EFECTOS DEL REASEGURO PROPORCIONAL EN EL REPARTO DE DIVIDENDOS. UN ANÁLISIS A LARGO PLAZO[†]

Maite Mármol[1], M.Mercè Claramunt[2] y Anna Castañer[3]
Profesoras del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial

RESUMEN

El objetivo del trabajo es presentar la interacción entre el reaseguro proporcional y el reparto de dividendos. En primer lugar, resumimos las características del modelo clásico de la teoría de la ruina y comentamos las modificaciones producidas por la introducción de un reaseguro proporcional y del reparto de dividendos con una barrera constante. Asimismo, adaptamos las diferentes magnitudes relacionadas con el reparto de dividendos a un modelo con reaseguro proporcional y explicitamos las fórmulas de las diferentes magnitudes para una cuantía individual de los siniestros con una distribución exponencial unitaria. Finalmente, presentamos un análisis numérico y las conclusiones.

PALABRAS CLAVE: Reaseguro proporcional, dividendos, barrera constante.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present the interaction between the proportional reinsurance and the dividend pay-out. First, we summarize the hypothesis of the classical model of ruin theory and we comment the modifications when we introduce a proportional reinsurance and a constant dividend barrier. Then we adapt the tools used to study the dividend pay-out in this new model and we show the magnitudes for a unitary exponential distribution for

---

[†] Trabajo financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia y FEDER 2006. MTM2006-13468 y MTM2006-09920.
[1] Universidad de Barcelona. Avda. Diagonal, 690. 08034 Barcelona. Tel: 93.403.57.44 Fax: 93.4037272. mmarmol@ub.edu.
[2] Universidad de Barcelona. Avda. Diagonal, 690. 08034 Barcelona. Tel: 93.403.57.44 Fax: 93.4037272. mmclaramunt@ub.edu.
[3] Universidad de Barcelona. Avda. Diagonal, 690. 08034 Barcelona. Tel: 93.403.48.93 Fax: 93.4034892. acastaner@ub.edu.

the individual claim amount. Finally we present some numerical results and the conclusions.

KEYWORDS: Proportional reinsurance, dividends, constant barrier

1. Introducción

En este trabajo, a partir del modelo clásico de la teoría de la ruina, se introducen dos estrategias de las que dispone el gestor de la cartera cuyo objetivo es muy distinto pero que tienen como consecuencia la modificación del nivel de las reservas acumulado.

Por un lado, se considera que el gestor de la cartera sigue una estrategia de reaseguro proporcional de tal forma que se cede un porcentaje de siniestralidad y consecuentemente de las primas al reasegurador. De esta forma, todo el proceso de riesgo retenido y las medidas de solvencia (como la probabilidad de ruina o el primer momento en que las reservas son negativas) se ven modificadas.

Por otro lado, se introduce una política de reparto de dividendos, fijando un nivel máximo de las reservas, de forma que si las reservas alcanzan dicho nivel, los ingresos por primas se reparten en forma de dividendos hasta la ocurrencia del siguiente siniestro.

Así, mientras el reaseguro aparece como una medida para controlar la solvencia, el reparto de dividendos es una herramienta para controlar un crecimiento ilimitado de las reservas.

El objetivo de este trabajo es presentar de forma sencilla la interacción entre el reaseguro proporcional y el reparto de dividendos.

Después de esta introducción, el presente trabajo se estructura como sigue. En el apartado 2 resumimos las características del modelo clásico de la teoría de la ruina y comentamos las modificaciones producidas por la introducción de un reaseguro proporcional y del reparto de dividendos con una barrera constante. Asimismo, adaptamos las diferentes magnitudes relacionadas con el reparto de dividendos a un modelo con reaseguro proporcional. En el apartado 3 explicitamos la fórmulas de las diferentes magnitudes para una cuantía individual de los siniestros con una distribución exponencial unitaria. En el apartado 4 presentamos un análisis numérico. Por último incluimos las conclusiones del trabajo.

2. Modelo clásico: reaseguro proporcional y reparto de dividendos

El modelo clásico de la teoría de la ruina representa el nivel de las reservas en un momento t determinado, $R(t)$, como

$$R(t) = u + ct - S(t)$$

siendo u el nivel inicial de las reservas, es decir la aportación inicial de capital que permite poner en funcionamiento la cartera, c el ingreso por primas en cada instante, y $S(t)$ la suma de los siniestros ocurridos hasta el momento t. La cuantía acumulada de los siniestros hasta el momento t, se calcula como $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$, siendo $N(t)$ el proceso estocástico del número de siniestros ocurridos hasta el momento t, y Z_i la cuantía del i-ésimo siniestro. Las hipótesis clásicas consideran que las cuantías de los siniestros están idéntica e independientemente distribuidas, y son independientes del número de siniestros, de forma que $S(t)$ es un proceso compuesto. Si consideramos además, como es habitual, que $N(t)$ es un proceso de Poisson de parámetro λ, $S(t)$ es un proceso de Poisson Compuesto. La prima viene calculada como la siniestralidad esperada recargada por un coeficiente de seguridad $\rho > 0$, de forma que cumple la condición "*net profit*", siendo $c = \lambda E[Z](1+\rho)$.

