Relación entre primas de seguro sobre la vida calculadas a distintos tipos de interés

Por
AGUSTIN SANS Y DE LLANOS

Nota previa

El presente trabajo fue elaborado durante el curso 1952-53, cuando su autor, en el último año de los estudios de Actuariado, en la Escuela Central Superior de Comercio de Madrid, era Becario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y, como tal, adscrito al profesor don José Alvarez Ude, catedrático de Geometría Descriptiva, Actuario jefe del Instituto Nacional de Previsión y Presidente de honor del Instituto de Actuarios Españoles.

Nunca publicado, el órgano rector del Instituto de Actuarios Españoles, conocedor ahora del mismo, ha estimado conveniente hacerlo, dada la naturaleza teórica y práctica del trabajo. Por ello, los cálculos del ejemplo están realizados en base a la venerable Tabla de Mortalidad A. F.

1. RELACION ENTRE $P(i_o)$ Y $P(i)$

Sea $P(i_o)$ la prima pura conocida de un seguro mixto al tipo de interés i_o:

$$P(i_o) = \frac{A^{1}_{x:\overline{n|}} + {}_nE_x}{\mathbf{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} v_o^t \cdot {}_{t-1/}q_x + v_o^n \cdot {}_np_x}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} v_o^t \cdot {}_tp_x} = \qquad [1]$$

$$= \frac{\sum\limits_{1}^{n} v_o^t \cdot d_{x+t-1} + v_o^n \cdot l_{x+n}}{\sum\limits_{0}^{n-1} v_o^t \cdot l_{x+t}}$$

que, para uniformizar los extremos de los sumatorios, pondremos en la forma:

$$P(i_o)=\frac{\sum_0^{n-1} v_o^{t+1}\cdot l_{x+t}\cdot q_{x+t}+v_o^n\cdot l_{x+n}}{\sum_0^{n-1} v_o^t\cdot l_{x+t}} \quad ; \quad v_o=\frac{1}{1+i_o} \qquad [2]$$

Para otro tipo de interés, $i\neq i_o$, la relación con i_o se expresa mediante el factor h, definido por:

$$v=(1+i)^{-1}=v_o\cdot h$$

es decir:

$$h=\frac{1+i_o}{1+i} \qquad [2a]$$

con lo que la prima al tanto i será:

$$P(i)=\frac{\sum_0^{n-1} h^{t+1}\cdot v_o^{t+1}\cdot l_{x+t}\cdot q_{x+t}+h^n\cdot v_o^n\cdot l_{x+n}}{\sum_0^{n-1} h^t\cdot v_o^t\cdot l_{x+t}} \qquad [3]$$

Ahora bien, haciendo $h=e^{-r}$, la [3] queda bajo la forma:

$$P(i)=\frac{\sum_0^{n-1} e^{-r(t+1)}\cdot v_o^{t+1}\cdot d_{x+t}\cdot q_{x+t}+e^{-r\cdot n}\cdot v_o^n\cdot l_{x+n}}{\sum_0^{n-1} e^{-rt}\cdot v_o^t\cdot l_{x+t}} \qquad [4]$$

Entonces, si hubiera de determinarse el valor de r, por ser conocidas $P(i)$ y $P(i_o)$, se puede considerar a $P(i)$ como una función $J(r)$ de r, cuya derivada:

$$\frac{dJ(r)}{dr}=-\frac{\sum_0^{n-1}(t+1)\cdot e^{-r(t+1)}\cdot v_o^{t+1}\cdot l_{x+t}\cdot q_{x+t}+n\cdot e^{-r\cdot n}\cdot v_o^n\cdot l_{x+n}}{\sum_0^{n-1} e^{-rt}v_o^t\cdot l_{x+t}}+$$

$$+\frac{\sum_0^{n-1} t\cdot e^{-rt}\cdot v_o^t\cdot l_{x+t}}{\sum_0^{n-1} e^{-rt}\cdot v_o^t\cdot l_{x+t}}\cdot J(r) \qquad [5]$$

permite introducir dos funciones auxiliares de r, $A(r)$ y $B(r)$, de momento indeterminadas, pero tales que se pueda establecer la ecuación:

