestro a cargo del asegurador con franquicia A* es:

- el *coste probable sin franquicia*
- *menos* el *coste probable de siniestros* <u>(0;*A*)</u>
- *menos* la parte de *A € en siniestros* <u>≥*A*</u>

Esta expresión es de una gran lógica actuarial, por cuanto representa, el primer sustraendo, el representante en términos probables de todos los siniestros de cuantía inferior a A (y, en cuanto tal, no cubiertos por el asegurador) y el segundo sustraendo, la parte de A € no cubierta por el asegurador en los siniestros de cuantía superior a A.

Si operamos directamente con la expresión matemática del coste probable a cargo del asegurador de un siniestro con franquicia absoluta A obtenemos:

$$\begin{aligned}\overline{c}_A &= \int_A^{\infty}(x-A)f(x)dx = \\ &= \int_A^{\infty} xf(x)dx - A\int_A^{\infty} f(x)dx = \\ &= E(X / X > A) - A\overline{F}(A)\end{aligned}$$

Si el *coste probable de un siniestro* es *conocido*, las técnicas de *integración numérica* nos permitirían calcular el parámetro buscado mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\overline{c}_A &= \overline{c} - \int_0^A xf(x)\,dx - A\overline{F}(A) = \\
&= \overline{c} - A + A\int_0^A f(x)\,dx - \int_0^A xf(x)\,dx = \\
&= \overline{c} - A + \int_0^A (A-x)\,f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Por otra parte, se puede obtener la siguiente expresión alternativa (de gran simplicidad):

$$\begin{aligned}
\overline{c}_A &= \int_A^\infty (x-A)\,dF(x) = \\
&= -\int_A^\infty (x-A)\,d\left(1-F(x)\right) = \\
&= \left\{ \begin{matrix} u = x - A & du = dx \\ dv = d\left(1-F(x)\right) & v = 1 - F(x) \end{matrix} \right\} = \\
&= \left[-(x-A)\left(1-F(x)\right)\right]_A^\infty + \int_A^\infty \left(1-F(x)\right)dx = \\
&= \int_A^\infty \left(1-F(x)\right)dx = \int_A^\infty \overline{F}(x)\,dx
\end{aligned}$$

A partir de esta expresión, podríamos obtener, por último, una quinta formulación para el *coste probable del siniestro a cargo del asegurador con franquicia A*:

$$\boxed{\overline{c}_A = \int_A^\infty \overline{F}(x)\,dx = \overline{c} - \int_0^A \overline{F}(x)\,dx}$$

A esta expresión le es aplicable lo comentado anteriormente cuando el *coste probable de un siniestro* es *conocido* y se aplican técnicas de *integración numérica*.

Para profundizar en el análisis del efecto de la introducción de la franquicia absoluta en la distribución del coste de un siniestro, analizaremos la ***varianza*** de dicha distribución, que obviamente será:

$$\boxed{\sigma_A^2 = \int_A^\infty (x-A)^2 f(x)dx - \overline{c}_A^2}$$

3.1.- FRANQUICIA ABSOLUTA CON DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Si suponemos que el coste de un siniestro sigue una ***distribución exponencial*** entonces el coste probable de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia absoluta A será la extraordinariamente sencilla expresión:

$$\boxed{\overline{c}_A\left(Exp\right) = \overline{c}\cdot e^{-\frac{A}{\overline{c}}} = \overline{c}\cdot \overline{F}_{Exp}(A)}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\overline{c}_A\left(Exp\right) &= \int_A^\infty (x-A)\frac{1}{\overline{c}}e^{-\frac{x}{c}}dx = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} u = x - A & du = dx \\ dv = \frac{1}{\overline{c}}e^{-\frac{x}{\overline{c}}}dx & v = -e^{-\frac{x}{\overline{c}}} \end{array}\right\} = \\
&= \left[(x-A)\left(-e^{-\frac{x}{c}}\right)\right]_A^\infty + \int_A^\infty\left(e^{-\frac{x}{\overline{c}}}\right)dx = \left[-\overline{c}e^{-\frac{x}{c}}\right]_A^\infty = \\
&= \overline{c}\cdot e^{-\frac{A}{\overline{c}}} = \overline{c}\cdot \overline{F}_{Exp}(A)
\end{aligned}$$

Por otra parte, podríamos haber obtenido esta expresión directamente mediante la expresión alternativa:

$$\boxed{\overline{c}_A\left(Exp\right) = \int_A^\infty \overline{F}(x)dx = \int_A^\infty e^{-\frac{x}{\overline{c}}}dx = \left[-\overline{c}e^{-\frac{x}{\overline{c}}}\right]_A^\infty = \overline{c}\cdot e^{-\frac{A}{\overline{c}}} = \overline{c}\cdot \overline{F}_{Exp}(A)}$$

El descuento técnico resultante de la franquicia absoluta A será:

$$\boxed{\delta\left(Exp\right) = 1 - \frac{\overline{c}_A}{\overline{c}} = 1 - e^{-\frac{A}{\overline{c}}} = F_{Exp}(A)}$$

Dado el carácter explícito de la anterior función, podremos calcular el valor de la franquicia absoluta A que correspondería a un descuento técnico δ prefijado:

$$\boxed{A = -\overline{c}\cdot\ln\left(1-\delta\right)\cdot \quad \text{siendo} \quad 0 < \delta < 1}$$

La ***varianza*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia absoluta A será:

$$\boxed{\sigma_A^2\left(Exp\right) = \int_A^{\infty}\left(x-A\right)^2 \frac{1}{\overline{c}} e^{-\frac{x}{\overline{c}}} dx - \overline{c}^2 \cdot e^{-\frac{2A}{\overline{c}}}}$$

El *momento de segundo orden con relación al origen* de la *distribución del coste de un siniestro a cargo del asegurador* será:

$$\int_A^{\infty}\left(x-A\right)^2 \frac{1}{\overline{c}} e^{-\frac{x}{\overline{c}}} dx = \left\{\begin{matrix} u = \left(x-A\right)^2 & du = 2\left(x-A\right)dx \\ dv = \frac{1}{\overline{c}} e^{-\frac{x}{\overline{c}}} dx & v = -e^{-\frac{x}{\overline{c}}} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left[\left(x-A\right)^2\left\{-e^{-\frac{x}{\overline{c}}}\right\}\right]_A^{\infty} - \int_A^{\infty} -2\left(x-A\right)\cdot e^{-\frac{x}{\overline{c}}} dx =$$

$$= 2\overline{c}\int_A^{\infty}\left(x-A\right)\cdot\frac{1}{\overline{c}} e^{-\frac{x}{\overline{c}}} dx =$$

$$= 2\cdot\overline{c}\cdot\overline{c}_A(x) = 2\cdot\overline{c}^2\cdot e^{-\frac{A}{\overline{c}}}$$

Por tanto, la ***varianza*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia absoluta A será:

$$\sigma^2_A(Exp) = 2 \cdot \overline{c}^{-2} \cdot e^{-\frac{A}{\overline{c}}} - \overline{c}^{-2} \cdot e^{-\frac{2A}{\overline{c}}} = \\ = \overline{c}^{-2}\left[2 \cdot e^{-\frac{A}{\overline{c}}} - e^{-\frac{2A}{\overline{c}}}\right]$$

¿Podría ser ésta expresión *negativa*?. Ello implicaría que:

$$\sigma^2_A(Exp) < 0 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-\frac{A}{\overline{c}}} - e^{-\frac{2A}{\overline{c}}} < 0 \\ \Updownarrow \\ A + \ln 2 \cdot \overline{c} = A + 0{,}69 \cdot \overline{c} < 0$$

Evidentemente, tanto la franquicia absoluta ***A*** como el coste probable de un siniestro serán positivos, por lo que dicha expresión, y, en consecuencia, la de la ***varianza*** según el modelo exponencial ***nunca podrían ser negativos***.

Utilicemos de nuevo la ***Estadística de Daños Propios del Seguro del Automóvil, Datos 1.995***, de ***UNESPA***, que anteriormente utilizamos para el desarrollo de los modelos estadísticos, concretamente la ***Distribución de la Cuantía del Siniestro*** en la ***Modalidad*** de ***Daños Propios sin franquicia***, categoría de ***Turismos*** (global para todo tipo de potencia). En dicha distribución, correspondiente a 290.608 siniestros (tamaño muestral ciertamente elevado), el ***Coste Medio del Siniestro*** es de ***84.216 pesetas*** y la ***Desviación Típica*** de ***158.611 pesetas***. Por tanto, el ***estimador*** (por momentos y por máxima verosimilitud) del parámetro α en la distribución exponencial será:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\overline{c}} = \frac{1}{84.216} = 1{,}1874\text{E-}05$$

El ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Absoluta 50.000*** será:

$$\overline{c}_{50.000} = 84.216 \cdot e^{-\frac{50.000}{84.216}} = 46.510$$

que dará lugar a un ***descuento técnico*** del ***44,77%*** (recordemos que en el caso de las *franquicias estadísticas*, con la misma base de datos y para la misma cuantía de franquicia absoluta, obtuvimos un *descuento técnico* del *46,43%*, resultando más prudente, en consecuencia, el modelo basado en la distribución exponencial).

Si utilizamos una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo del ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Absoluta A*** sería:

$$\boxed{= c\text{*EXP}(-A/c)}$$

La ***desviación típica*** de la distribución del coste de un siniestro ***sin franquicia*** en la hipótesis exponencial coincide con el ***coste probable***, estimado en ***84.216 pesetas***. Con ***franquicia*** de ***50.000 pesetas*** será:

$$\sigma_{50.000} = \sqrt{84.216^2\left[2\cdot e^{-\frac{50.000}{84.216}} - e^{-\frac{100.000}{84.216}}\right]} = 75.303$$

lo que supone una reducción del ***10,58%*** (frente al *2,39%* que estimaba el modelo de *franquicias estadísticas*, con la misma base de datos y para la misma cuantía de franquicia absoluta).

En una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo de la ***Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Absoluta A*** sería:

$$\boxed{= \text{RAIZ(POTENCIA}(c;2)\text{*(2*EXP}(-A/c)\text{- EXP}(-2\text{*}A/c)}$$

Si analizamos la ***franquicia absoluta A*** que debiera introducirse para obtener un determinado nivel de ***descuento técnico***, por ejemplo, del ***25%***, aplicando la expresión anteriormente obtenida, tendríamos:

$$\boxed{A = -84.216\cdot\ln 0,75 = 24.227}$$

En una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo de la ***Franquicia Absoluta*** correspondiente a un determinado nivel de ***descuento técnico δ*** sería:

$$\boxed{= - c^{*}\mathrm{LN}(1-\delta)}$$

Es aquí donde se hace evidente la ***ventaja operativa*** de este modelo respecto al de *franquicias estadísticas*, que nos obligaría a efectuar simulaciones con varios valores de ***A*** hasta encontrar un intervalo (δ_1,δ_2) que incluya el valor de descuento deseado.

Todos los anteriores cálculos con la distribución exponencial son susceptibles de ser ***programados*** en ***Visual Basic para Excel***[10] de la siguiente forma:

En primer lugar programamos la función FrAbsExp(A,media) que calcula el coste medio sujeto a Franquicia Absoluta "A" correspondiente a una distribución exponencial con coste medio "media":

```
'-----------------------------------------------------------
-----------------
'----- Coste Medio con Franquicia Absoluta / Exponencial
'-----------------------------------------------------------
----------------Function FrAbsExp(A, media)
' función que calcula el coste medio con franquicia
absoluta estocástica
' en una distribución exponencial
Dim mx As Double
mx = media
FrAbsExp = mx * Exp(-A / mx)
End Function
```

En segundo lugar programamos la función DTFrAbsExp(A,media) que calcula la Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Absoluta "A" y coste medio sin franquicia "media":

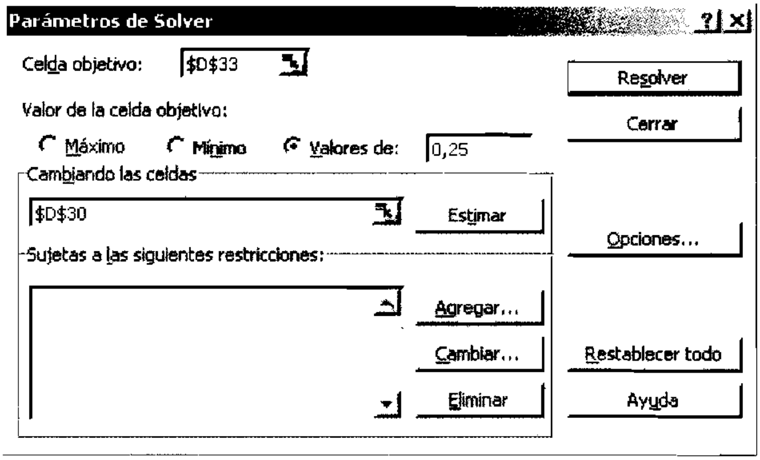
[10] Para programar en VBA hay que entrar en el menú Herramientas – Macro – Editor de Visual Basic o pulsar las teclas Alt-F11. Una vez dentro del editor es necesario insertar un Módulo en el Explorador de Proyectos e incluir todas las funciones en ese módulo para que puedan ser utilizadas en cualquier hoja de cálculo del libro de Excel.

```
'------------------------------------------------------------
----------------
'----- Desv. Típica Franquicia Absoluta / Exponencial
'------------------------------------------------------------
----------------
Function DTFrAbsExp(A, media)
' función que calcula la desviación típica del coste con
franquicia
' absoluta estocástica en una distribución exponencial
Dim mx As Double, cA as Double
mx = media
cA = FrAbsExp(A, media)
DTFrAbsExp = Sqr(2 * mx * cA - mx ^ 2 * Exp(-2 * A /
mx))
End Function
```

Por último introducimos en Excel los cálculos siguientes (las fórmulas vienen indicadas a la derecha de la celda en la que deben ser escritas):

	A	B	C	D	E
20	Franquicia estocástica Exponencial				
21					
22		muestra			
23			media	84.216,00	
24					
25		estimación			
26			m	84216,0000	=D23
27					
28		costes			
29			medio sin franquicia	84.216,00	=D26
30			franquicia	50.000,00	
31			medio con franquicia	46.510,29	=FrAbsExp(D30;D23)
32					
33			descuento	44,77%	=1-D31/D29
34			desviación típica	75.303,48	=DTFrAbsExp(D30;D26)

En el caso de querer determinar el importe de la franquicia absoluta que determina un descuento dado, por ejemplo 25%, bastará con usar Solver en Excel estableciendo los parámetros indicados y pulsando el botón resolver para obtener el resultado:



3.2.- FRANQUICIA ABSOLUTA CON DISTRIBUCIÓN GAMMA

Si suponemos que el coste de un siniestro sigue una ***distribución gamma*** entonces el coste probable de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia absoluta A será:

$$\boxed{\overline{c}_A(\Gamma) = \overline{c}\cdot\overline{\Gamma}(A;\alpha+1,\beta) - A\cdot\overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta)}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\overline{c}_A(\Gamma) &= \int_A^{\infty} x f(x)\,dx - A\overline{F}(A) = \\
&= \int_A^{\infty} x\,\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx - A\cdot\overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta) = \\
&\left\{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\int_A^{\infty}\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)\cdot\alpha} x^{\alpha} e^{-\beta x} dx = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\int_A^{\infty}\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\beta x} dx\right\} \\
&= \overline{c}\cdot\overline{\Gamma}(A;\alpha+1,\beta) - A\cdot\overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

que es una expresión de sencilla aplicación.