Para valorar la solvencia de la cartera, una de las medidas es el momento de ruina, definido como $T = \min\{t \mid R(t) < 0\}$, siendo la probabilidad de ruina en un modelo con horizonte temporal infinito

$$\psi(u) = P\left[T < \infty \mid R(0) = u\right].$$

Las compañías aseguradoras pueden optar por realizar contratos de **reaseguro** para poder asumir riesgos mayores o protegerse mejor de la ruina.

Este contrato de reaseguro transfiere parte de los riesgos asumidos por la compañía aseguradora a la reaseguradora a cambio de cederle también una parte de las primas que recibe de los asegurados.

Sea X el riesgo asegurado por el asegurador. Se define la función de retención, $h(X)$, que determina la cantidad retenida de riesgo por parte de la compañía aseguradora, siendo $X-h(X)$ la parte de la que se hará cargo la reaseguradora. La función $h(X)$ cumple las siguientes propiedades (Melnikov (2003), Kaas et al. (2001)):

a) $h(X)$ y $X-h(X)$ son funciones no decrecientes,

b) $0 \le h(X) \le X$, $h(0)=0$.

Se puede diferenciar dos grandes grupos de reaseguro: el reaseguro proporcional y el no proporcional. Dentro de los reaseguros proporcionales se incluyen los reaseguros conocidos como cuota-parte y de excedentes. El primero transfiere todos los riesgos en la misma proporción, mientras que en el segundo dicha proporción puede variar. En cuanto a los reaseguros no proporcionales se encuentran los conocidos como *Stop-Loss* y *Excess-Loss*. Ambos ofrecen protección cuando la siniestralidad supera un determinado nivel acordado.

A partir de ahora nos centraremos en el reaseguro cuota-parte, que denominamos genéricamente reaseguro proporcional. Por lo tanto, se considera que la función de retención es $h(Z)=kZ$, siendo k, el nivel de retención de la aseguradora, que estará comprendido entre $0 \le k \le 1$. Así, en el reaseguro proporcional, el asegurador o cedente asume un porcentaje $k \in (0,1]$ de la cuantía de los siniestros, al que se denomina nivel de retención, y el reasegurador se hará cargo del $(1-k)$ restante.

El reasegurador, en su contrato con el asegurador, aplica un recargo de seguridad $\rho_R > 0$, de forma que la intensidad de prima neta de reaseguro para el asegurador es

$$c' = c-(1-k)(1+\rho_R)\lambda E\left[Z\right].$$

Se considera normalmente que $\rho_R > \rho > 0$ ya que si $\rho_R \leq \rho$, el asegurador sencillamente cedería toda su cartera al reasegurador, situación que carece de sentido. Esta prima neta define un nuevo recargo de seguridad real para el asegurador,

$$\rho_N = \frac{c'}{k\lambda E[Z]} - 1 = \rho_R - \frac{\rho_R - \rho}{k}.$$

La condición "*net profit*" para el recargo de seguridad ($\rho_N > 0$) impone un límite natural en la proporción retenida por el asegurador, de forma que

$$\frac{\rho_R - \rho}{\rho_R} < k \leq 1, \qquad \rho_R > \rho > 0.$$

El nivel de las reservas en un momento *t* determinado, considerando un modelo clásico donde se aplica un reaseguro proporcional, es

$$R_k(t) = u + c't - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

siendo $Y_i = kZ_i$ y $c' = \lambda E[Y_i](1+\rho_N)$. En este caso, todas las magnitudes relacionadas con la ruina en un modelo de reaseguro proporcional, pueden calcularse utilizando un modelo clásico sin reaseguro, teniendo en cuenta que los parámetros son u, c' y la cuantía de los siniestros dada por la variable aleatoria $Y = kZ$.

La probabilidad de ruina última en un modelo proporcional se simbolizará por $\psi_k(u)$. Gran parte de los estudios sobre el efecto del reaseguro proporcional se han centrado en su influencia en la probabilidad de ruina última a través del coeficiente de ajuste (ver por ejemplo Centeno (1986, 2002) y Dickson y Waters (1996)).