$$\frac{dJ(r)}{dr}=\Big[A(r)-B(r)\Big]\cdot J(r) \qquad [6]$$

lo que equivale a tomar:

$$\frac{dJ(r)}{dr} = -B(r) \cdot \frac{\sum_0^{n-1} e^{-rt} \cdot v_o^{t+1} \cdot l_{x+t} \cdot q_{x+t} + e^{-rn} \cdot v_o^n \cdot l_{x+n}}{\sum_0^{n-1} e^{-rt} \cdot v_o^t \cdot l_{x+t}} +$$

$$+ A(r) \cdot \frac{\sum_0^{n-1} e^{-rt} \cdot v_o^t \cdot l_{x+t}}{\sum_0^{n-1} e^{-rt} \cdot v_o^t \cdot l_{x+t}} \cdot J(r)$$

Por tanto, como para $r=0$ es $J(r)=P(i_o)$, de la [6] se obtiene:

$$J(r) = P(i_o) \cdot e^{\int [A(r) - B(r)] \cdot dr}$$

y escogiendo el parámetro r de forma que $J(r)=P(i)$, resulta:

$$\boxed{P(i) = P(i_o) \cdot e^{\int [A(r) - B(r)] \cdot dr}} \qquad [7]$$

Falta ahora por determinar los valores de $A(r)$ y $B(r)$. Para ello basta en primer lugar efectuar el cociente:

$$A(r) - B(r) = \frac{dJ(r)}{dr} : J(r) = \frac{(5)}{(4)} = \mathrm{I} - \mathrm{II} =$$

$$= \frac{\sum_0^{n-1} t \cdot e^{-rt} \cdot v_o^t \cdot l_{x+t}}{\sum_0^{n-1} \cdot e^{-rt} \cdot v_o^t \cdot l_{x+t}} - \frac{\sum_0^{n-1} (t+1) \cdot e^{-rt} \cdot v_o^{t+1} \cdot l_{x+t} \cdot q_{x+t} + n \cdot e^{-rn} \cdot v_o^n \cdot l_{x+n}}{\sum_0^{n-1} e^{-r(t+1)} \cdot v_o^{t+1} \cdot l_{x+t} \cdot q_{x+t} + e^{-rn} \cdot v_o^n \cdot l_{x+n}} \qquad [8]$$

En segundo término, representando los momentos por:

$$\bar{\mu}_k = v_o^t \cdot \mu_k = \sum_0^{n-1} t^k \cdot D_{x+t}$$

$$\bar{\nu}_k = v_o^t \cdot \nu_k = \sum_0^{n-1} (t+1)^k \cdot C_{x+t} + n^k \cdot D_{x+n}$$

el desarrollo en serie de las exponenciales que figuran en la fórmula [8] es:

$$e^{-rt} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \cdot \frac{(rt)^p}{p!} \quad ; \quad e^{-r(t+1)} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \cdot \frac{[r(t+1)]^p}{p!}$$

y su sustitución en los elementos I y II de la diferencia [8] da lugar a las expresiones:

$$\mathrm{I}=\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t\cdot\left[\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{(rt)^p}{p!}\right] v_o^t\cdot l_{x+t}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1}\left[\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{(rt)^p}{p!}\right]\cdot v_o^t\cdot l_{x+t}}=\frac{\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{r^p}{p!}\cdot\sum\limits_{t=0}^{n-1} t^{p+1}\cdot v_o^t\cdot l_{x+t}}{\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{r^p}{p!}\cdot\sum\limits_{t=0}^{n-1} t^{p}\cdot v_o^t\cdot l_{x+t}}$$

$$\mathrm{II}=\frac{\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{r^p}{p!}\cdot\sum\limits_{t=0}^{n-1}(t+1)^{p+1}\cdot v_o^{t+1}\cdot q_{x+t}\cdot l_{x+t}+n\cdot\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{(rn)^p}{p!}\cdot v_o^n\cdot l_{x+n}}{\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{r^p}{p!}\cdot\sum\limits_{t=0}^{n-1}(t+1)^{p}\cdot v_o^{t+1}\cdot q_{x+t}\cdot l_{x+t}+\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{(rn)^p}{p!}\cdot v_o^n\cdot l_{x+n}}$$