El descuento técnico resultante de la franquicia absoluta ***A*** será:

$$\boxed{\delta(\Gamma) = 1 - \frac{\overline{c}_A}{\overline{c}} = 1 - \overline{\Gamma}(A;\alpha+1,\beta) - \frac{A}{\overline{c}} \cdot \overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta)}$$

Dado el carácter implícito de la anterior función, no podremos calcular el valor de la franquicia absoluta *A* que correspondería a un descuento técnico δ prefijado, por lo que, dada la continuidad de la función gamma, podemos garantizar la convergencia a un intervalo (δ_1,δ_2) que incluya el valor de descuento deseado, con el orden de aproximación preciso.

La ***varianza*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia absoluta *A* será:

$$\boxed{\sigma_A^2(\Gamma) = \int_A^\infty (x-A)^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx - \overline{c}_A^2(\Gamma)}$$

siendo el *momento de segundo orden con relación al origen* de la *distribución del coste de un siniestro a cargo del asegurador*:

$$\begin{aligned}
&\int_A^\infty (x-A)^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \int_A^\infty x^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx - \\
&-2A\int_A^\infty x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx + A^2 \int_A^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} \int_A^\infty \frac{\beta^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+1} e^{-\beta x} dx - \\
&-2A\frac{\alpha}{\beta} \int_A^\infty \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\beta x} dx + A^2\overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta) \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}\overline{\Gamma}(A;\alpha+2,\beta) - 2A\frac{\alpha}{\beta}\overline{\Gamma}(A;\alpha+1,\beta) + A^2\overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

Por tanto, la ***varianza*** del coste de un siniestro a cargo del *asegurador* en un seguro con **franquicia absoluta** ***A*** será:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_A^2(\Gamma) = {} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}\overline{\Gamma}(A;\alpha+2,\beta) - 2A\frac{\alpha}{\beta}\overline{\Gamma}(A;\alpha+1,\beta) + \\ & + A^2\overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta) - \left[\overline{c}\cdot\overline{\Gamma}(A;\alpha+1,\beta) - A\cdot\overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta)\right]^2\end{aligned}}$$

¿Podría ser ésta expresión negativa?. Ello implicaría que:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}\overline{\Gamma}(A;\alpha+2,\beta) + A^2\overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta) \\ < \\ 2A\frac{\alpha}{\beta}\overline{\Gamma}(A;\alpha+1,\beta) + \left[\overline{c}\cdot\overline{\Gamma}(A;\alpha+1,\beta) - A\cdot\overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta)\right]^2\end{gathered}}$$

Si estimamos por momentos los parámetros del modelo utilizando la muestra de la *Estadística de Daños Propios del Seguro del Automóvil, Datos 1.995*, de *UNESPA*, *Distribución de la Cuantía del Siniestro* en la *Modalidad* de *Daños Propios sin franquicia*, categoría de *Turismos* tendríamos:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{\overline{x}^2}{s^2} = 3{,}3476\text{E-}06\cdot 84.216 = 0{,}2819 \\ \hat{\beta} &= \frac{\overline{x}}{s^2} = \frac{84.216}{25.157.393.143} = 3{,}3476\text{E-}06\end{aligned}}$$

en cuyo caso:

$$\boxed{\begin{gathered}(3{,}2250\text{E+}10)\ \overline{\Gamma}(A;2,2819;3{,}3476\text{E-}06) + A^2\overline{\Gamma}(A;0{,}2819;3{,}3476\text{E-}06) \\ < \\ 168.431\,A\,\overline{\Gamma}(A;1{,}2819;3{,}3476\text{E-}06) + \left[\overline{c}\cdot\overline{\Gamma}(A;1{,}2819;3{,}3476\text{E-}06) - A\cdot\overline{\Gamma}(A;0{,}2819;3{,}3476\text{E-}06)\right]^2\end{gathered}}$$

¿Podría existir algún valor de franquicia absoluta A para el cual la varianza resultara negativa?. Analicémoslo para distintos posibles valores de la franquicia absoluta, que daría lugar al siguiente cuadro:

FRANQUICIA ABSOLUTA	DESVIACIÓN TÍPICA
1.000	133.982
2.000	127.936
5.000	116.916
10.000	104.808
20.000	86.459
30.000	69.942
40.000	52.548
50.000	30.323
55.000	8.991
55.490	1.102
55.497	284
> 55.497	< 0

Así pues, a partir de una franquicia absoluta por valor de 55.497 Pts., la función correspondiente a la varianza se haría negativa.

Si consideramos distintas muestras de siniestros, y ajustamos a las mismas una distribución gamma, resultarían los siguientes valores de desviación típica neta de franquicia absoluta, para distintas magnitudes de la misma:

PARÁMETROS		FRANQUICIA	DESVIACIÓN TÍPICA
Coste Medio del Siniestro	Desviación Típica		
100.000	200.000	67.000	9.815
50.000	100.000	10.000	56.235
50.000	100.000	30.000	19.515
50.000	100.000	33.500	4.907
50.000	100.000	34.000	< 0
50.000	150.000	10.000	68.205
50.000	150.000	30.000	35.233
50.000	150.000	40.000	7.228
50.000	150.000	40.500	< 0
50.000	200.000	10.000	76.863
50.000	200.000	30.000	46.059
50.000	200.000	40.000	28.098
50.000	200.000	46.500	3.402
50.000	200.000	47.000	< 0
100.000	200.000	10.000	132.308
100.000	200.000	30.000	95.556
100.000	200.000	50.000	61.202
100.000	200.000	67.000	9.815
100.000	200.000	68.000	< 0

Este cuadro es un ejemplo de cómo la aplicación de la distribución gamma puede resultar inadecuada (al menos en lo que a la varianza se refiere) para distintas distribuciones empíricas y diferentes magnitudes de franquicia absoluta.

Como hemos visto antes, utilizando la ***Estadística de Daños Propios del Seguro del Automóvil, Datos 1.995***, de ***UNESPA***, ***Distribución de la Cuantía del Siniestro*** en la ***Modalidad*** de ***Daños Propios sin franquicia***, categoría de ***Turismos***, correspondiente a 290.608 siniestros, en la que el ***Coste Medio del Siniestro*** es de ***84.216 pesetas*** y la ***Varianza*** de ***25.157.393.143 pesetas***^{2}, los *estimadores por momentos* de los parámetros α y β de la ***distribución gamma*** eran:

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{\alpha} = 0{,}2819 \\ \hat{\beta} = 3{,}3476E\text{-}06 \end{array}}$$

El ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Absoluta 50.000*** será:

$$\begin{aligned} \overline{c}_A &= 84.216 \cdot \overline{\Gamma}(50.000;1{,}2819,3{,}3476E\text{-}06) - \\ &- 50.000 \cdot \overline{\Gamma}(50.000;0{,}2819,3{,}3476E\text{-}06) = \\ &= 84.216 \cdot 0{,}9202 - 50.000 \cdot 0{,}3526 = 59.863 \end{aligned}$$

59.863 pesetas que dará lugar a un ***descuento técnico*** del ***28,92%***, acusadamente inferior al obtenido mediante el *modelo exponencial* y mediante *franquicias estadísticas*, que era del *46,43%*.

Si utilizamos una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo del ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Absoluta A*** sería:

= *c(1-DISTR.GAMMA(*A*;α+1;1/β;VERDADERO))**
- *A(1-DISTR.GAMMA(*A*;α;1/β;VERDADERO))**

puesto que en la *hoja de cálculo Excel*, la ***distribución gamma*** se define como

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

es decir, con el parámetro β definido como el recíproco del que nosotros empleamos. Por otra parte, el *cuarto parámetro* es un valor lógico que determina la forma de la función: Si el argumento es *VERDADERO*, la función ***DISTR.GAMMA*** nos da el valor correspondiente de la *función de distribución*, mientras que si es *FALSO*, nos da la función de densidad de probabilidad.

La ***desviación típica*** de la distribución del coste de un siniestro ***sin franquicia*** en la hipótesis gamma es:

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} = \frac{\sqrt{0{,}2819}}{3{,}3476\text{E-}06} = 158.611$$

mientras que en la hipótesis de distribución exponencial era de ***84.216 pesetas*** (al depender la gamma de dos parámetros y haberlos estimado por momentos, los valores estimados de media y varianza coinciden exactamente con los empíricos, mientras que en el caso de la exponencial, al depender de un solo parámetro, se produce la coincidencia en la media - que también es estimador pro máxima verosimilitud - pero no en la varianza).

Con ***franquicia*** de ***50.000 pesetas*** será:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}\overline{\Gamma}(A;\alpha+2,\beta) - 2A\frac{\alpha}{\beta}\overline{\Gamma}(A;\alpha+1,\beta) + A^2\overline{\Gamma}(A;\alpha,\beta) - \overline{c}_A} =$$
$$= \sqrt{\frac{0{,}2819\cdot 1{,}2819}{3{,}3476\text{E-}06^2}\cdot 0{,}9943 - 100.000\cdot\frac{0{,}2819}{3{,}3476\text{E-}06}\cdot 0{,}9202 + 50.000^2\cdot 0{,}3526 - 59.863} =$$
$$= 147.016$$

lo que supone una reducción del *7,31%* (frente al *2,39%* que estimaba el modelo de *franquicias estadísticas*, con la misma base de datos y para la misma cuantía de franquicia absoluta), inferior a la reducción del *10,58%* que propugnaba el modelo exponencial.

Si utilizamos una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo de la ***Desviación típica*** sería:

= RAIZ(α*(α+1)*POTENCIA(β;2)*(1-DISTR.GAMMA(A;
α+2;1/β;VERDADERO))-
-2*A*α*β*(1-DISTR.GAMMA(A;
α+1;1/β;VERDADERO))+POTENCIA(A;2)*
***(1-DISTR.GAMMA(A; α;1/β;VERDADERO))-**
POTENCIA(α/β;2))

Todos los anteriores cálculos con la distribución gamma son susceptibles de ser ***programados*** en ***Visual Basic para Excel*** de la siguiente forma:

En primer lugar programamos la función FrAbsGamma(A,media,desvtip) que calcula el coste medio sujeto a Franquicia Absoluta "A" correspondiente a una distribución Gamma con coste medio "media" y desviación típica "desvtip"[11]:

```
' ------------------------------------------------------------
------------------
' ----- Franquicia Absoluta Gamma
' ------------------------------------------------------------
------------------
Function FrAbsGamma(A, media, desvtip)
' función que calcula el coste medio con franquicia absoluta
estocástica
' en una distribución Gamma
Dim alpha As Double, beta As Double
Dim cmedio As Double
alpha = (media / desvtip) ^ 2
beta = media / desvtip ^ 2
cmedio = alpha / beta
FrAbsGamma = cmedio * (1 - Application.GammaDist(A, alpha + 1,
1 / beta, True))
FrAbsGamma = FrAbsGamma - A * (1 - Application.GammaDist(A,
alpha, 1 / beta, True))
End Function
```

En segundo lugar programamos la función DTFrAbsGamma(A,media,desvtip) que calcula la Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Absoluta "A", coste medio sin franquicia "media" y desviación típica "desvtip":

```
'-----------------------------------------------------------------------
--
'----- Desv. Típica Franquicia Absoluta / Gamma
'-----------------------------------------------------------------------
--
Function DTFrAbsGamma(A, media, desvtip)
' función que calcula la desviación típica del coste con franquicia
' absoluta estocástica en una distribución Gamma
Dim alpha As Double, beta As Double
Dim cmedio As Double, cA As Double
Dim D1 As Double, D2 As Double, D3 As Double
```

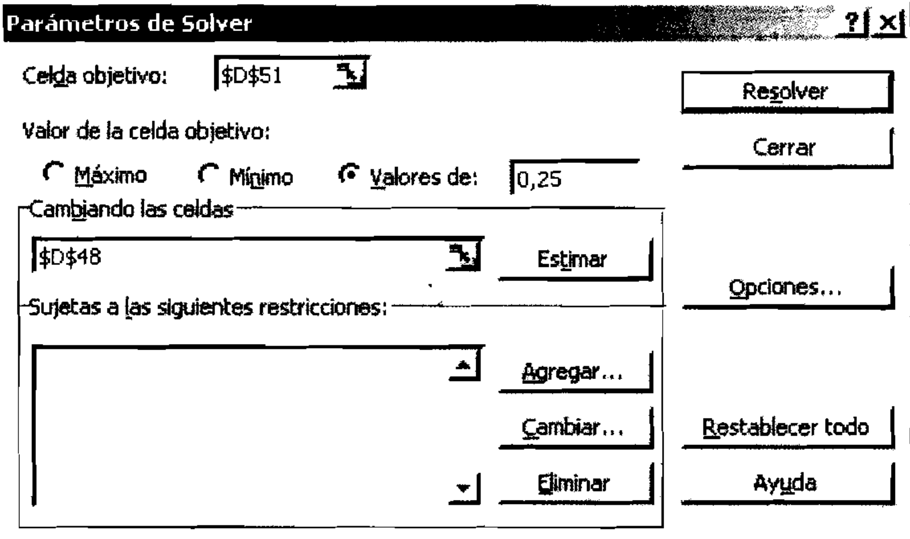
[11] Debemos mencionar que en Excel el parámetro β de la fórmula de cálculo de la distribución Gamma "GammaDist" corresponde al inverso de nuestro β: $\beta_{Excel} = 1/\beta$.

```
alpha = (media / desvtip) ^ 2
beta = media / desvtip ^ 2
cmedio = alpha / beta
cA = FrAbsGamma(A, media, desvtip)
D1 = alpha * (alpha + 1) / beta ^ 2 * (1 - Application.GammaDist(A,
alpha + 2, 1 / beta, True))
D2 = 2 * A * alpha / beta * (1 - Application.GammaDist(A, alpha + 1, 1
/ beta, True))
D3 = A ^ 2 * (1 - Application.GammaDist(A, alpha, 1 / beta, True))
DTFrAbsGamma = Sqr(D1 - D2 + D3 - cA ^ 2)
End Function
```

Por último introducimos en Excel los cálculos siguientes (las fórmulas vienen indicadas a la derecha de la celda en la que deben ser escritas):

	A	B	C	D	E
36	**Franquicia estocástica Gamma**				
37					
38		muestra			
39			media	84.216,00	
40			desviación típica	158.611,00	
41					
42		estimación			
43			α	0,2819178751	=(D39/D40)^2
44			β	0,0000033476	=D39/D40^2
45					
46		costes			
47			medio sin franquicia	84.216,00	=D43/D44
48			franquicia	50.000,00	
49			medio con franquicia	59.863,36	=FrAbsGamma(D48;D39;D40)
50					
51			descuento	28,92%	=1-D49/D47
52			desviacion típica	147.016,14	=DTFrAbsGamma(E48;E39;E40)

En el caso de querer determinar el importe de la franquicia absoluta que determina un descuento dado, por ejemplo 25%, bastará con usar Solver en Excel estableciendo los parámetros indicados y pulsando el botón resolver para obtener el resultado:



La franquicia absoluta que produce un descuento del 25% en una distribución Gamma asciende a 41.030,76 pesetas que es superior a la equivalente en la distribución exponencial.