A continuación, introducimos en el modelo modificado con un reaseguro proporcional una **política de reparto de dividendos**. La motivación para que el gestor opte por repartir una parte de las reservas en forma de dividendos nace de la crítica de De Finetti (1957) que dice que con un recargo de seguridad positivo aquellas trayectorias de las reservas que no se anulan tienden a infinito con probabilidad uno. Así para evitar una acumulación excesiva de las reservas se opta por introducir estrategias que eviten estas situaciones. En nuestro modelo, se decide acumular como máximo un nivel de las reservas b, de tal forma que cuando las reservas alcanzan ese nivel, éstas permanecen en dicho nivel hasta la ocurrencia del siguiente siniestro. Formalmente la modificación del modelo se realiza con una barrera de dividendos $b(t)=b$.

La introducción de reparto de dividendos evidentemente modifica la trayectoria de las reservas. Así, en ésta nueva situación la probabilidad de ruina es segura, pasando a tener especial relevancia el momento de ruina como forma de valorar la solvencia.

Aparece en este nuevo contexto la necesidad de cuantificar los dividendos repartidos como medida indispensable para la valoración de la política de reparto. En este trabajo se utiliza como medida de las cuantías repartidas la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos hasta el momento de ruina T a un tanto instantáneo de interés δ constante, magnitud que representamos como $W_k(u,b)$. En la nomenclatura hemos incluido k para indicar que estamos en un modelo con reaseguro proporcional con porcentaje de retención k.

Esperanza del valor actual de los dividendos repartidos condicionados a que sean positivos y tiempo promedio de espera para el reparto de dividendos si son positivos.

En este subapartado se adaptan las variables relacionadas con el reparto de dividendos presentadas en Mármol et al. (2007), a un modelo con reaseguro proporcional. En dichas variables incluimos el subíndice k para indicar que estamos en un modelo con reaseguro.

Para un nivel determinado de las reservas x, $x \geq u$, se define $\xi(u,b)$ como la probabilidad de que la ruina ocurra sin que las reservas hayan alcanzado previamente el nivel x (Gerber et al. (1987), Dickson (1992)). Por lo tanto, si consideramos que $x=b$, también es la probabilidad de que la compañía no llegue a repartir dividendos, que coincide con la probabilidad de que $W_k(u,b)$ sea cero,

$$\xi_k(u,b) = P\left[W_k(u,b) = 0\right].$$

Por otro lado, $\chi_k(u,b) = 1 - \xi_k(u,b)$, es la probabilidad de que se lleguen a repartir dividendos,

$$\chi_k(u,b) = P\left[W_k(u,b) > 0\right].$$

Estas probabilidades, $\xi_k(u,x)$ y $\chi_k(u,b)$, nos permite condicionar el cálculo de los dividendos repartidos a que estos sean positivos.

Si tenemos en cuenta que $W_k(u,b)$ es la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos, podemos calcular esa esperanza condicionada a que se produzca reparto, magnitud que representaremos como $W_k^{\chi}(u,b)$, a partir de:

$$W_k(u,b) = W_k^{\chi}(u,b) \cdot P\left[W_k(u,b) > 0\right]$$

de donde despejando y teniendo en cuenta la reinterpretación de $\chi_k(u,b)$ se obtiene

$$W_k^{\chi}(u,b) = \frac{W_k(u,b)}{\chi_k(u,b)}$$

A partir de Dickson y Gray (1984), si el recargo de seguridad, ρ_N, es positivo, entonces se cumple,

$$\chi_k(u,b) = \frac{1-\psi_k(u)}{1-\psi_k(b)}.$$

Así, la expresión de la esperanza de los dividendos repartidos condicionados a que sean positivos, es,

$$W_k^{\chi}(u,b) = \frac{1-\psi_k(b)}{1-\psi_k(u)} W_k(u,b).$$

A partir de $W_k^{\chi}(u,b)$ en Mármol et al (2007) se calcula, $\tau_k(u,b)$, definido como el tiempo promedio que deberá esperar el accionista para empezar a cobrar dividendos.

Teniendo en cuenta que $W_k^{\chi}(u,b)$ recoge únicamente aquellas trayectorias de las reservas que alcanzan la barrera sin que previamente se haya producido la ruina podemos escribir,

$$W_k^{\chi}(u,b) = e^{-\delta\tau_k(u,b)} W_k(b,b) \quad , \quad \tau_k(u,b) > 0$$

de donde,

$$\tau_k(u,b) = \frac{1}{\delta} \ln \frac{W_k(b,b)}{W_k^{\chi}(u,b)}.$$

3. Caso exponencial

Asumimos a continuación que la cuantía individual de los siniestros sigue una distribución exponencial unitaria.