que, introduciendo los momentos $\bar{\mu}_k$ y $\bar{\nu}_k$, se transforman en:

$$\mathrm{I}=A(r)=\frac{\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{r^p}{p!}\cdot\bar{\mu}_{p+1}}{\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{r^p}{p!}\cdot\bar{\mu}_{p}}$$

$$\mathrm{II}=B(r)=\frac{\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{r^p}{p!}\cdot\bar{\nu}_{p+1}}{\sum\limits_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\dfrac{r^p}{p!}\cdot\bar{\nu}_{p}}$$

o lo que es igual:

$$A(r)=\frac{\bar{\mu}_1-r\cdot\bar{\mu}_2+\dfrac{r^2}{2}\cdot\bar{\mu}_3-\dfrac{r^3}{6}\cdot\bar{\mu}_4+\ldots}{\bar{\mu}_0-r\cdot\bar{\mu}_1+\dfrac{r^2}{2}\cdot\bar{\mu}_2-\dfrac{r^3}{6}\cdot\bar{\mu}_3+\ldots}$$

$$B(r)=\frac{\bar{\nu}_1-r\cdot\bar{\nu}_2+\dfrac{r^2}{2}\cdot\bar{\nu}_3-\dfrac{r^3}{6}\cdot\bar{\nu}_4+\ldots}{\bar{\nu}_0-r\cdot\bar{\nu}_1+\dfrac{r^2}{2}\cdot\bar{\nu}_2-\dfrac{r^3}{6}\cdot\bar{\nu}_3+\ldots}$$

Con esta base, se puede tomar aproximadamente:

$$\mathrm{I}=\frac{\bar{\mu}_1-r\cdot\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_0-r\cdot\bar{\mu}_1}=a'+b'\cdot r \quad ; \quad \mathrm{II}=\frac{\bar{\nu}_1-r\cdot\bar{\nu}_2}{\bar{\nu}_0-r\cdot\bar{\nu}_1}=a''+b''\cdot r$$

siendo:

$$a'=\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_0} \quad ; \quad a''=\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{\nu}_0} \quad ; \quad b'=a'^2-\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_0} \quad ; \quad b''=a''^2-\frac{\bar{\nu}_2}{\bar{\nu}_0} \qquad [9]$$

y reemplazando estos valores en la [8] nos queda:

$$A(r)-B(r)=(a'-a'')+(b'-b'')\cdot r=a+b\cdot r \qquad [9\text{-a}]$$

En estas condiciones, resulta que:

$$lg_e \frac{P(i)}{P(i_o)} = \int [A(r) - B(r)] \cdot dr = ar + \frac{br^2}{2}$$

y, en definitiva:

$$\boxed{P(i) = P(i_o) \cdot e^{\cdot [ar + \frac{1}{2} \cdot br^2]}} \qquad [10]$$

fórmula que otorga la relación buscada en función de datos conocidos, de los cuales $P(i_o)$ es inmediato y los restantes, dados por las fórmulas:

$$h = e^{-r} \quad ; \quad e^{-r} = \frac{1 + i_o}{1 + i} \quad \text{(en virtud de la [2-a])}$$

y los parámetros a y b, por las relaciones [9] y [9-a].

II. CALCULO DE LOS MOMENTOS

Nos bastarán los $\overline{\mu}_k$ y $\overline{\nu}_k$ para $k = 0$, 1 y 2; y, por la forma con que se han definido, son inmediatos los dos primeros.

En efecto:

$$\overline{\mu}_0 = \sum_0^{n-1} D_{x+t} = N_x - N_{x+n}$$

$$\overline{\mu}_1 = \sum_0^{n-1} t \cdot D_{x+t} = S_{x+1} - S_{x+n} - (n - 1) \cdot N_{x+n}$$

$$\overline{\nu}_0 = \sum_0^{n-1} C_{x+t} + D_{x+n} = M_x - M_{x+n} + D_{x+n}$$

$$\overline{\nu}_1 = \sum_0^{n-1} (t + 1) \cdot C_{x+t} + n \cdot D_{x+n} = R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n} + n \cdot D_{x+n}$$