3.3.- FRANQUICIA ABSOLUTA CON DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

Si suponemos que el coste de un siniestro sigue una ***distribución lognormal*** entonces el coste probable de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia absoluta A será:

$$\boxed{\bar{c}_A\left(LN\right)=\bar{c}\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-\left(\mu+\sigma^2\right)}{\sigma}\right)\right]-A\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-\mu}{\sigma}\right)\right]}$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
\overline{c}_A(LN) &= \int_A^{\infty}(x-A)\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \\
&= \int_A^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx - \\
&\quad - \int_A^{\infty}A\,\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \\
&= (1) \quad - \quad (2)
\end{aligned}
$$

$$
(1) = \left\{\begin{matrix} \ln x = y & x = e^y & \mathrm{d}x = e^y\mathrm{d}y \\ x = A & y = \ln A & \\ x \to \infty & y \to \infty & \end{matrix}\right\} =
$$

$$
= \int_{\ln A}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot e^y\cdot dy =
$$

$$
= \int_{\ln A}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\left[(y-\mu)^2-2y\sigma^2\right]}{2\sigma^2}}dy =
$$

$$
\left\{\begin{aligned}
&(y-\mu)^2-2y\sigma^2 = y^2+\mu^2-2y\mu-2y\sigma^2 = \\
&\quad = y^2-2y\left(\mu+\sigma^2\right)+\mu^2+\left(\mu+\sigma^2\right)^2-\left(\mu+\sigma^2\right)^2 = \\
&\quad = \left[y-\left(\mu+\sigma^2\right)\right]^2-\left(\sigma^4+2\mu\sigma^2\right)
\end{aligned}\right\}
$$

$$
= \int_{\ln A}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y\ (\mu+\sigma^2))}{2\sigma^2}}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\left(\sigma^2+2\mu\right)}}_{\overline{c}(LN)}\cdot dy =
$$

$$
\left\{\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right\}
$$

$$
= \overline{c}\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-\left(\mu+\sigma^2\right)}{\sigma}\right)\right]
$$

$$(2) = \int_A^{\infty} A \cdot \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$
$$= A \cdot \overline{F}_{LN}(A) = A \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln A - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

Por tanto:

$$\overline{c}_A(LN) = \int_A^{\infty} (x - A) \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$
$$= \overline{c} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln A - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right)\right] - A \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln A - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

En consecuencia, el descuento técnico que general la franquicia absoluta A será:

$$\delta(LN) = \Phi\left(\frac{\ln A - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right) + \frac{A}{\overline{c}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln A - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

No resulta posible despejar en la anterior función implícita y calcular A en función de δ, que habría de calcularse por aproximación interpolando, dado el carácter continuo de la anterior función implícita.

La ***varianza*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia absoluta A para el caso del ***modelo lognormal*** será:

$$\sigma_A^2(LN) = \int_A^{\infty} (x - A)^2 \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx - \overline{c}_A^2$$

siendo el *momento de segundo orden con relación al origen* de la *distribución del coste de un siniestro a cargo del asegurador*:

$$\int_A^{\infty}(x-A)^2\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_A^{\infty}\left(x^2-2Ax+A^2\right)\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$\left\{\begin{array}{lll}\ln x=y & x=e^y & \mathrm{d}x=e^y\mathrm{d}y\\ x=A & y=\ln A & \\ x\to\infty & y\to\infty & \end{array}\right\}$$

$$=\int_{\ln A}^{\infty}e^{2y}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy+ \qquad (1)$$

$$+(-2A)\int_{\ln A}^{\infty}\mathrm{e}^{y}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy+ \qquad (2)$$

$$+\left(A^2\right)\int_{\ln A}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy \qquad (3)$$

$$(1)=\int_{\ln A}^{\infty}e^{2y}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy=$$

$$\left\{\begin{array}{l}(y-\mu)^2-4y\sigma^2=y^2+\mu^2-2y\mu-4y\sigma^2=\\ \quad y^2-2y(\mu+2\sigma^2)+\mu^2+(\mu+2\sigma^2)^2-(\mu+2\sigma^2)^2=\\ =\left[y-(\mu+2\sigma^2)\right]^2-4\sigma^2(\mu+\sigma^2)\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}e^{2y}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}=e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(y-\mu)^2-4y\sigma^2\right]}=\\ =e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\left[y-(\mu+2\sigma^2)\right]^2-4\sigma^2(\mu+\sigma^2)\right\}}=\\ =e^{2(\mu+\sigma^2)}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y-(\mu+2\sigma^2)\right]^2}\end{array}\right\}$$

$$=\int_{\ln A}^{\infty}e^{2(\mu+\sigma^2)}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y-(\mu+2\sigma^2)\right]^2}dy=$$

$$=e^{2(\mu+\sigma^2)}\int_{\ln A}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y-(\mu+2\sigma^2)\right]^2}dy$$

$$=e^{2(\mu+\sigma^2)}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-(\mu+2\sigma^2)}{\sigma}\right)\right]$$

$$(2)=(-2A)\int_{\ln A}^{\infty} e^{y}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy=$$

$$\left\{\begin{array}{l}(y-\mu)^2-2y\sigma^2=y^2+\mu^2-2y\mu-2y\sigma^2=\\ \quad=y^2-2y\left(\mu+\sigma^2\right)+\mu^2+\left(\mu+\sigma^2\right)^2-\left(\mu+\sigma^2\right)^2=\\ \quad=\left[y-\left(\mu+\sigma^2\right)\right]^2-\sigma^2\left(2\mu+\sigma^2\right)\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}e^{y}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}=e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(y-\mu)^2-2y\sigma^2\right]}=\\ \quad=e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\left[y-\left(\mu+\sigma^2\right)\right]^2-\sigma^2\left(2\mu+\sigma^2\right)\right\}}=\\ \quad=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y-\left(\mu+\sigma^2\right)\right]^2}\end{array}\right\}$$

$$=(-2A)\int_{\ln A}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y-\left(\mu+\sigma^2\right)\right]^2}dy=$$

$$=(-2A)e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\int_{\ln A}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y-\left(\mu+\sigma^2\right)\right]^2}dy=$$

$$=(-2A)e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-\left(\mu+\sigma^2\right)}{\sigma}\right)\right]$$

$$(3)=\left(A^2\right)\int_{\ln A}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy=$$

$$=A^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

Por tanto, el *momento de segundo orden con relación al origen* de la *distribución del coste de un siniestro a cargo del asegurador* en el caso de *distribución lognormal* es:

$$\alpha_{2,A}(LN) = \int_A^\infty (x-A)^2 \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$
$$= e^{2(\mu+\sigma^2)}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-(\mu+2\sigma^2)}{\sigma}\right)\right]-$$
$$-2Ae^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\right]+$$
$$+A^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

En consecuencia, la ***varianza*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia absoluta A para el caso del ***modelo lognormal*** será:

$$\sigma_A^2(LN) = e^{2(\mu+\sigma^2)}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-(\mu+2\sigma^2)}{\sigma}\right)\right]-$$
$$-2Ae^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\right]+$$
$$+A^2\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-\mu}{\sigma}\right)\right]-$$
$$-\left\{\bar{c}\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)\right]-A\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}^2$$

¿Podría ser ésta expresión negativa?. Ello implicaría que:

$$e^{2(\mu+\sigma^2)}\bar{\Phi}\left(\frac{\ln A-(\mu+2\sigma^2)}{\sigma}\right)+A^2\bar{\Phi}\left(\frac{\ln A-\mu}{\sigma}\right)$$
$$<$$
$$2Ae^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\bar{\Phi}\left(\frac{\ln A-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)+\bar{c}^2\cdot\left[\bar{\Phi}\left(\frac{\ln A-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)-A\cdot\bar{\Phi}\left(\frac{\ln A-\mu}{\sigma}\right)\right]^2$$

Si estimamos por momentos los parámetros del modelo utilizando la muestra de la *Estadística de Daños Propios del Seguro del Automóvil, Datos 1.995*, de *UNESPA*, *Distribución de la Cuantía del Siniestro* en la *Modalidad* de *Daños Propios sin franquicia*, categoría de *Turismos* tendríamos:

$$\hat{\mu} = \ln\left(\frac{\overline{x}}{\sqrt{1+a^2}}\right) = \ln\left(\frac{84.216}{\sqrt{1+1{,}8834^2}}\right) = 10{,}5839$$

$$\hat{\sigma}^2 = \ln\left(1+a^2\right) = \ln\left(1+1{,}8834^2\right) = 1{,}5145$$

¿Podría existir algún valor de franquicia absoluta A para el cual la varianza resultara negativa?. Analicémoslo para distintos posibles valores de la franquicia absoluta, que daría lugar al siguiente cuadro:

FRANQUICIA ABSOLUTA	DESVIACIÓN TÍPICA
1.000	158.611
5.000	158.570
10.000	158.355
20.000	157.403
30.000	155.973
40.000	154.266
50.000	152.408
60.000	150.474
80.000	146.544
100.000	142.678
200.000	125.832
500.000	94.289
1.000.000	67.890
2.000.000	43.918
5.000.000	20.618
10.000.000	10.052
100.000.000	347
1.000.000.000	5

Apreciamos empíricamente que, al menos para la muestra utilizada, la expresión obtenida de la varianza neta de franquicia absoluta es utilizable para toda cuantía posible de la misma, lo que nos hace apreciar aún más este modelo para este tipo de supuesto.

Como hemos visto antes, utilizando la ***Estadística de Daños Propios del Seguro del Automóvil, Datos 1.995***, de ***UNESPA***, ***Distribución de la Cuantía del Siniestro*** en la ***Modalidad*** de ***Daños Propios sin franquicia***, categoría de ***Turismos***, correspondiente a 290.608 siniestros, en la que el ***Coste Medio del Siniestro*** es de ***84.216 pesetas*** y la ***Varianza*** de ***25.157.393.143 pesetas***^{2}, los *estimadores por momentos* de los parámetros μ y σ^2 de la ***distribución lognormal*** eran:

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{\mu} = 10{,}5839 \\ \hat{\sigma}^2 = 1{,}5145\end{array}}$$

El ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Absoluta 50.000*** será:

$$\bar{c}_A = 84.216 \cdot \left[1-\Phi\left(\frac{\ln 50.000-(10{,}5839+1{,}5145)}{\sqrt{1{,}5145}}\right)\right] - 50.000 \cdot \left[1-\Phi\left(\frac{\ln 50.000-10{,}5839}{\sqrt{1{,}5145}}\right)\right] = 50.433$$

50.433 pesetas que dará lugar a un ***descuento técnico*** del ***40,11%***, ligeramente *inferior* al obtenido mediante el *modelo exponencial* (*44,77%*) y mediante *franquicias estadísticas* (*46,43%*) y evidentemente *superior* al obtenido mediante el *modelo gamma* (*28,92%*). Como se aprecia, el ***modelo más prudente*** a efectos de estimación del ***descuento técnico*** es la ***distribución gamma***.

La ***desviación típica*** de la distribución del coste de un siniestro ***sin franquicia*** en la hipótesis lognormal es:

$$\sigma(LN) = \sqrt{e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)} = 158.611$$

es decir, como no podía ser de otra forma al estimar por momentos los parámetros y ser éstos dos, coincide con el valor empírico de la muestra, igual que ocurría en el caso de la distribución gamma. No así en el caso de la distribución exponencial, que era de ***84.216 pesetas***, al depender esta distribución de un solo parámetro, por lo que se producía coincidencia en la media - que también es estimador por máxima verosimilitud - pero no en la varianza).

Con ***franquicia*** de ***50.000 pesetas***, tal ***desviación típica*** de la distribución del coste de un siniestro ***sin franquicia*** en la hipótesis ***lognormal*** será, después de efectuar los oportunos cálculos:

$$\boxed{\sigma_{50000}\left(LN\right)=152.408}$$

lo que supone una reducción del ***3,91%*** (frente al *2,39%* que estimaba el modelo de *franquicias estadísticas*, con la misma base de datos y para la misma cuantía de franquicia absoluta), inferior a la reducción del *10,58%* que propugnaba el modelo exponencial y a la del *7,31%* a que conducía el modelo gamma.