La probabilidad de ruina en un modelo modificado con reaseguro y sin reparto de dividendos es

$$\psi_k(u) = \frac{1}{1+\rho_N} e^{-\frac{\rho_N}{k(1+\rho_N)}u}, \qquad \forall u \geq 0 \,. \tag{1}$$

Si el objetivo del gestor es optimizar la solvencia de la cartera minimizando la probabilidad de ruina, la variable de control relacionada con el reaseguro es el porcentaje de retención. Así, a partir de (1), para un nivel inicial de las reservas u, el porcentaje de retención que permite conseguir el objetivo es,

$$k_{op}(u) = \frac{A^2 - 2uBA - A\sqrt{A^2 + 4Bu^2}}{2B(u\rho_R - A)} \quad si \quad u > \frac{(1+\rho)A}{\rho(2+\rho) - \rho_R} > 0$$

$$k_{op}(u) = 1 \quad otros\ casos$$

siendo $A=(\rho_R-\rho)$ y $B=(1+\rho_R)$.

Recordamos que al introducir una barrera de dividendos constante, la probabilidad de ruina es uno, por lo que el momento de ruina T cobra mayor importancia. En Castañer et al. (2007) se obtiene la expresión de la esperanza del momento de ruina en un modelo con barrera de dividendos y reaseguro proporcional,

$$E_k\left[T\right]=\frac{1+\rho_N}{\lambda\rho_N}e^{\frac{\rho_N(b-u)}{k(1+\rho_N)}}\left(\frac{1+\rho_N}{\rho_N}e^{\frac{\rho_N}{k(1+\rho_N)}u}-\frac{1}{\rho_N}\right)-\frac{1+\frac{u}{k}}{\lambda\rho_N}. \tag{2}$$

El cálculo de $W_k\left(u,b\right)$ lo encontramos en Castañer et al. (2007), siendo

$$W_k\left(u,b\right)=\frac{-\frac{1+kr_1}{1+kr_2}e^{r_1u}+e^{r_2u}}{-\frac{1+kr_1}{1+kr_2}r_1e^{r_1b}+r_2e^{r_2b}} \tag{3}$$

donde r_1 y r_2 son las raíces de la expresión

$$\lambda k\left(1+\rho_N\right)r^2-\left(\delta-\lambda\rho_N\right)r-\frac{\delta}{k}=0.$$

Las expresiones $\chi_k\left(u,b\right)$, $W_k^{\chi}\left(u,b\right)$ y $\tau_k\left(u,b\right)$, a partir de (1) y (3) son,

$$\chi_k\left(u,b\right)=\frac{1+\rho_N-e^{-\frac{\rho_N}{k(1+\rho_N)}u}}{1+\rho_N-e^{-\frac{\rho_N}{k(1+\rho_N)}b}}$$

$$W_k^{\chi}\left(u,b\right)=\frac{\left(1+\rho_N-e^{-\frac{\rho_N}{k(1+\rho_N)}b}\right)\left(-\frac{1+kr_1}{1+kr_2}e^{r_1u}+e^{r_2u}\right)}{\left(1+\rho_N-e^{-\frac{\rho_N}{k(1+\rho_N)}u}\right)\left(-\frac{1+kr_1}{1+kr_2}r_1e^{r_1b}+r_2e^{r_2b}\right)}$$

$$\tau_k\left(u,b\right)=\frac{1}{\delta}\left(\ln\frac{1+\rho_N-e^{-\frac{\rho_N}{k(1+\rho_N)}u}}{1+\rho_N-e^{-\frac{\rho_N}{k(1+\rho_N)}b}}+\ln\frac{-\frac{1+kr_1}{1+kr_2}e^{r_1b}+e^{r_2b}}{-\frac{1+kr_1}{1+kr_2}r_1e^{r_1u}+r_2e^{r_2u}}\right)$$

Si en todas las expresiones anteriores consideramos $k=1$, se obtienen las expresiones correspondientes a un modelo sin reaseguro.

4. Análisis numérico

A continuación se presentan resultados numéricos para las magnitudes expuestas en los apartados anteriores.

En este apartado analizamos en primer lugar la sensibilidad de las magnitudes respecto del capital inicial. En segundo lugar su sensibilidad respecto del porcentaje de retención del reaseguro proporcional, definiendo una nueva función que intenta conciliar dos objetivos contradictorios para el gestor. Estos dos primeros análisis consideran el nivel de la barrera de dividendos prefijado. Así, al final de este apartado incluimos un análisis del efecto de la introducción del reaseguro proporcional en la barrera óptima.