Para calcular $\overline{\mu}_2 = \sum_0^{n-1} t^2 \cdot D_{x+t}$ se acude a la transformación:

$$\overline{\mu}_2 = D_x \cdot \sum_0^{n-1} t^2 \cdot {}_tE_x = D_x \cdot \sum_0^{n-2} (2t + 1) \cdot t/a_{x:\overline{(n-1)-t|}} -$$

$$= 2 \cdot \sum_0^{n-2} t (N_{x+t+1} - N_{x+n}) + \sum_0^{n-2} (N_{x+t+1} - N_{x+n}) =$$

$$= (\overline{\mu}_2) = 2 \cdot \sum_0^{n-2} t \cdot N_{x+t+1} + (S_{x+1} - S_{x+n}) - n \cdot (n - 2) \cdot N_{x+n}$$

A su vez, $\bar{\nu}_2$, a través de la relación:

$$t^2 = 2\binom{t+2}{2} - 3t - 2$$

y, tras operaciones previas, viene dada por:

$$\bar{\nu}_2 = 2\cdot\sum_0^{w-x} R_{x+t} - 2\cdot\sum_0^{w-x-n} R_{x+n+t} - R_x - (2\cdot n - 1)\cdot R_{x+n} -$$

$$- n^2\cdot M_{x+n} + n^2\cdot D_{x+n}$$

(w = edad extrema de la Tabla)

Conviene observar que:

$$\bar{\mu}_0 = D_x\cdot \mathrm{a}_{x:\overline{n}|} \quad ; \quad \bar{\mu}_1 = D_x\cdot (Ia)_{x:\overline{n-1}|}$$

$$\bar{\nu}_0 = D_x\cdot A_{x:\overline{n}|} \quad ; \quad \bar{\nu}_1 = D_x\cdot (IA)_{x:\overline{n}|} = D_x[(IA)^1_{x:\overline{n}|} + n\cdot D_{x+n}]$$

relaciones de cálculo inmediato por hallarse sus valores tabulados.

III. APLICACION A PRIMAS COMERCIALES

Intentamos aplicar la fórmula obtenida al cálculo de $P'(i)$, conocida $P'(i_o)$. Para ello, representando los recargos por:

g = recargo para gastos de administración,
c = recargo para cobro y cartera,
k = recargo para adquisición (global),

tendremos:

$$(1-c)\cdot P'(i) = P(i) + g + \frac{k}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Ahora bien, siguiendo con el ejemplo de un seguro mixto, por ser:

$$P(i)\cdot \mathrm{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\cdot \mathrm{a}_{x:\overline{n}|} \quad ; \quad \text{o sea } \frac{1}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} = P(i) + d$$

$$d = 1 - v$$

se sigue que:

$$(1-c)\cdot P'(i) = (1+k)\cdot P(i) + k\cdot d + g \qquad [11]$$

y, por igual motivo,

$$(1-c)\cdot P'(i_o) = (1+k)\cdot P(i_o) + k\cdot d_o + g \qquad [d_o = 1 - v_o] \qquad [11\text{-a}]$$

Luego si en la [11] se sustituye el valor de $P(i)$ dado por [10], con lo que es:

$$(1-c)\cdot P'(i)=(1+k)\cdot P(i_o)\cdot e^{\left(ar+\frac{1}{2}\cdot br^2\right)}+k\cdot d+g \qquad [12]$$

basta despejar en la [11-a] la prima $P(i_o)$, es decir:

$$P(i_o)=\frac{(1-c)\,P'(i_o)-k\cdot d_o-g}{1+k}$$

y reemplazarlo en la [12]. Se obtiene así:

$$(1-c)\cdot P'(i)=[(1-c)\,P'(i_o)-k\cdot d_o-g]\;e^{\left(ar+\frac{br^2}{2}\right)}+kd+g$$

y de aquí la relación:

$$\boxed{P'(i)=P'(i_o)\,e^{\left(ar+\frac{br^2}{2}\right)}-\frac{kd_o+g}{1-c}\cdot e^{\left(ar+\frac{br^2}{2}\right)}+\frac{kd_o+g}{1-c}} \qquad [13]$$

La aplicación práctica de esta fórmula queda simplificada cuando se trata de relacionar primas de modalidades de seguro para las que la obtención de la prima comercial a partir de la pura es inmediata a través de los recargos.