Si utilizamos una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo del ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Absoluta A*** sería:

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{= c^*(1\text{-}DISTR.NORM.ESTAND((LN(}A\mathbf{)\text{-}(}\mu\mathbf{+}\sigma^2\mathbf{))/RAIZ(}\sigma^2\mathbf{)))} \\ \mathbf{-\ }A\mathbf{^*(1\text{-}DISTR.NORM.ESTAND((LN(}A\mathbf{)\text{-}}\mu\mathbf{)/RAIZ(}\sigma^2\mathbf{)))}\end{array}}$$

El ***descuento técnico δ*** será, utilizando una *hoja de cálculo Excel*:

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{= DISTR.NORM.ESTAND((LN(}A\mathbf{)\text{-}(\ }\mu\mathbf{+}\sigma^2\mathbf{))/RAIZ(}\sigma^2\mathbf{)))} \\ \mathbf{+\ (}A\mathbf{/c)^*(1\text{-}DISTR.NORM.ESTAND((LN(}A\mathbf{)\text{-}\ }\mu\mathbf{)/RAIZ(}\sigma^2\mathbf{)))}\end{array}}$$

En una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo de la ***Desviación típica*** sería:

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{= RAIZ(EXP(2^*(}\mu\mathbf{+}\sigma^2\mathbf{))^*(1\text{-}DISTR.NORM.ESTAND((LN(}A\mathbf{)\text{-}} \\ \mathbf{(}\mu\mathbf{+2^*}\sigma^2\mathbf{))/RAIZ(}\sigma^2\mathbf{)))\text{-}} \\ \mathbf{-\ 2^*}A\mathbf{^*EXP(}\mu\mathbf{+}\sigma^2\mathbf{/2)^*(1\text{-}DISTR.NORM.ESTAND((LN(}A\mathbf{)\text{-}} \\ \mathbf{(}\mu\mathbf{+}\sigma^2\mathbf{))/RAIZ(}\sigma^2\mathbf{)))+}\end{array}}$$

+ POTENCIA(A;2)*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(A)-μ))/RAIZ(σ^2)))-
- POTENCIA(c;2)*POTENCIA((1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(A)-(μ+σ^2))/RAIZ(σ^2))) - A*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(A)-μ)/RAIZ(σ^2)));2))

Todos los anteriores cálculos con la distribución lognormal son susceptibles de ser ***programados*** en ***Visual Basic para Excel*** de la siguiente forma:

En primer lugar programamos la función FrAbsLogNorm(A,media,desvtip) que calcula el coste medio sujeto a Franquicia Absoluta "A" correspondiente a una distribución Logarítmico Normal con coste medio "media" y desviación típica "desvtip":

```
'-----------------------------------------------------------------
--
' ----- Franquicia Absoluta LogNormal
'-----------------------------------------------------------------
--
Function FrAbsLogNorm(A, media, desvtip)
' función que calcula el coste medio con franquicia absoluta
estocástica
' en una distribución logarítmico normal
Dim coefvar As Double                ' coeficiente de variación
Dim mx As Double, s2x As Double      ' parámetros del modelo
Dim cmedio As Double                 ' coste medio
Dim x1 As Double, x2 As Double       ' variables intermedias
coefvar = desvtip / media
mx = Log(media / Sqr(1 + coefvar ^ 2))
s2x = Log(1 + coefvar ^ 2)
cmedio = Exp(mx + s2x / 2)
x1 = cmedio * (1 - Application.NormDist((Log(A) - (mx + s2x)) /
Sqr(s2x), 0, 1, True))
x2 = A * (1 - Application.NormDist((Log(A) - mx) / Sqr(s2x), 0, 1,
True))
FrAbsLogNorm = x1 - x2
End Function
```

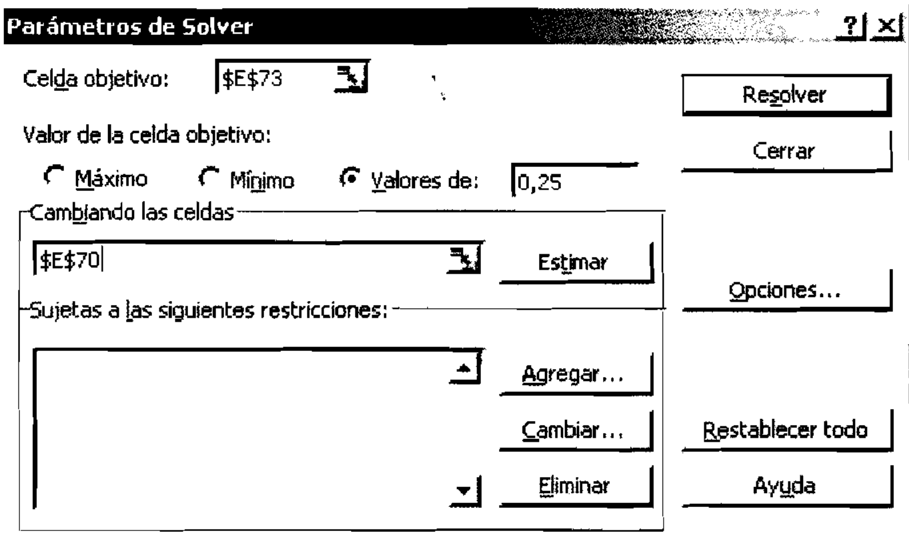
En segundo lugar programamos la función DTFrAbsLogNormal(A,media,desvtip) que calcula la Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Absoluta "A", coste medio sin franquicia "media" y desviación típica "desvtip":

```
'------------------------------------------------------------------
--
'----- Desv. Tipica Franquicia Absoluta / LogNormal
'------------------------------------------------------------------
--
Function DTFrAbsLogNorm(A, media, desvtip)
' función que calcula la desviación típica del coste con franquicia
' absoluta estocástica en una distribución LogNormal
Dim coefvar As Double                ' coeficiente de variación
Dim mx As Double, s2x As Double      ' parámetros del modelo
Dim cmedio As Double                 ' coste medio
Dim x1 As Double, x2 As Double       ' variables intermedias
coefvar = desvtip / media
mx = Log(media / Sqr(1 + coefvar ^ 2))
s2x = Log(1 + coefvar ^ 2)
cmedio = Exp(mx + s2x / 2)
cA = FrAbsLogNorm(A, media, desvtip)
D1 = Exp(2 * (mx + s2x)) * (1 - Application.NormDist(Log(A), mx + 2 *
s2x, Sqr(s2x), True))
D2 = 2 * A * Exp(mx + s2x / 2) * (1 - Application.NormDist(Log(A), mx
+ s2x, Sqr(s2x), True))
D3 = A ^ 2 * (1 - Application.NormDist(Log(A), mx, Sqr(s2x), True))
DTFrAbsLogNorm = Sqr(D1 - D2 + D3 - cA ^ 2)
End Function
```

Por último introducimos en Excel los cálculos siguientes (las fórmulas vienen indicadas a la derecha de la celda en la que deben ser escritas):

	B	C	D	E	F
57	**Franquicia estocástica Logarítmico Normal**				
58					
59		muestra			
60			media	84.216,00	
61			desviación típica	158.611,00	
62			coef variación	1,88338320509	=E61/E60
63					
64		estimación			
65			m	10,5838918210	=LN(E60/RAIZ(1+E62^2))
66			σ^2	1,5144967699	=LN(1+E62^2)
67					
68		costes			
69			medio sin franquicia	84.216,00	=EXP(E65+E66/2)
70			franquicia	50.000,00	
71			medio con franquicia	50.433,50	=FrAbsLogNorm(E70;E60;E61)
72					
73			descuento	40,11%	=1-E71/E69
74			desviación tipica	152.408,37	=DTFrAbsLogNorm(E70;E60;E61)

En el caso de querer determinar el importe de la franquicia absoluta que determina un descuento dado, por ejemplo 25%, bastará con usar Solver en Excel estableciendo los parámetros indicados y pulsando el botón resolver para obtener el resultado:



La franquicia absoluta que produce un descuento del 25% en una distribución Gamma asciende a 25.575,72 pesetas.

4.- FRANQUICIA ESTOCÁSTICA DE LÍMITE MÁXIMO

Como se analizó en la parte correspondiente, se trata de un tipo de franquicia complementario de la franquicia absoluta, por lo que si δ_1 representara el descuento técnico correspondiente a la franquicia absoluta A y δ_2 representara el descuento técnico correspondiente a la franquicia de límite máximo A, se verificará obligatoriamente que $\boxed{\delta_1 + \delta_2 = 1}$.

Sea una franquicia con límite máximo de $\boldsymbol{M}$ unidades monetarias. Si el siniestro es de magnitud $\boldsymbol{X}$, su reparto será el siguiente:

Siniestro: X	**Asegurador**	**Asegurado**
$X<M$	X	0
$X\geq M$	M	$X-M$

Representamos por $\overline{c}^M$ el coste probable de un siniestro (de cuantía total X) a cargo del Asegurador en un seguro con franquicia con límite máximo M. Representemos por $\overline{c}_M$ el coste probable de un siniestro (de cuantía total X) a cargo del Asegurador en un seguro en el que existiera una franquicia absoluta M (a partir de ahora, siempre una expresión del tipo $\overline{c}_\alpha$ representará el coste probable de un siniestro con franquicia absoluta α). Se verificará:

$$\begin{aligned}
\overline{c}^M &= \int_0^M x\,f(x)dx + \int_M^\infty M\,f(x)dx = \\
&= \int_0^\infty x\,f(x)dx - \int_M^\infty x\,f(x)dx + \int_M^\infty M\,f(x)dx = \\
&= \overline{c} - \int_M^\infty (x-M)f(x)dx = \\
&= \overline{c} - \overline{c}_M
\end{aligned}$$

Así pues, el *coste probable con primer riesgo M* es el *coste probable sin franquicia menos* el *coste probable con franquicia absoluta M*:

$$\boxed{\overline{c} = \overline{c}^M + \overline{c}_M}$$

Es decir, las expresiones obtenidas para una franquicia absoluta nos sirven en la evaluación del descuento técnico de una franquicia con límite máximo:

4.1.- FRANQUICIA DE LÍMITE MÁXIMO (DIST. EXPONENCIAL)

$$\boxed{\overline{c}^M = \overline{c}\left(1 - e^{-\frac{M}{\overline{c}}}\right) = \overline{c}\cdot F(M)}$$

Puesto que:

$$\boxed{\overline{c}_M = \overline{c} \cdot e^{-\frac{M}{\overline{c}}}}$$

Descuento técnico por primer riesgo:

$$\boxed{\delta = 1 - \frac{\overline{c}^M}{\overline{c}} = e^{-\frac{M}{\overline{c}}} = \overline{F}(M)}$$

Si calculamos M en función de δ, resulta:

$$\boxed{M = -\overline{c} \cdot \ln \delta \quad \text{siendo} \quad 0 < \delta < 1}$$

4.2.- FRANQUICIA DE LÍMITE MÁXIMO (DIST. GAMMA)

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{c}^M &= \overline{c} - \overline{c}_M = \\ &= \overline{c} - \left[\overline{c} \cdot \overline{\Gamma}(M;\alpha+1,\beta) - M \cdot \overline{\Gamma}(M;\alpha,\beta)\right] = \\ &= \overline{c} \cdot \left(1 - \overline{\Gamma}(M;\alpha+1,\beta)\right) + M \cdot \overline{\Gamma}(M;\alpha,\beta) = \\ &= \overline{c} \cdot \Gamma(M;\alpha+1,\beta) + M \cdot \overline{\Gamma}(M;\alpha,\beta) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta &= 1 - \Gamma(M;\alpha+1,\beta) - \frac{M}{\overline{c}} \cdot \overline{\Gamma}(M;\alpha,\beta) = \\ &= \overline{\Gamma}(M;\alpha+1,\beta) - \frac{M}{\overline{c}} \cdot \overline{\Gamma}(M;\alpha,\beta) \end{aligned}}$$

4.3.- FRANQUICIA DE LÍMITE MÁXIMO (DIST. LOGNORMAL)

$$\overline{c}^{M} = \overline{c} \cdot \Phi\left(\frac{\ln M - \left(\mu + \sigma^{2}\right)}{\sigma}\right) + M \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln M - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$\delta = 1 - \Phi\left(\frac{\ln M - \left(\mu + \sigma^{2}\right)}{\sigma}\right) - \frac{M}{\overline{c}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln M - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

No efectuaremos cálculo alguno respecto a estos modelos por ser en todo complementarios a los de la franquicia absoluta, limitándonos a consignar las expresiones que les corresponden, y centrándonos en la franquicia compuesta de nuestro interés.

5.- FRANQUICIA COMPUESTA o MIXTA ESTOCÁSTICA

De entre los supuestos de franquicia compuesta que podríamos considerar, vamos a centrarnos en el de la siguiente ***franquicia mixta*** (que vamos a denominar ***F***), cuya eficiencia analizamos en el apartado correspondiente:

Sea ***X*** un siniestro parcialmente cubierto (íntegramente a cargo del asegurador si no existiera franquicia) por un seguro en el cual el reparto es el siguiente:

Siniestro: *X*	**Asegurador**	**Asegurado**
$X \leq A$	**0**	X
$A < X \leq [L-(1-\alpha)\cdot A]/\alpha$	$(1-\alpha)\cdot(X-A)$	$A+\alpha\cdot(X-A)$
$X > [L-(1-\alpha)\cdot A]/\alpha$	$X-L$	L

$[L-(1-\alpha)\cdot A]/\alpha$ es la abscisa del *punto de intersección* de las rectas **$A + \alpha\cdot(X-A)$** y **L**, es decir, el montante de siniestro a partir del cual se supera el límite máximo de participación del asegurado.

El ***coste probable del siniestro a cargo del Asegurador en un seguro con franquicia F*** será:

$$\begin{aligned}
\overline{c}^{F} &= \int_{A}^{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}}(1-\alpha)(x-A)f(x)dx + \int_{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}}^{\infty}(x-L)f(x)dx = \\
&= (1-\alpha)\left[\int_{A}^{\infty}(x-A)f(x)dx - \int_{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}}^{\infty}(x-A)f(x)dx\right] + \\
&+ \int_{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}}^{\infty}(x-L)f(x)dx = \\
&= (1-\alpha)\cdot\overline{c}_{A} + \int_{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}}^{\infty}\left[(x-L)-(1-\alpha)(x-A)\right]f(x)dx = \\
&\left\{(x-L)-(1-\alpha)(x-A) = -L+\alpha x+(1-\alpha) = x-\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}\right\} \\
&= (1-\alpha)\cdot\overline{c}_{A} + \alpha\cdot\overline{c}_{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}}
\end{aligned}$$

Así pues, el ***coste probable a cargo del Asegurador con franquicia F*** es una ***combinación lineal convexa*** de ***coste probable con franquicia absoluta A*** y del ***coste probable con franquicia absoluta $[L-(1-\alpha)\cdot A]/\alpha$***, siendo el escalar de la combinación α:

$$\boxed{\overline{c}^{F_2} = (1-\alpha)\cdot\overline{c}_{A} + \alpha\cdot\overline{c}_{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}}}$$

o bien

$$\boxed{\overline{c}^{(F)} = (1-\alpha)\cdot\overline{c}_{A} + \alpha\cdot\overline{c}_{B}}$$

Siendo

$$\boxed{B = \frac{L - (1-\alpha)A}{\alpha}}$$

Es decir, todas las expresiones de coste probable a cargo del Asegurador anteriormente obtenidas para el supuesto de ***franquicia absoluta*** (algunas farragosas, como el caso de la distribución lognormal) no limitan su aplicabilidad a dicho supuesto, sino que son de utilidad para casos de mucho mayor interés práctico en el mercado asegurador, cual es el de la presente franquicia mixta. Podríamos decir que la *franquicia absoluta* se constituye en un *pivote técnico* de aplicación a muchos otros supuestos más complejos e interesantes, mediante combinaciones lineales con la expresión de la franquicia absoluta.