Análisis respecto del capital inicial

Por ejemplo, para unos valores de los parámetros de $\lambda=0.5$, $b=10$, $\delta=0.01$, $\rho=0.2$, $\rho_R=0.3$ y $k=0.6$, y para diferentes valores del nivel inicial de las reservas el comportamiento de las magnitudes es el siguiente

u	$E_k\left[T\right]$	$\chi_k\left(u,b\right)$	$W_k\left(u,b\right)$	$W_k^{\chi}\left(u,b\right)$	$\tau_k\left(u,b\right)$
0	105.78	0.134329	0.3615	2.6918	86.5491
2	349.65	0.461155	1.3468	2.9205	78.3952
4	498.18	0.681957	2.2810	3.3448	64.8306
6	582.31	0.831131	3.3370	4.0150	46.5676
8	622.93	0.931912	4.6592	4.9996	24.6353
10	634.158	1	6.3963	6.3963	0

Tabla 1: Magnitudes con reaseguro proporcional

Podemos observar que, para un valor fijado de la barrera, a mayor es el nivel de las reservas mayor es la esperanza del momento de ruina, $E_k[T]$, y la probabilidad de alcanzar la barrera sin arruinarse antes, $\chi_k(u,b)$. Éste es un comportamiento lógico al partir de unas reservas mayores.

El tiempo promedio de espera para el reparto de dividendos si son positivos, $\tau_k(u,b)$, es un valor decreciente respecto al nivel inicial de las reservas. Evidentemente cuanto más cerca estemos de la barrera menos tardaremos en alcanzarla y por tanto en empezar a repartir dividendos.

Las esperanzas del valor actual de los dividendos repartidos $W_k(u,b)$ y $W_k^{\chi}(u,b)$ también son crecientes respecto al nivel inicial de las reservas. Un incremento de u provoca un retraso en el momento de ruina, repartiéndose por tanto dividendos durante más tiempo, efecto que se añade al hecho de que, como empezamos a repartir antes, la aportación al valor actual de los dividendos es mayor.

Al ser $W_k^{\chi}(u,b)$ la esperanza condicionada a que se repartan dividendos, su valor es superior a $W_k(u,b)$, ya que esta última magnitud recoge también las trayectorias de las reservas que se arruinan antes de alcanzar la barrera.

Si calculamos las mismas magnitudes de la Tabla 1 sin reaseguro, es decir con $k=1$, tenemos

u	$E[T]$	$\chi(u,b)$	$W(u,b)$	$W^{\chi}(u,b)$	$\tau(u,b)$
0	53.533	0.1978	1.6029	8.1040	36.5702
2	123.583	0.4781	4.0321	8.4329	32.5921
4	168.106	0.6790	6.0653	8.9323	26.8382
6	194.339	0.8229	7.9227	9.6271	19.3478
8	207.467	0.9261	9.7576	10.5363	10.3234
10	211.203	1	11.6821	11.6821	0

Tabla 2: Magnitudes sin reaseguro

Comparando la Tabla 1 con la Tabla 2, vemos que la introducción de un reaseguro proporcional incrementa la esperanza del momento de ruina pero provoca una disminución en el resto de magnitudes. Por tanto, si el gestor opta por querer alargar el periodo en el que las reservas son positivas (es decir, por aumentar la vida media técnica de la cartera), una buena herramienta es la introducción del reaseguro proporcional. Sin embargo, el gestor debe tener presente que ello implica un menor reparto de dividendos a los accionistas. Es decir podría repartir dividendos durante más tiempo, pero con un menor valor actual.

Análisis respecto de la proporción k

Consideramos para los cálculos $u=5$ aunque los comentarios sobre la evolución de las magnitudes pueden generalizarse para otros valores de las reservas iniciales. Mantenemos el valor del resto de los parámetros, $\lambda=0.5$, $b=10$, $\delta=0.01$, $\rho=0.2$ y $\rho_R=0.3$.

k	$E_k[T]$	$\chi_k(u,b)$	$W_k(u,b)$	$W_k^{\chi}(u,b)$	$\tau_k(u,b)$
0.35	781.527	0.568729	0.31116	0.5471	149.581
0.40	837.278	0.668391	0.66165	0.9899	117.594
0.45	803.249	0.717839	1.11456	1.5526	94.661
0.50	724.822	0.743441	1.63645	2.2011	78.047
0.55	633.962	0.756938	2.20002	2.9064	65.682
0.60	546.806	0.763833	2.78455	3.6454	56.222
0.65	469.633	0.766925	3.37456	4.4001	48.807
0.70	403.811	0.767745	3.95857	5.1561	42.870
0.75	348.628	0.767183	4.52816	5.9023	38.033
0.80	302.664	0.765779	5.07724	6.6301	34.032
0.85	264.405	0.763872	5.60161	7.3331	30.678
0.90	232.475	0.761682	6.09858	8.0067	27.834
0.95	205.707	0.759354	6.56664	8.6476	25.400
1	183.145	0.756981	7.00523	9.2541	23.298