Para profundizar en el análisis del efecto de la introducción de la franquicia mixta ***F*** en la distribución del coste de un siniestro, analizaremos la ***varianza*** de dicha distribución, que será:

$$\boxed{\sigma^{2(F)} = \int_A^{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}} (1-\alpha)^2 (x-A)^2 f(x)dx + \int_{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}}^{\infty} (x-L)^2 f(x)dx - \left(\overline{c}^{(F)}\right)^2}$$

o bien

$$\boxed{\sigma^{2(F)} = \int_A^B (1-\alpha)^2 (x-A)^2 f(x)dx + \int_B^{\infty} (x-L)^2 f(x)dx - \left(\overline{c}^{(F)}\right)^2}$$

El momento de segundo orden con relación al origen de la franquicia mixta será:

$$\boxed{\alpha_2^{(F)} = \int_A^B (1-\alpha)^2 (x-A)^2 f(x)dx + \int_B^{\infty} (x-L)^2 f(x)dx}$$

$$\boxed{\int_A^B (1-\alpha)^2 (x-A)^2 f(x)dx = \int_A^{\infty} (1-\alpha)^2 (x-A)^2 f(x)dx - \int_B^{\infty} (1-\alpha)^2 (x-A)^2 f(x)dx}$$

Operando:

$$-\int_B^{\infty}(1-\alpha)^2(x-A)^2 f(x)dx+\int_B^{\infty}(x-L)^2 f(x)dx=$$

$$=-\int_B^{\infty}(1-\alpha)^2\left[(x-B)+(B-A)\right]^2 f(x)dx+\int_B^{\infty}\left[(x-B)+(B-L)\right]^2 f(x)dx=$$

$$\begin{cases}\left[(x-B)+(B-A)\right]^2=(x-B)^2+(B-A)^2+2(x-B)(B-A)\\ \left[(x-B)+(B-L)\right]^2=(x-B)^2+(B-L)^2+2(x-B)(B-L)\end{cases}$$

$$=\left[1-(1-\alpha)^2\right]\int_B^{\infty}(x-B)^2 f(x)dx+\underbrace{\left[(B-L)^2-(1-\alpha)^2(B-A)^2\right]}_{=0}\underbrace{\int_B^{\infty}f(x)dx}_{\bar{F}(B)}+$$

$$+2\left[(B-L)-(1-\alpha)^2(B-A)\right]\underbrace{\int_B^{\infty}(x-B)f(x)dx}_{\hat{e}_B}$$

$$B=\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}\Rightarrow L=\alpha B+(1-\alpha)A$$

$$\Downarrow$$

$$B-L=B-\alpha B-(1-\alpha)A=(1-\alpha)(B-A)$$

$$\Downarrow$$

$$(B-L)^2=(1-\alpha)^2(B-A)^2$$

$$\Downarrow$$

$$(B-L)^2-(1-\alpha)^2(B-A)^2\equiv 0$$

$$2\left[(B-L)-(1-\alpha)^2(B-A)\right]=$$

$$=2\left[(1-\alpha)(B-A)-(1-\alpha)^2(B-A)\right]=$$

$$=2\alpha(1-\alpha)(B-A)$$

Por tanto, el momento de segundo orden con relación al origen será:

$$
\begin{aligned}
\alpha_2^{(F)} &= \int_A^B (1-\alpha)^2 (x-A)^2 f(x)dx + \int_B^\infty (x-L)^2 f(x)dx = \\
&= \int_A^\infty (1-\alpha)^2 (x-A)^2 f(x)dx - \int_B^\infty (1-\alpha)^2 (x-A)^2 f(x)dx + \int_B^\infty (x-L)^2 f(x)dx = \\
&= (1-\alpha)^2 \underbrace{\int_A^\infty (x-A)^2 f(x)dx}_{\alpha_{2,A}} + \left[1-(1-\alpha)^2\right] \underbrace{\int_B^\infty (x-B)^2 f(x)dx}_{\alpha_{2,B}} + \\
&+ 2\alpha(1-\alpha)(B-A) \underbrace{\int_B^\infty (x-B) f(x)dx}_{\overline{c}_B} = \\
&= (1-\alpha)^2 \alpha_{2,A} + \alpha(2-\alpha)\alpha_{2,B} + 2\alpha(1-\alpha)(B-A)\overline{c}_B
\end{aligned}
$$

Por tanto, la ***varianza*** de la distribución del coste de un siniestro a cargo del asegurador, neta de franquicia mixta F, será:

$$
\boxed{\sigma^{2(F)} = (1-\alpha)^2 \alpha_{2,A} + \alpha(2-\alpha)\alpha_{2,B} + 2\alpha(1-\alpha)(B-A)\overline{c}_B - \left(\overline{c}^{(F)}\right)^2}
$$

En consecuencia, para las distintas distribuciones del coste de un siniestro, tendríamos:

5.1.- FRANQUICIA MIXTA *F* CON DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

El ***coste probable del siniestro a cargo del Asegurador en un seguro con franquicia F*** será:

$$
\begin{aligned}
\overline{c}^{(F)}(Exp) &= (1-\alpha)\cdot \overline{c}_A + \alpha \cdot \overline{c}_{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}} = \\
&= (1-\alpha)\cdot \overline{c}\cdot e^{-\frac{A}{\overline{c}}} + \alpha \cdot \overline{c}\cdot e^{-\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha \overline{c}}} = \\
&= \overline{c}\left[(1-\alpha) e^{-\frac{A}{\overline{c}}} + \alpha e^{-\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha \overline{c}}} \right] \\
&= \overline{c}\left[(1-\alpha)\overline{F}_{Exp}(A) + \alpha \overline{F}_{Exp}(B) \right]
\end{aligned}
$$

Siendo

$$\boxed{B = \frac{L - (1 - \alpha)A}{\alpha}}$$

En consecuencia, el ***descuento técnico*** correspondiente a la franquicia ***F*** será:

$$\begin{aligned}
\delta^{(F)}(Exp) &= 1 - \left[(1-\alpha)\overline{F}_{Exp}(A) + \alpha\,\overline{F}_{Exp}(B)\right] = \\
&= 1 - \left[(1-\alpha)e^{-\frac{A}{\overline{c}}} + \alpha\, e^{-\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha\,\overline{c}}}\right] = \\
&= 1 - \left[(1-\alpha)e^{-\frac{A}{\overline{c}}} + \alpha\, e^{-\frac{B}{\alpha}}\right]
\end{aligned}$$

Utilicemos de nuevo la ***Estadística de Daños Propios del Seguro del Automóvil, Datos 1.995***, de ***UNESPA***, ***Distribución de la Cuantía del Siniestro*** en la ***Modalidad*** de ***Daños Propios sin franquicia***, categoría de ***Turismos*** (global para todo tipo de potencia). En dicha distribución, correspondiente a 290.608 siniestros, el ***Coste Medio del Siniestro*** es dc ***84.216 pesetas*** y la ***Desviación Típica*** de ***158.611 pesetas***.

Supongamos una ***Franquicia F*** definida por los siguientes parámetros (los mismos que los utilizados en el caso de franquicias estadísticas): a) ***Absoluta*** de ***50.000 pesetas***; b) complementada para el exceso con una ***proporcional*** del ***25%***; c) con un ***límite máximo*** de participación del asegurado de ***200.000 pesetas***.

El ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia F*** será:

$$\boxed{\overline{c}^{(F)}(Exp) = 84.216 \cdot \left[0,75 \cdot e^{\frac{50.000}{84.216}} + 0,25 \cdot e^{-\frac{650.000}{84.216}}\right] = 34.892}$$

que dará lugar a un ***descuento técnico*** del ***58,57%*** (recordemos que en el caso de las *franquicias estadísticas*, con la misma base de datos y para la misma cuantía de franquicia absoluta, obtuvimos un *descuento técnico* del *57,97%*, muy próximo al obtenido, de una manera muy sencilla, mediante la distribución exponencial).

Si utilizamos una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo del ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Mixta F*** sería:

= *c((1-α)*EXP(-*A*/*c*)+α*EXP(-(*L*-(1-α)**A*)/(α**c*)))**

El ***descuento técnico δ*** será, utilizando una *hoja de cálculo Excel*:

= 1 – ((1-α)*EXP(-*A*/*c*)+ α*EXP(-(*L*-(1-α)A*)/(α**c*))))**

La ***varianza*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia mixta *F* será:

$$\sigma^{2(F)}=(1-\alpha)^2\alpha_{2,A}+\alpha(2-\alpha)\alpha_{2,B}+2\alpha(1-\alpha)(B-A)\overline{c}_B-\left(\overline{c}^{(F)}\right)^2$$

Siendo

$$B=\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}$$

Los momentos de segundo orden de las franquicias absolutas *A* y *B* serán:

$$\alpha_{2,A}(Exp)=2\cdot\overline{c}^2\cdot e^{-\frac{A}{\overline{c}}}$$

$$\alpha_{2,B}(Exp)=2\cdot\overline{c}^2\cdot e^{-\frac{B}{\overline{c}}}$$

El coste probable neto de franquicia absoluta *B* será:

$$\boxed{\overline{c}_B\left(Exp\right)=\overline{c}\cdot e^{-\frac{B}{\overline{c}}}}$$

El coste probable neto de franquicia compuesta *F* hemos visto que era:

$$\boxed{\overline{c}^{(F)}\left(Exp\right)=\overline{c}\left[\left(1-\alpha\right)e^{-\frac{A}{\overline{c}}}+\alpha e^{-\frac{B}{\overline{c}}}\right]}$$

Por tanto, sustituyendo, nos resultaría:

$$\sigma^{2(F)}\left(Exp\right)=\left(1-\alpha\right)^2 2\cdot\overline{c}^2\cdot e^{-\frac{A}{\overline{c}}}+\alpha\left(2-\alpha\right)2\cdot\overline{c}^2\cdot e^{-\frac{B}{\overline{c}}}+$$
$$+2\alpha\left(1-\alpha\right)\left(B-A\right)\overline{c}\cdot e^{-\frac{B}{\overline{c}}}-\left(\overline{c}\left[\left(1-\alpha\right)e^{\frac{A}{\overline{c}}}+\alpha e^{-\frac{B}{\overline{c}}}\right]\right)^2$$

Operando, tendríamos:

$$\sigma^{2(F)}\left(Exp\right)=e^{-\frac{A}{\overline{c}}}2\left(1-\alpha\right)^2\overline{c}^2+$$
$$+e^{-\frac{B}{c}}2\alpha\overline{c}\left[\left(2-\alpha\right)\overline{c}+\left(1-\alpha\right)\left(B-A\right)\right]-$$
$$-\left(\overline{c}\left[\left(1-\alpha\right)e^{-\frac{A}{\overline{c}}}+\alpha e^{-\frac{B}{c}}\right]\right)^2$$

o bien

$$\sigma^{2(F)}\left(Exp\right)=\overline{c}^2\left(1-\alpha\right)e^{\frac{A}{\overline{c}}}\left[\left(1-\alpha\right)\left(2-e^{-\frac{A}{\overline{c}}}\right)-2\alpha e^{-\frac{B}{\overline{c}}}\right]+$$
$$+\overline{c}\alpha e^{-\frac{B}{\overline{c}}}\left[2\left(2-\alpha\right)\overline{c}+2\left(1-\alpha\right)\left(B-A\right)-\overline{c}\alpha e^{-\frac{B}{\overline{c}}}\right]$$

¿Podria ser ésta expresión negativa?. Evidentemente, sí, aunque si ***B*** es suficientemente grande (límite superior ***L*** grande), es prácticamente imposible.

La ***desviación típica*** de la distribución del coste de un siniestro ***sin franquicia*** en la hipótesis exponencial coincide con el ***coste probable***, estimado en ***84.216 pesetas***. Con ***franquicia mixta F*** será:

$$\begin{aligned}\sigma^{2(F)}(Exp) = {} & e^{-\frac{50.000}{84.216}}\cdot 2\cdot 0,75^2\cdot 84.216^2 + \\ & + e^{-\frac{650.000}{84.216}}\cdot 2\cdot 0,25\cdot 84.216\left[1,75\cdot 84.216 + 0,75\cdot(650.000-50.000)\right] \\ & -34.892^2 = 3.200.227.724\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma^{(F)}(Exp) = 56.571}$$

lo que supone una reducción del ***32,83%*** (frente al *16,10%* que estimaba el modelo de *franquicias estadísticas*, con la misma base de datos y para los mismos parámetros característicos de la franquicia compuesta).