Tabla 3: Magnitudes para diferentes valores de k

La esperanza del momento de ruina no tiene un comportamiento monótono respecto del porcentaje de retención, de forma que hay un valor de k que maximiza $E_k[T]$ (en Castañer et al. (2007) puede encontrase un análisis más detallado de este comportamiento para otros datos). La probabilidad de llegar a repartir dividendos, $\chi_k(u,b)$, también tiene un valor máximo respecto del porcentaje de retención k.

En cambio, tanto las esperanzas del valor actual de los dividendos repartidos como el tiempo promedio de espera para el reparto de dividendos si son positivos tienen un comportamiento monótono respecto de k **.** Así, $W_k(u,b)$ y $W_k^{\chi}(u,b)$ crecen con k **,** tomando el valor máximo cuando $k=1$ (es decir sin reaseguro) y $\tau_k(u,b)$ disminuye con k, consiguiendo el valor mínimo cuando $k=1$**.**

Por tanto, el gestor puede tomar decisiones de reaseguro con dos objetivos que en este caso son contradictorios: el de maximizar la esperanza del momento de ruina o el de maximizar la esperanza del valor actual de los dividendos.
Ante esa disyuntiva, planteamos el cálculo de una función de utilidad que recoja estas dos magnitudes, optando por una función del tipo Cobb-Douglas. Definimos $cd(k,q)$ como

$$cd(k,q)=E_k[T]^q W_k(u,b)^{1-q}$$

siendo $0\le q\le 1$ un parámetro que recoge la preferencia del gestor entre retrasar el momento de ruina o repartir mayor cuantía de dividendos.

Así, si el parámetro q está cercano a 1, la prioridad es la esperanza del momento de ruina. En cambio si ese parámetro es un valor cercano a cero, la prioridad se centra en los dividendos repartidos.

En la Tabla 4 se incluyen los resultados de $cd(k,q)$ para $u=5$, $\lambda=0.5$, $b=10$, $\delta=0.01$, $\rho=0.2$ y $\rho_R=0.3$.

	$cd(k,q)=E_k[T]^q W_k(u,b)^{1-q}$										
k	0 ó $W_k(u,b)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1 ó $E_k[T]$
0.35	0.311	0.680	1.489	3.258	7.128	15.594	34.116	74.637	163.288	357.231	781.527
0.4	0.661	1.351	2.761	5.640	11.522	23.536	48.081	98.219	200.642	409.87	837.278
0.45	1.114	2.152	4.155	8.024	15.495	29.921	57.776	111.565	215.428	415.983	803.249
0.5	1.636	3.009	5.535	10.181	18.725	34.440	63.343	116.502	214.272	394.093	724.822
0.55	2.200	3.876	6.828	12.031	21.197	37.346	65.797	115.924	204.238	359.832	633.962
0.6	2.784	4.721	8.005	13.573	23.013	39.020	66.161	112.179	190.203	322.497	546.806
0.65	3.374	5.528	9.055	14.834	24.301	39.809	65.214	106.831	175.005	286.684	469.633
0.7	3.958	6.286	9.983	15.853	25.176	39.981	63.492	100.829	160.122	254.281	403.811

0.75	4.528	6.991	10.794	16.666	25.733	39.732	61.345	94.717	146.243	225.797	348.628
0.8	5.077	7.641	11.499	17.307	26.047	39.200	58.996	88.789	133.627	201.107	302.664
0.85	5.601	8.235	12.108	17.803	26.175	38.485	56.583	83.192	122.315	179.835	264.405
0.9	6.098	8.776	12.631	18.179	26.163	37.653	54.189	77.988	112.240	161.533	232.475
0.95	6.566	9.266	13.077	18.455	26.043	36.753	51.866	73.194	103.292	145.767	205.707
1	7.005	9.708	13.455	18.648	25.844	35.818	49.641	68.799	95.349	132.147	183.145

Tabla 4: $cd(k,q)$ respecto de k y q

Gráficamente para todo el dominio de k y q tenemos,

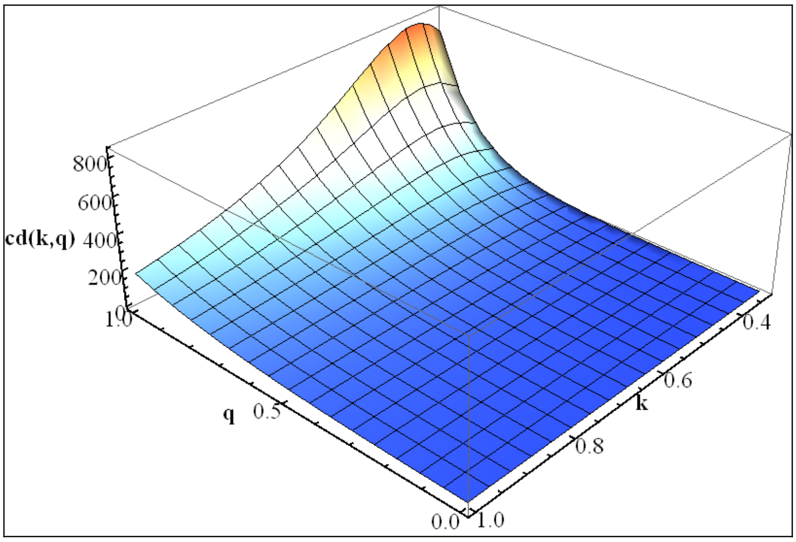

Figura 1: Función de utilidad $cd(k,q)=E_k[T]^q W_k(u,b)^{1-q}$

En la Figura 2 se grafican las combinaciones de k y q que nos permiten obtener el mismo valor para la función Cobb-Douglas. Son por tanto las curvas de indiferencia para el gestor.

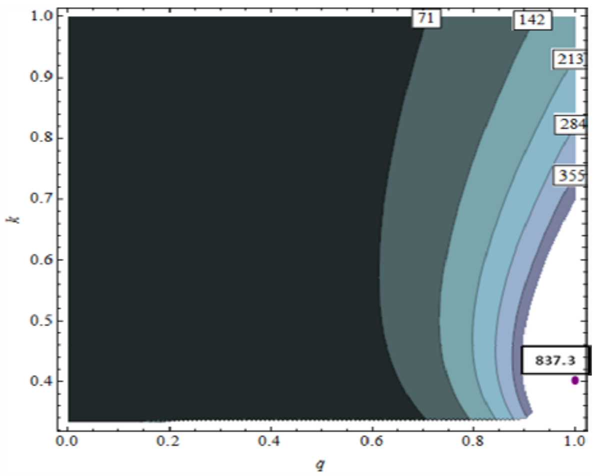

Figura 2: Curvas de indiferencia para $cd(k,q)$

El comportamiento de $cd(k,q)$ respecto de k para distintos valores prefijados de q puede observarse en la Figura 3.

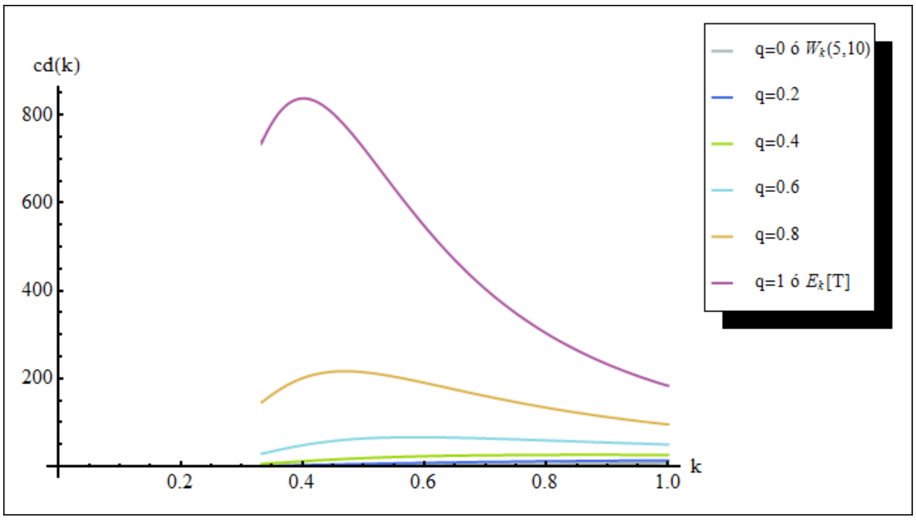

Figura 3: Función de utilidad $cd(k)$

Si $q=1$ estamos dando toda la preferencia a la esperanza del momento de ruina, y por tanto, observamos en la Figura 3 la existencia de un porcentaje de retención que maximiza esa esperanza. En cambio, si $q=0$, la preferencia se centra en los dividendos repartidos, y la función es creciente alcanzando el máximo en $k = 1$. Para el resto de los valores de q podemos observar que, si están cercanos a 1, sigue existiendo un máximo para la función Cobb-Douglas.