Si utilizamos una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo de la ***Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Mixta F*** sería:

B = (L-(1-α)*A)/α

= RAIZ(EXP(-*A*/*c*)*2*POTENCIA((1-α)*c;2)+
+ EXP(-*B*/*c*)*2*α*c*((2-α)*c + (1-α)*(*B*-A)) –
- POTENCIA(*c((1-α)*EXP(-*A*/*c*)+α*EXP(-*B*/*c*));2))**

Todos los anteriores cálculos con la distribución exponencial son susceptibles de ser ***programados*** en ***Visual Basic para Excel*** de la siguiente forma:

En primer lugar programamos la función FrCompExp(A, L, alpha, media) que calcula el coste medio sujeto a Franquicia Compuesta "A" correspondiente a una distribución Exponencial con coste medio "media" siendo el significado de los parámetros L y alpha es el mismo que en el desarrollo anterior:

```
' ----------------------------------------------------------------------
---------------
' ----- Franquicia Compuesta Exponencial
' ----------------------------------------------------------------------
---------------
Function FrCompExp(A, L, alpha, media)
' función que calcula el coste medio con franquicia compuesta
estocástica
' en una distribución exponencial
Dim c1 As Double, c2 As Double
c1 = FrAbsExp(A, media)
c2 = FrAbsExp((L - (1 - alpha) * A) / alpha, media)
FrCompExp = (1 - alpha) * c1 + alpha * c2
End Function
```

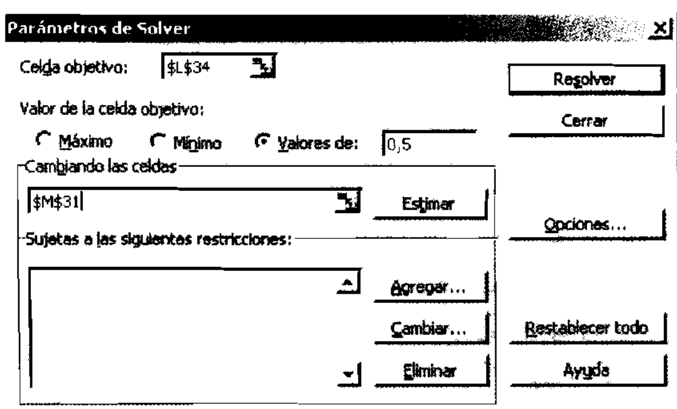
En segundo lugar programamos la función DTFrAbsLogNormal(A, L, alpha, media) que calcula la Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Compuesta "A", parámetros de la franquicia A y alpha y coste medio sin franquicia "media":

```
'  ---------------------------------------------------------------------
---------------
'----- Desv. Típica Franquicia Compuesta / Exponencial
'  ---------------------------------------------------------------------
---------------
Function DTFrCompExp(A, L, alpha, media)
' función que calcula la desviación típica del coste con franquicia
' absoluta estocástica en una distribución exponencial
Dim CF As Double, B As Double, A2A As Double, A2B As Double, CB As
Double, Var As Double
CF = FrCompExp(A, L, alpha, media)
B = (L - (1 - alpha) * A) / alpha
A2A = 2 * media ^ 2 * Exp(-A / media)
A2B = 2 * media ^ 2 * Exp(-B / media)
CB = media * Exp(-B / media)
Var = (1 - alpha) ^ 2 * A2A + alpha * (2 - alpha) * A2B
Var = Var + 2 * alpha * (1 - alpha) * (B - A) * CB - CF ^ 2
DTFrCompExp = Sqr(Var)
End Function
```

Por último introducimos en Excel los cálculos siguientes (las fórmulas vienen indicadas a la derecha de la celda en la que deben ser escritas):

	I	J	K	L	M	N	O
21	Franquicia compuesta estocástica Exponencial				L	alpha	
22							
23		muestra					
24			media	84.216,00			
25							
26		estimación					
27			m	84216,0000			=L24
28							
29		costes					
30			medio sin franquicia	84.216,00			=L27
31			franquicia	50.000,00	200.000,00	25%	
32			medio con franquicia	34.892,08			=frcompexp(L31;M31;N31;L24)
33							
34			descuento	58,57%			=1-L32/L30
35			desviación típica	56.570,77			=DTFrCompExp(L31;M31;N31;L24)

En el caso de querer determinar el importe de la franquicia absoluta que determina un descuento dado, por ejemplo 50% variando el límite máximo L, bastará con usar Solver:



El límite máximo que produce un descuento del 50% en una distribución Exponencial asciende a 60.017,27 pesetas.

5.2.- FRANQUICIA MIXTA *F* CON DISTRIBUCIÓN GAMMA $\Gamma(a,b)$[12]

El ***coste probable del siniestro a cargo del Asegurador en un seguro con franquicia F*** será:

$$\begin{aligned}
\bar{c}^{(F)}(\Gamma) &= (1-\alpha)\cdot\left[\bar{c}\cdot\bar{\Gamma}(A;a+1,b) - A\cdot\bar{\Gamma}(A;a,b)\right] + \\
&+\alpha\cdot\left[\bar{c}\cdot\bar{\Gamma}\left(\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha};a+1,b\right) - \right.\\
&\left.-\left(\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}\right)\cdot\bar{\Gamma}\left(\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha};a,b\right)\right] = \\
&= \bar{c}\left[(1-\alpha)\cdot\bar{\Gamma}(A;a+1,b) + \alpha\cdot\bar{\Gamma}\left(\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha};a+1,b\right)\right] - \\
&-\left[(1-\alpha)\cdot A\cdot\bar{\Gamma}(A;a,b) + \{L-(1-\alpha)A\}\cdot\bar{\Gamma}\left(\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha};a,b\right)\right] \\
&= \bar{c}\left[(1-\alpha)\cdot\bar{\Gamma}(A;a+1,b) + \alpha\cdot\bar{\Gamma}(B;a+1,b)\right] - \\
&-\left[(1-\alpha)\cdot A\cdot\bar{\Gamma}(A;a,b) + \alpha\cdot B\cdot\bar{\Gamma}(B;a,b)\right]
\end{aligned}$$

En consecuencia, el ***descuento técnico*** correspondiente a la franquicia ***F*** será:

$$\begin{aligned}
\delta^{F}(\Gamma) &= \Gamma(A;a+1,b) + \\
&+\alpha\cdot\left[\bar{\Gamma}(A;a+1,b) + \bar{\Gamma}\left(\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha};a+1,b\right)\right] + \\
&+\frac{(1-\alpha)A}{\bar{c}}\cdot\bar{\Gamma}(A;a,b) + \\
&+\frac{L-(1-\alpha)A}{\bar{c}}\bar{\Gamma}\left(\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha};a,b\right) = \\
&= \Gamma(A;a+1,b) + \\
&+\alpha\cdot\left[\bar{\Gamma}(A;a+1,b) + \bar{\Gamma}(B;a+1,b)\right] + \\
&+\frac{(1-\alpha)A}{\bar{c}}\cdot\bar{\Gamma}(A;a,b) + \frac{\alpha B}{\bar{c}}\bar{\Gamma}(B;a,b)
\end{aligned}$$

[12] Dado que estamos utilizando el parámetro α para representar la franquicia proporcional que incorpora la franquicia mixta que se analiza, hemos considerado oportuno representar a los parámetros de la distribución gamma en esta franquicia por "*a*" y "*b*", $\Gamma(a,b)$.

Utilicemos de nuevo la ***Estadística de Daños Propios del Seguro del Automóvil, Datos 1.995***, de ***UNESPA***, ***Distribución de la Cuantía del Siniestro*** en la ***Modalidad*** de ***Daños Propios sin franquicia***, categoría de ***Turismos*** (global para todo tipo de potencia), y supongamos una ***Franquicia F*** definida por los mismos parámetros que el caso anterior: a) ***Absoluta*** de ***50.000 pesetas***; b) complementada para el exceso con una ***proporcional*** del ***25%***; c) con un ***límite máximo*** de participación del asegurado de ***200.000 pesetas***.

El ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia F*** será:

$$\begin{aligned}\bar{c}^F(\Gamma) = {} & 84.216\cdot\big[0,75\cdot\bar{\Gamma}(50.000;1,2819;3,3476\text{E-}06)+\\ & +0,25\cdot\bar{\Gamma}(650.000;1,2819;3,3476\text{E-}06)\big]-\\ & -\big[0,75\cdot 50.000\cdot\bar{\Gamma}(50.000;0,2819;3,3476\text{E-}06)+\\ & +0,25\cdot 650.000\cdot\bar{\Gamma}(650.000;0,2819;3,3476\text{E-}06)\big]=\\ = {} & 45.907\end{aligned}$$

que dará lugar a un ***descuento técnico*** del ***45,49%***, menor que el obtenido antes utilizando la distribución exponencial.

Si utilizamos una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo del ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Mixta F*** sería:

= *c((1-α)*(1-DISTR.GAMMA(A;*a*+1;1/*b*;VERDADERO))+ α *(1-DISTR.GAMMA((L-(1- α)*A)/ α);*a*+1;1/*b*;VERDADERO)))-(1- α)*A*(1-DISTR.GAMMA(A;*a*;1/*b*))+ (L-(1- α)*A)*(1-DISTR.GAMMA((L-(1- α)*A)/ α);*a*;1/*b*;VERDADERO)))**

La ***varianza*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia mixta ***F*** será:

$$\sigma^{2(F)} = (1-\alpha)^2\,\alpha_{2,A} + \alpha(2-\alpha)\alpha_{2,B} + 2\alpha(1-\alpha)(B-A)\bar{c}_B - \left(\bar{c}^{(F)}\right)^2$$

Siendo

$$\boxed{B = \frac{L - (1 - \alpha) A}{\alpha}}$$

Los momentos de segundo orden de las franquicias absolutas A y B serán:

$$\boxed{\alpha_{2,A}(\Gamma) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}\overline{\Gamma}(A;a+2,b) - 2A\frac{\alpha}{\beta}\overline{\Gamma}(A;a+1,b) + A^2\overline{\Gamma}(A;a,b)}$$

$$\boxed{\alpha_{2,B}(\Gamma) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}\overline{\Gamma}(B;a+2,b) - 2B\frac{\alpha}{\beta}\overline{\Gamma}(B;a+1,b) + B^2\overline{\Gamma}(B;a,b)}$$

El coste probable neto de franquicia absoluta B será:

$$\boxed{\overline{c}_B(\Gamma) = \overline{c}\cdot\overline{\Gamma}(B;a+1,b) - B\cdot\overline{\Gamma}(B;a,b)}$$

El coste probable neto de franquicia compuesta F hemos visto que era:

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{c}^{(F)}(\Gamma) = {} & \overline{c}\left[(1-\alpha)\cdot\overline{\Gamma}(A;a+1,b) + \alpha\cdot\overline{\Gamma}(B;a+1,b)\right] - \\ & -\left[(1-\alpha)\cdot A\cdot\overline{\Gamma}(A;a,b) + \alpha\cdot B\cdot\overline{\Gamma}(B;a,b)\right]\end{aligned}}$$

Sustituyendo obtendríamos la varianza de coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia mixta ***F***.

¿Podría ser ésta expresión negativa? Evidentemente, sí.

La ***desviación típica*** de la distribución del coste de un siniestro ***sin franquicia*** en la hipótesis gamma coincide con el valor empírico ***158.611 pesetas***. Con ***franquicia mixta F*** será:

$$\alpha_{2,50.000}(\Gamma)=\frac{0{,}2819\cdot 1{,}2819}{(3{,}3476E\text{-}06)^2}\overline{\Gamma}(50.000;2{,}2819;3{,}3476E\text{-}06)-$$
$$-100.000\frac{0{,}2819}{3{,}3476E\text{-}06}\overline{\Gamma}(50.000;1{,}2819;3{,}3476E\text{-}06)+$$
$$+50.000^2\overline{\Gamma}(50.000;0{,}2819;3{,}3476E\text{-}06)=25.197.290.568$$

$$\alpha_{2,650.000}(\Gamma)=\frac{0{,}2819\cdot 1{,}2819}{(3{,}3476E\text{-}06)^2}\overline{\Gamma}(650.000;2{,}2819;3{,}3476E\text{-}06)-$$
$$-2\cdot 650.000\frac{0{,}2819}{3{,}3476E\text{-}06}\overline{\Gamma}(650.000;1{,}2819;3{,}3476E\text{-}06)+$$
$$+650.000^2\overline{\Gamma}(650.000;0{,}2819;3{,}3476E\text{-}06)=\ 2.072.584.262$$

$$\overline{c}_{650.000}(\Gamma)=84.216\cdot\overline{\Gamma}(650.000;1{,}2819;3{,}3476E\text{-}06)-$$
$$-650.000\cdot\overline{\Gamma}(650.000;0{,}2819;3{,}3476E\text{-}06)=4.037$$

$$\sigma^{2(F)}(\Gamma)=0{,}75^2\cdot 25.197.290.568+0{,}25\cdot 1{,}75\cdot 2.072.584.262+$$
$$+2\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75\cdot 600.000\cdot 4.037-2.107.421.985=13.881.176.008$$

$$\boxed{\sigma^{(F)}(\Gamma)=117.818}$$

lo que supone una reducción del ***25,72%*** (frente al *32,83%* quc estimaba el modelo de *exponencial* y el *16,10%* que estimaba el modelo de *franquicias estadísticas*, con la misma base de datos y para los mismos parámetros característicos de la franquicia compuesta).

Si utilizamos una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo de la ***Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Mixta F*** sería:

***B* = (*L*-(1-α)**A*)/α**

$\alpha_{2,A}$ = α*(α+1)*POTENCIA(β;2)*(1-DISTR.GAMMA(*A*;*a*+2;1/*b*;VERDADERO))-
-2A**α*β*(1-DISTR.GAMMA(*A*;*a*+1;1/*b*;VERDADERO)))+**
POTENCIA(*A*;2)*(1-DISTR.GAMMA(*A*;*a*;1/*b*;VERDADERO)))

$\alpha_{2,B}$ = α*(α+1)*POTENCIA(β;2)*(1-DISTR.GAMMA(*B*;*a*+2;1/*b*;VERDADERO))--2**B**α*β*(1-DISTR.GAMMA(*B*;*a*+1;1/*b*;VERDADERO)))+POTENCIA(*B*;2)*(1-DISTR.GAMMA(*B*;*a*;1/*b*;VERDADERO)))

c_B = *c**(1-DISTR.GAMMA(*B*;*a*+1;1/*b*;VERDADERO)) – - *B**(1-DISTR.GAMMA(*B*;*a*;1/*b*;VERDADERO)

c^F = *c**((1- α)*(1-DISTR.GAMMA(*A*;*a*+1;1/*b*;VERDADERO))+ α *(1-DISTR.GAMMA(*B*;*a*+1;1/*b*;VERDADERO)))-(1- α)**A**(1-DISTR.GAMMA(A;*a*;1/*b*))+ α **B**(1-DISTR.GAMMA(*B*;*a*;1/*b*;VERDADERO)))

$\sigma^{2(F)}$ = POTENCIA(1-α;2)*$\alpha_{2,A}$ + α*(2-α)*$\alpha_{2,B}$ + 2*α*(1-α)*(*B*-*A*)*c_B - POTENCIA(c^F ;2)

Todos los anteriores cálculos con la distribución gamma son susceptibles de ser ***programados*** en ***Visual Basic para Excel*** de la siguiente forma:

En primer lugar programamos la función FrCompGamma(A, L, r, media, desvtip) que calcula el coste medio sujeto a Franquicia Compuesta "A" siendo la distribución Gamma:

```
' ----------------------------------------------------------------------
---------------
' ----- Franquicia Compuesta Gamma
' ----------------------------------------------------------------------
---------------
Function FrCompGamma(A, L, r, media, desvtip)
' función que calcula el coste medio con franquicia compuesta
estocástica
' en una distribución Gamma
Dim alpha As Double, beta As Double
Dim g1 As Double, g2 As Double, g3 As Double, g4 As Double
Dim cmedio As Double, B As Double
alpha = (media / desvtip) ^ 2
beta = media / desvtip ^ 2
cmedio = alpha / beta
B = (L - (1 - r) * A) / r
g1 = 1 - Application.GammaDist(A, alpha + 1, 1 / beta, True)
g2 = 1 - Application.GammaDist(B, alpha + 1, 1 / beta, True)
g3 = 1 - Application.GammaDist(A, alpha, 1 / beta, True)
g4 = 1 - Application.GammaDist(B, alpha, 1 / beta, True)
FrCompGamma = cmedio * ((1 - r) * g1 + r * g2)
FrCompGamma = FrCompGamma - ((1 - r) * A * g3 + r * B * g4)
End Function
```

En segundo lugar programamos la función DTFrCompGamma(A, L, r, media, desvtip) que calcula la Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Compuesta y distribución Gamma:

```
' ----------------------------------------------------------------------------
-----
' ----- Desv. Típica Franquicia Compuesta / Gamma
' ----------------------------------------------------------------------------
-----
Function DTFrCompGamma(A, L, r, media, desvtip)
' función que calcula la desviación típica del coste con franquicia
' absoluta estocástica en una distribución exponencial
Dim CF As Double, B As Double, A2A As Double, A2B As Double, CB As Double, Var
As Double
Dim alpha As Double, beta As Double
CF = FrCompGamma(A, L, r, media, desvtip)
alpha = (media / desvtip) ^ 2
beta = media / desvtip ^ 2
cmedio = alpha / beta
B = (L - (1 - r) * A) / r
A2A = alpha * (alpha + 1) / beta ^ 2 * (1 - Application.GammaDist(A, alpha + 2,
1 / beta, True))
A2A = A2A - 2 * A * alpha / beta * (1 - Application.GammaDist(A, alpha + 1, 1 /
beta, True))
A2A = A2A + A ^ 2 * (1 - Application.GammaDist(A, alpha, 1 / beta, True))

A2B = alpha * (alpha + 1) / beta ^ 2 * (1 - Application.GammaDist(B, alpha + 2,
1 / beta, True))
A2B = A2B - 2 * B * alpha / beta * (1 - Application.GammaDist(B, alpha + 1, 1 /
beta, True))
A2B = A2B + B ^ 2 * (1 - Application.GammaDist(B, alpha, 1 / beta, True))

CB = media * (1 - Application.GammaDist(B, alpha + 1, 1 / beta, True))
CB = CB - B * (1 - Application.GammaDist(B, alpha, 1 / beta, True))

Var = (1 - r) ^ 2 * A2A + r * (2 - r) * A2B
Var = Var + 2 * r * (1 - r) * (B - A) * CB - CF ^ 2
DTFrCompGamma = Sqr(Var)
End Function
```

Por último introducimos en Excel los cálculos siguientes (las fórmulas vienen indicadas a la derecha de la celda en la que deben ser escritas):

	I	J	K	L	M	N	O
37	Franquicia compuesta estocástica Gamma						
38							
39		muestra					
40			media	84.216,00			
41			desviación típica	158.611,00			
42							
43		estimación					
44			α	0,2819178751			=(L40/L41)^2
45			β	0,0000033476			=L40/L41^2
46							
47		costes					
48			medio sin franquicia	84.216,00			=L44/L45
49			franquicia	50.000,00	200.000,00	25%	
50			medio con franquicia	45.906,82			=frcompgamma(L49;M49;N49;L40;L41)
51							
52			descuento	45,49%			=1-L50/L48
53			desviación típica	117.818,55			=DTFrCompGamma(L49;M49;N49;L40;L41)

5.3.- FRANQUICIA MIXTA *F* CON DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

El ***coste probable del siniestro a cargo del Asegurador en un seguro con franquicia F*** será:

$$\overline{c}^{F} = (1-\alpha)\cdot\overline{c}_{A} + \alpha\cdot\overline{c}_{\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}} =$$

$$= (1-\alpha)\left\{\overline{c}\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-\left(m+\sigma^{2}\right)}{\sigma}\right)\right]-A\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln A-m}{\sigma}\right)\right]\right\}+$$

$$+\alpha\cdot\left\{\overline{c}\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}\right)-\left(m+\sigma^{2}\right)}{\sigma}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}\right)\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}\right)-m}{\sigma}\right)\right]\right\}$$

o, expresado de una manera más simple:

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{c}^F(LN) &= (1-\alpha)\left[\overline{c}\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln A-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)-A\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln A-\mu}{\sigma}\right)\right]+\\ &+\alpha\cdot\left[\overline{c}\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln B-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)-B\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln B-\mu}{\sigma}\right)\right]\end{aligned}}$$

Siendo

$$\boxed{B=\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}}$$

Utilicemos de nuevo la ***Estadística de Daños Propios del Seguro del Automóvil, Datos 1.995***, de ***UNESPA***, ***Distribución de la Cuantía del Siniestro*** en la ***Modalidad*** de ***Daños Propios sin franquicia***, categoría de ***Turismos*** (global para todo tipo de potencia), y supongamos una ***Franquicia F*** definida por los mismos parámetros que el caso anterior: a) ***Absoluta*** de ***50.000 pesetas***; b) complementada para el exceso con una ***proporcional*** del ***25%***; c) con un ***límite máximo*** de participación del asegurado de ***200.000 pesetas***.

El ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia F*** será:

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{c}^F(LN) &= 0,75\cdot\left[84.216\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln 50.000-(10,5839+1,5145)}{\sqrt{1,5145}}\right)-\right.\\ &\left.-50.000\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln 50.000-10,5839}{\sqrt{1,5145}}\right)\right]+\\ &+0,25\cdot\left[84.216\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln 650.000B-(10,5839+1,5145)}{\sqrt{1,5145}}\right)-\right.\\ &\left.-650.000\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln 650.000-10,5839}{\sqrt{1,5145}}\right)\right]=39.083\end{aligned}}$$

que dará lugar a un ***descuento técnico*** del ***53,59%***, acusadamente inferior al obtenido en los casos anteriores.

Si utilizamos una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo del ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Mixta F*** sería:

= (1-α)*(*c(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(*A*)-(*μ*+σ²))/RAIZ(σ²)))-**
- *A(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(*A*)-*μ*)/RAIZ(σ²))))+**
+α*(*c(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(*B*)-(*μ*+ σ²))/RAIZ(σ²)))-**
- *B(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(*B*)-*μ*)/RAIZ(σ²))))**

La ***varianza*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia mixta ***F*** será:

$$\sigma^{2(F)}=(1-\alpha)^2\alpha_{2,A}+\alpha(2-\alpha)\alpha_{2,B}+2\alpha(1-\alpha)(B-A)\overline{c}_B-\left(\overline{c}^{(F)}\right)^2$$

Siendo

$$B=\frac{L-(1-\alpha)A}{\alpha}$$

Los momentos de segundo orden de las franquicias absolutas A y B serán:

$$\alpha_{2,A}(LN)=e^{2(\mu+\sigma^2)}\overline{\Phi}\left(\frac{\ln A-(\mu+2\sigma^2)}{\sigma}\right)-2Ae^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\overline{\Phi}\left(\frac{\ln A-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)+A^2\overline{\Phi}\left(\frac{\ln A-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\alpha_{2,B}(LN)=e^{2(\mu+\sigma^2)}\overline{\Phi}\left(\frac{\ln B-(\mu+2\sigma^2)}{\sigma}\right)-2Be^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\overline{\Phi}\left(\frac{\ln B-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)+B^2\overline{\Phi}\left(\frac{\ln B-\mu}{\sigma}\right)$$

El coste probable neto de franquicia absoluta B será:

$$\overline{c}_B(LN)=\overline{c}\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln B-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)-B\cdot\Phi\left(\frac{\ln B-\mu}{\sigma}\right)$$

El coste probable neto de franquicia compuesta F hemos visto que era:

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{c}^{F}(LN) = (1-\alpha)\left[\overline{c}\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln A-(\mu+\sigma^{2})}{\sigma}\right)-A\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln A-\mu}{\sigma}\right)\right]+\\ +\alpha\cdot\left[\overline{c}\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln B-(\mu+\sigma^{2})}{\sigma}\right)-B\cdot\overline{\Phi}\left(\frac{\ln B-\mu}{\sigma}\right)\right]\end{aligned}}$$

¿Podría ser ésta expresión negativa? Evidentemente, sí, y en los dos supuestos que planteamos en este trabajo, sucederá, por lo que el modelo lognormal presenta dificultades en relación con la varianza de la distribución neta de franquicia.

En efecto, la ***desviación típica*** de la distribución del coste de un siniestro ***sin franquicia*** en la hipótesis lognormal coincide con el valor empírico ***158.611 pesetas***. Con ***franquicia mixta F*** sería:

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha_{2,50.000}(LN) = e^{2(10,5839+1,5145)}\overline{\Phi}\left(\frac{\ln 50.000-(10,5839+2\cdot 1,5145)}{\sqrt{1,5145}}\right)-\\ -100.000e^{10,5839+1,5145/2}\overline{\Phi}\left(\frac{\ln 50.000-(10,5839+1,5145)}{\sqrt{1,5145}}\right)+\\ +50.000^{2}\,\overline{\Phi}\left(\frac{\ln 50.000-10,5839}{\sqrt{1,5145}}\right)=25.771.773.387\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha_{2,650.000}(LN) = e^{2(10,5839+1,5145)}\overline{\Phi}\left(\frac{\ln 650.000-(10,5839+2\cdot 1,5145)}{\sqrt{1,5145}}\right)-\\ -1.300.000e^{10,5839+1,5145/2}\overline{\Phi}\left(\frac{\ln 650.000-(10,5839+1,5145)}{\sqrt{1,5145}}\right)+\\ +650.000^{2}\,\overline{\Phi}\left(\frac{\ln 650.000-10,5839}{\sqrt{1,5145}}\right)=7.125.985.062\end{aligned}}$$

Operando nos resulta un valor de ***Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Mixta F*** de ***131.222 pesetas***

$$\boxed{\sigma^{(F)}(LN)=131.222}$$

lo que supone una reducción del ***17,27%*** (frente al *14,12%* que estimaba el modelo *gamma*, el *32,83%* que estimaba el modelo *exponencial* y el *16,10%* que estimaba el modelo de *franquicias estadísticas*, con la misma base de datos y para los mismos parámetros característicos de la franquicia compuesta).

Si utilizamos una *hoja de cálculo Excel*, la fórmula de cálculo de la ***Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Mixta F*** sería:

$$\boxed{\mathbf{B = (L\text{-}(1\text{-}\alpha)^*A)/\alpha}}$$

$\alpha_{2,A}$ = EXP(2*(μ+σ^2))*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(A)-(μ+2*σ^2))/RAIZ(σ^2))) - 2*A*EXP(μ+ σ^2/2)*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(A)-(μ+σ^2))/RAIZ(σ^2))) + POTENCIA(A;2)*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(A)-μ))/RAIZ(σ^2)))

$\alpha_{2,B}$ = EXP(2*(μ+ σ^2))*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(B)-(μ+2*σ^2))/RAIZ(σ^2))) - 2*B*EXP(μ+ σ^2/2)*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(B)-(μ+σ^2))/RAIZ(σ^2))) + POTENCIA(B;2)*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(B)-μ))/RAIZ(σ^2)))

c_B = c*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(B)-(μ+ σ^2))/RAIZ(σ^2)))
- B*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(B)-μ)/RAIZ(σ^2)))

c^F = (1-α)*(c*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(A)-(μ+ σ^2))/RAIZ(σ^2)))-
- A*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(A)-μ)/RAIZ(σ^2))))+
+α*(c*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(B)-(μ+ σ^2))/RAIZ(σ^2)))-
- B*(1-DISTR.NORM.ESTAND((LN(B)-μ)/RAIZ(σ^2))))

$\sigma^{2(F)}$ = POTENCIA(1-α;2)*$\alpha_{2,A}$ + α*(2-α)*$\alpha_{2,B}$ + 2*α*(1-α)*(B-A)*c_B - POTENCIA(c^F ;2)

Todos los anteriores cálculos con la distribución gamma son susceptibles de ser ***programados*** en ***Visual Basic para Excel*** de la siguiente forma:

En primer lugar programamos la función FrCompLogNorm(A, L, r, media, desvtip) que calcula el coste medio sujeto a Franquicia Compuesta "A" siendo la distribución LogNormal:

```
' -----------------------------------------------------------------
---------------
' ----- Franquicia Compuesta LogNormal
' -----------------------------------------------------------------
---------------
Function FrCompLogNorm(A, L, r, media, desvtip)
' función que calcula el coste medio con franquicia compuesta
estocástica
' en una distribución logarítmico normal
Dim c1 As Double, c2 As Double
c1 = FrAbsLogNorm(A, media, desvtip)
c2 = FrAbsLogNorm((L - (1 - r) * A) / r, media, desvtip)
FrCompLogNorm = (1 - r) * c1 + r * c2
End Function
```

En segundo lugar programamos la función DTFrCompLogNorm(A, L, r, media, desvtip) que calcula la Desviación Típica del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia Compuesta y distribución LogNormal:

```
Function DTFrCompLogNorm(A, L, r, media, desvtip)
' función que calcula la desviación típica del coste con franquicia
' absoluta estocástica en una distribución LogNormal
Dim coefvar As Double                   ' coeficiente de variación
Dim mx As Double, s2x As Double         ' parámetros del modelo
Dim cmedio As Double                    ' coste medio
Dim B As Double, CA As Double, CB As Double, CF As Double
Dim D1 As Double, D2 As Double, res As Double
coefvar = desvtip / media
mx = Log(media / Sqr(1 + coefvar ^ 2))
s2x = Log(1 + coefvar ^ 2)
cmedio = Exp(mx + s2x / 2)

CA = FrAbsLogNorm(A, media, desvtip)
B = (L - (1 - r) * A) / r
CB = FrAbsLogNorm(B, media, desvtip)
CF = (1 - r) * CA + r * CB

D1 = Exp(2 * (mx + s2x)) * (1 - Application.NormDist((Log(A) - (mx + 2 * s2x)) /
Sqr(s2x), 0, 1, True))
D1 = D1 - 2 * A * Exp(mx + s2x / 2) * (1-Application.NormDist((Log(A)-(mx + s2x)) /
Sqr(s2x), 0, 1, True))
D1 = D1 + A ^ 2 * (1 - Application.NormDist((Log(A) - mx) / Sqr(s2x), 0, 1, True))

D2 = Exp(2 * (mx + s2x)) * (1 - Application.NormDist((Log(B) - (mx + 2 * s2x)) /
Sqr(s2x), 0, 1, True))
D2 = D2 - 2 * B * Exp(mx + s2x / 2) * (1-Application.NormDist((Log(B)-(mx + s2x)) /
Sqr(s2x), 0, 1, True))
D2 = D2 + B ^ 2 * (1 - Application.NormDist((Log(B) - mx) / Sqr(s2x), 0, 1, True))

res = (1 - r) ^ 2 * D1 + r * (2 - r) * D2
res = res + 2 * r * (1 - r) * (B - A) * CB - CF ^ 2
DTFrCompLogNorm = (Sqr(res))
End Function
```

Por último introducimos en Excel los cálculos siguientes (las fórmulas vienen indicadas a la derecha de la celda en la que deben ser escritas):

	I	J	K	L	M	N	O
2	**Franquicia compuesta Logarítmico Normal**						
3							
4		muestra					
5			media	84.216,00			
6			desviación típica	158.611,00			
7			coef variación	1,88338320509			=K5/K4
8							
9		estimación					
10			m	10,5838918210			=LN(K4/RAIZ(1+K6^2))
11			σ^2	1,5144967699			=LN(1+K6^2)
12							
13		costes					
14			medio sin franquicia	84.216,00			=EXP(K9+K10/2)
15			franquicia	50.000,00	200.000,00	25%	
16			medio con franquicia	39.083,41			=frcomplognorm(K14;L14;M14;K4;K5)
17							
18			Descuento	53,59%			=1-K15/K13
19			desviación típica	131.222,10			=DTFrCompLogNorm(L15;M15;N15;L5;L6)

Así pues, el cuadro de descuentos técnicos, con sus respectivas disminuciones de varianza, será, para los distintos modelos:

MODELO	***DESCUENTO TÉCNICO***	***DISMINUCIÓN VARIANZA***
Frecuentista	***57,97%***	***14,04%***
Exponencial	***58,57%***	***32,83%***
Gamma	***45,49%***	***14,12%***
Lognormal	***30,09%***	***21,83%***
MÍNIMO	***30,09%***	***14,04%***

Desde el punto de vista del ***descuento técnico***, el *modelo más prudente* resulta ser la ***distribución lognormal***, y a considerable distancia la ***distribución gamma***.