Influencia del reaseguro proporcional en la barrera óptima

En un modelo sin reaseguro siguiendo a Bühlmann (1970), es fácil obtener la expresión de la barrera que maximiza la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos (Mármol (2003)). En este último subapartado respondemos a la pregunta de si la introducción del reaseguro proporcional modifica dicha barrera óptima.

Para ello, $W_k(u,b)$ se puede reescribir, siguiendo la metodología de Bühlmann (1970),

$$W_k(u,b) = \frac{h(u)}{h'(b)}.$$

Por tanto, si queremos maximizar respecto a u, derivamos el denominador, $h'(b)$, e igualamos a cero, obteniéndose,

$$b_{\max} = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{1 + kr_1}{1 + kr_2}.$$

Está claro, a partir de esta expresión que el nivel de la barrera óptima depende del porcentaje de retención. Así, para unos valores de $\lambda = 0.5$, $\delta = 0.01$, $\rho = 0.2$, $\rho_R = 0.3$ y $u = 2$, el valor de la barrera de dividendos que maximiza $W_k(u,b)$ es,

$u = 2$		
k	$b_{\max}$	$W_k(u,b)$
0.40	2	2.11925
0.50	2	2.58248
0.60	2.4750	2.92409
0.70	3.4899	3.28927
0.80	4.4574	3.66897
0.90	5.3938	4.04859
1	6.3093	4.42296

Tabla 5: Nivel de la barrera de dividendos que maximiza $W_k(u,b)$.

Hemos comprobado numéricamente (ver Tabla 3) que, si consideramos el nivel de la barrera como un dato prefijado externo, la mejor opción que permite maximizar $W_k(u,b)$ es considerar $k=1$, es decir no reasegurar. A partir de la Tabla 5 vemos que, incluso eligiendo como nivel de la barrera el que para cada k maximiza $W_k(u,b)$, la mejor opción continua siendo la de no reasegurar.

5. Conclusiones

La incorporación del reaseguro proporcional afecta a las diferentes medidas relacionadas con la solvencia en un modelo con barrera de dividendos constante.

Del análisis numérico realizado en el trabajo se deduce que el gestor puede optimizar la esperanza del momento de ruina eligiendo un porcentaje óptimo de retención, pero entonces ve disminuida la esperanza del valor actual de los dividendos. Para resumir en una única medida los dos objetivos anteriores, proponemos en el trabajo una nueva función. Esta función depende de un parámetro de preferencia del gestor e incluye como casos extremos el criterio de la esperanza del momento de ruina y de la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos.

BIBLIOGRAFÍA

Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag, New York.
Castañer, A., Claramunt, M.M. y Mármol, M. (2007). *Investigaciones en seguros y gestión de riesgos: RIESGO 2007*. Capítulo Influencia del reaseguro proporcional en las medidas de solvencia del segurador, 87–101. TGD, Santander.
Centeno, L. (1986). Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient. *Insurance: Mathematics and Economics*, 5, 2, 169-182.
Centeno, L. (2002). Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient in the Sparre Anderson model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 30, 1, 37-49.
De Finetti, B. (1957). Su un impostazione alternativa della teoria collectiva del rischio. *Trans. XV. Int. Congr. Act.*, volumen 2, 433-443.
Dickson, D.C.M. (1992). On the distribution of the surplus prior to ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11, 3, 191-207.

Dickson, D.C.M y H.R. Waters (1996). Reinsurance and ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 19, 1, 61-80.
Gerber, H.U., Goovaerts, M.J. y R. Kaas (1987). On the probability and severity of ruin. *Astin Bulletin*, 17, 151-163.
Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. y M. Denuit (2001). *Modern actuarial risk theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Mármol, M. (2003). *Política de dividendos en una cartera de seguros no vida: Un análisis desde la teoría del riesgo*. Tesis doctoral, Barcelona.
Mármol, M., Claramunt, M.M. y A. Alegre (2007). Políticas de dividendos en una cartera de seguros no vida. Aplicación de los criterios clásicos de valoración de inversiones. *Revista Española de Seguros*, 129-130, 135-151.
Melnikov, A. (2003). *Risk analysis in finance and insurance*. volumen 131 de *Monographs & Surveys in Pure & Applied Math*. Chapman and Hall, University of Alberta, Edmonton, Canada.