Desde la óptica de la ***disminución de la dispersión*** como consecuencia de la introducción de la franquicia mixta, el *modelo más* *prudente* resulta ser el ***modelo estadístico*** y muy próximo a él la ***distribución gamma***.

En ambos casos, la ***distribución exponencial*** (plena de tan deseables propiedades de simplicidad) aporta *estimaciones arriesgadas*, hasta el punto que podríamos considerar a dicho modelo una ***cota superior*** a los ***descuentos*** que pueda ofrecer un asegurador (cuyo departamento comercial sin duda estará tentado de ofrecerlos en un mercado tan maduro como el español).

6.- EJEMPLO PRÁCTICO DE APLICACIÓN REAL

Volvamos a nuestro ejemplo de un gran ***camión*** propiedad de un autónomo cuyo único activo es precisamente ese camión. Este es un supuesto perfectamente real, dada la estructura del mercado español de transporte terrestre. Como decíamos, el pequeño empresario no puede imaginar siquiera asegurar el vehículo en la modalidad de ***daños propios***, debido a lo elevado de la tarifa resultante e incluso a los prejuicios existentes en las normas de suscripción de este tipo de riesgos. Como decíamos, el autónomo podría soportar íntegramente costes de una determinada magnitud (franquicia absoluta) y, progresivamente (función de participación del asegurado cóncava) hasta un límite máximo, a partir del cual la pérdida le resultaría ruinosa. Una ***franquicia mixta absoluta / proporcional /*** con ***límite máximo*** satisfaría totalmente su necesidad de cobertura del riesgo. Supongamos que la distribución de coste anteriormente presentada, correspondiente a la ***Estadística de Daños Propios del Seguro del Automóvil, Datos 1.995***, de ***UNESPA*** (***Dirección de Estudios***), fuera aplicable (si tal distribución, correspondiente a la categoría de *Turismos* no fuera aplicable, se elaboraría la correspondiente distribución de *Camiones*, y la metodología sería la misma), que la ***franquicia absoluta*** que está dispuesto a soportar el asegurado es de ***200.000 Pts.***, que la ***franquicia proporcional*** es del ***10%*** y el ***límite máximo*** de participación del asegurado es de ***1.000.000 Pts***. En este caso, el siniestro abscisa del *punto de intersección* de las rectas $\underline{\boldsymbol{200.000 + 0{,}10 \cdot (X - 200.000)}}$ y $\underline{\boldsymbol{1.000.000}}$ asciende a:

$$\boxed{\boldsymbol{[1.000.000 - 0{,}90 \cdot 200.000] / 0{,}10 = 8.200.000\ Pts.}}$$

y, para los distintos modelos tendríamos:

6.1.- FRANQUICIA ESTADÍSTICA

El cuadro de cálculos que nos permite obtener el ***descuento técnico*** teórico será el siguiente:

INTERVALOS DE COSTE	*COSTE MEDIO*	*FRECUENCIA ABSOLUTA*	*COSTE TOTAL*	*C.M. CON FRANQ*	*C.T. CON FRANQ*
Menos de 5.000	3.420	4.114	14.070.350	0	0
5.001 - 10.000	7.829	10.116	79.198.669	0	0
10.001 - 15.000	12.595	15.796	198.950.593	0	0
15.001 - 20.000	17.503	15.611	273.237.242	0	0
20.001 - 25.000	22.532	15.749	354.854.651	0	0
25.001 - 30.000	27.577	16.514	455.409.066	0	0
30.001 - 35.000	32.530	16.891	549.464.516	0	0
35.001 - 40.000	37.501	16.540	620.264.827	0	0
40.001 - 45.000	42.477	14.817	629.379.139	0	0
45.001 - 50.000	47.836	15.824	756.951.899	0	0
50.001 - 65.000	57.511	35.342	2.032.553.837	0	0
65.001 - 80.000	73.004	29.496	2.153.335.532	0	0
80.001 - 95.000	86.908	15.447	1.342.465.932	0	0
95.001 - 120.000	105.503	29.457	3.107.791.184	0	0
120.001 - 145.000	131.445	9.553	1.255.676.495	0	0
145.001 - 170.000	156.548	6.437	1.007.694.341	0	0
170.001 - 200.000	184.365	5.069	934.560.076	0	0
200.001 - 250.000	222.845	4.976	1.108.894.722	20.561	102.310.709
250.001 - 300.000	273.772	2.898	793.375.644	66.395	192.408.344
300.001 - 350.000	323.500	1.876	606.845.446	111.150	208.503.466
350.001 - 400.000	375.027	1.417	531.414.987	157.524	223.212.659
400.001 – 450.000	425.010	973	413.515.853	202.509	197.032.262
450.001 – 500.000	476.258	818	389.608.343	248.632	203.396.435
500.001 – 600.000	548.943	1.220	669.695.300	314.049	383.130.741
600.001 – 700.000	650.104	738	479.870.575	405.094	299.017.540
700.001 – 800.000	749.889	611	458.075.707	494.900	302.313.693
800.001 – 900.000	851.063	407	346.503.329	585.957	238.567.470
900.001 - 1.000.000	954.198	313	298.649.485	678.778	212.447.270
1.000.001 - 1.200.000	1.097.989	467	512.768.610	808.190	377.430.479
1.200.001 - 1.400.000	1.301.022	337	438.581.386	990.920	334.044.297
1.400.001 - 1.600.000	1.495.463	229	342.459.687	1.165.917	266.993.880
1.600.001 - 1.800.000	1.699.401	143	242.978.887	1.349.461	192.944.754
1.800.001 - 2.000.000	1.925.553	107	205.925.847	1.552.998	166.083.388
2.000.001 - 2.200.000	2.087.044	75	156.480.014	1.698.340	127.336.177
2.200.001 - 2.500.000	2.358.041	79	186.392.237	1.942.237	153.524.846
2.500.001 - 3.000.000	2.753.731	72	198.463.552	2.298.358	165.644.456
3.000.001 - 3.500.000	3.227.466	37	119.116.785	2.724.719	100.561.807
3.500.001 - 4.000.000	3.709.932	10	36.656.621	3.158.939	31.212.438
Más de 4.000.000	5.320.783	32	171.635.094	4.608.705	148.665.237
Total		290.608	**24.473.766.460**		**4.626.782.350**

De esta forma, el ***coste medio de un siniestro***, que en la distribución del coste de un siniestro ***sin franquicia*** era de ***84.216 pesetas***, pasa a ser ***con franquicia*** de ***15.921 pesetas***, lo que daría lugar a un

descuento técnico del ***81,09%***. La ***desviación típica sin franquicia*** era de ***158.611 pesetas*** (lo que da lugar a un *coeficiente de variación* del *188,34%*), siendo ***con franquicia*** de ***119.984 pesetas***, lo que da lugar a una reducción del ***24,35%***.

6.2.1.- FRANQUICIA ESTOCÁSTICA CON DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

El ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia*** será:

$$\bar{c}^F = 84.216 \cdot \left[0,90 \cdot e^{-\frac{200.000}{84.216}} + 0,10 \cdot e^{-\frac{8.200.000 - 0,10 \cdot 200.000}{0,10 \cdot 84.216}} \right] = 7.051$$

que dará lugar a un ***descuento técnico*** del ***91,63%***.

La ***desviación típica*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia mixta F será ***31.924 pesetas*** (**62,09%** de reducción).

6.2.2.- FRANQUICIA ESTOCÁSTICA CON DISTRIBUCIÓN GAMMA

El ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia*** será:

$$\begin{aligned}
\bar{c}^F = {} & 84.216 \cdot \Big[0,90 \cdot \bar{\Gamma}(200.000;1,2819;3,3476E\text{-}06) + \\
& + 0,10 \cdot \bar{\Gamma}\left(\frac{1.000.000 - 0,10 \cdot 200.000}{0,10};1,2819;3,3476E\text{-}06 \right) \Big] - \\
& - \Big[0,90 \cdot 200.000 \cdot \bar{\Gamma}(200.000;0,2819;3,3476E\text{-}06) + \\
& + (1.000.000 - 0,10 \cdot 200.000) \cdot \bar{\Gamma}\left(\frac{1.000.000 - 0,10 \cdot 200.000}{0,10};0,2819;3,3476E\text{-}06 \right) \Big] = \\
& = 24.890
\end{aligned}$$

que dará lugar a un ***descuento técnico*** del ***70,45%***, sustancialmente menor que el obtenido antes utilizando la distribución exponencial.

La ***desviación típica*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia mixta F será ***98.961 pesetas*** (**37,61%** de reducción).

6.2.3.- FRANQUICIA ESTOCÁSTICA CON DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

El ***Coste Medio del Siniestro a cargo del Asegurador con Franquicia*** será:

$$\bar{c}^{F} = 0{,}90\left\{84.216\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln 200.000-(10{,}5839+1{,}5145)}{\sqrt{1{,}5145}}\right)\right]-200.000\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln 200.000-10{,}5839}{\sqrt{1{,}5145}}\right)\right]\right\}+$$
$$+0{,}10\cdot\left\{84.216\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln 8.200.000-(10{,}5839+1{,}5145)}{\sqrt{1{,}5145}}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-8.200.000\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln 8.200.000-10{,}5839}{\sqrt{1{,}5145}}\right)\right]\right\}=26.805$$

que dará lugar a un ***descuento técnico*** del ***68,17%***, superior al obtenido por el modelo gamma (37,61%), si bien sustancialmente menor que el obtenido utilizando la distribución exponencial (91,63%) y al algoritmo frecuentista (81,09%).

La ***desviación típica*** del coste de un siniestro a cargo del asegurador en un seguro con franquicia mixta F será ***111.824 pesetas*** (**29,50%** de reducción).

Así pues, el cuadro de descuentos técnicos, con sus respectivas disminuciones de varianza, será, para los distintos modelos:

MODELO	*DESCUENTO TÉCNICO*	*DISMINUCIÓN VARIANZA*
Frecuentista	***81,09%***	***24,35%***
Exponencial	***91,63%***	***62,09%***
Gamma	***70,45%***	***37,61%***
Lognormal	***68,17%***	***29,50%***
MÍNIMO	***68,17%***	***24,35%***

Como actuarios, propondríamos un ***descuento técnico*** del ***65%*** (siempre atentos a incorporar *recargos de seguridad implícitos* en el proceso de tarificación), pudiendo ser admisible ofrecer un ***70%***), que sin duda satisfaría al autónomo asegurable y a las garantías de solvencia que constituyen la función profesional del *actuario del siglo XXI.*

7.- BIBLIOGRAFÍA

- BENCKERT, Lars-Gunnard y JUNG, Jan (1.974). *Statistical Models of Claim Distributions in Fire Insurance.* The ASTIN Bulletin. Vol. 8.1. Pag. 1-25.
- Robert L. BROWN (1.993). *Introduction to Ratemaking an Loss Reserving for Property an Casualty Insurance.* ACTEX Publications.
- M. Mercè CLARAMUNT BIELSA (1.993). *Modificaciones en la Distribución del Coste del Siniestro. Franquicias.* Colección de Publicaciones del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Barcelona.
- *Encyclopaedia of Actuarial Science*: Teugels-Sundt Editors. Ed Wiley, 2004. Vol. 1, Pag. 445-447.
- FERRARA, Giovanna (1.971). *Distributions des Sinistres Incendie selon leur Cout.* The ASTIN Bulletin. Vol. 6. Pag. 31-41.
- HICKERSTAFF, David R. (1.972). *Automobile Collision Deductibles and Repair Cost Groups: The Lognormal Model.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society. Pag 68-102.
- HOGG, Robert V. y KLUGMAN, Stuart A. (1.984). *Loss Distributions.* Ed. WILEY.

- HOSSACK, I.B. , POLLARD J.H. y ZEHNWIRTH, B. (2.001). *Introducción a la Estadística con aplicaciones a los Seguros Generales*. Ed. MAPFRE.
- KLEIBER, Chistian y KOTZ, Samuel (2.003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*. Ed. WILEY.
- KLUGMAN, Stuart A., PANJER, Harry H. y WILLMOT, Gordon E. (1.998). *Loss Models. From Data to Decisions*. Ed. WILEY.
- MACK, Thomas (1.983). *The Utility of Deductibles from the Insurer's Point of View*. ASTIN Colloquium Lindau.
- MACK, Thomas (1.984). *Premium Calculation for Deductible Policies with an Aggregate Limit*. The ASTIN Bulletin. Vol. 14.2. Pag. 105-121.
- Ángel MARÍN COBO – Mercedes SÁNCHEZ MARTÍN (1.996). *Informe Actuarial del Seguro del Automóvil Modalidades de Daños Propios, Rotura de Lunas y Robo*. Datos 1.994. Dirección de Estudios de UNESPA.
- STRAUSS, J. (1.975). *Deductibles in Industrial Fire*. The ASTIN Bulletin. Vol. 8.2. Pag. 378-393.
- UNESPA (1.997). *Estadísticas de Daños Propios, Incendio, Rotura de Lunas y Robo del Seguro del Automóvil*. Datos 1.995. Dirección de Estudios.