Así en nuestro ejemplo de seguro mixto, ya que

$$P'(i)=\frac{P(i)+g}{1-c}$$

por lo que basta en tales casos aplicar la fórmula [10].

IV. EXTENSION A OTROS TIPOS DE SEGUROS

Dada la generalidad de lo expuesto hasta ahora, se deduce que todo gira en torno a la determinación de los momentos; es por ello que será suficiente exponer su fórmula de aplicación para las tarifas usuales.

1. *Temporal*

$$\bar{\mu}_k=\sum_{t=0}^{n-1} t^k\cdot D_{x+t}$$ (sus valores para $k=0$, 1 y 2 figuran en el epígrafe II)

$$\bar{\nu}_k=\sum_{0}^{n-1}(t+1)^k\cdot C_{x+t}$$

2. *Capital diferido sin contraseguro*

$$\overline{\mu}_k = \sum_{0}^{n-1} t^k \cdot D_{x+t}$$

$$\overline{\nu}_k = n^k \cdot D_{x+n}$$

3. *Renta referida a* m *años y temporal por* n

$$P(i_o) = \frac{{}_{m/n}\cdot \mathrm{a}_x}{\mathrm{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{\mathrm{a}_{x:\overline{m+n}|} - \mathrm{a}_{x:\overline{m}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{\mathrm{a}_{x:\overline{m+n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{m}|}} - 1$$

$$\overline{\mu}_k = \sum_{0}^{m-1} t^k \cdot D_{x+t} \quad ; \quad \overline{\nu}_k = \sum_{0}^{m+n-1} t^k \cdot D_{x+t}$$

4. *Vida entera*

a) A prima vitalicia:

$$\overline{\mu}_k = \sum_{0}^{\infty} t^k \cdot D_{x+t} \quad ; \quad \overline{\nu}_k = \sum_{0}^{\infty} (t+1)^k \cdot C_{x+t}$$

b) A prima temporal:

$$\overline{\mu}_k = \sum_{0}^{n-1} t^k \cdot D_{x+t} \quad ; \quad \overline{\nu}_k = \sum_{0}^{n-1} (t+1)^k \cdot C_{x+t}$$

V. APLICACION NUMERICA DE LA FORMULA A LA PRIMA ANUAL PURA DE UN SEGURO MIXTO

Bases del cálculo

Tablas A. F.:

$$x = 30 \quad ; \quad n = 20 \quad ; \quad i_o = 0{,}035 \quad ; \quad i = 0{,}04$$

$$P_{30:\overline{20}|}(i_o) = 0{,}03929$$

Formulación

$$P_{30:\overline{20}|}(0{,}04) = 0{,}03929 \cdot e^{(ar + \frac{1}{2}\cdot br^2)} = 0{,}03929 \times e^{\,0{,}0485048} =$$

$$= 0{,}03929 \times 0{,}952653 = 37{,}43\ ^0/_{00}$$

En efecto, son:

$$e^{-r}=\frac{1{,}035}{1{,}04}=h=0{,}9951923 \Rightarrow r - \log_e(0{,}9951923)=0{,}0048193$$

$$a=a'-a''=\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_0}-\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{\nu}_0}=-9{,}651824$$

$$b=b'-b''=\left[\left((a')^2-\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_0}\right)-\left((a'')^2-\frac{\bar{\nu}_2}{\bar{\nu}_0}\right)\right]=-171{,}345325$$

Cálculo de los momentos

$$\bar{\mu}_0=N_{30}-N_{50}=3.767.454{,}40 \quad ; \quad \bar{\nu}_0=M_{30}-M_{50}+D_{50}=147.918{,}31$$

$$\bar{\mu}_1=S_{31}-S_{50}-19\cdot N_{50}=30.359.817{,}20 \ ; \ \bar{\nu}_1=R_{30}-R_{50}-20\cdot M_{50}+20\cdot D_{50}=$$
$$=2.619.672{,}80$$

$$\bar{\mu}_2=2\cdot\sum_{t=0}^{18} t\cdot N_{29+t}+(S_{31}-S_{50})-20\times 18\cdot N_{50}=$$

$$=983.606.822+60.045.972-562.474.512=481.178.282$$

$$\bar{\nu}_2=2\cdot\sum_{0}^{\infty} R_{30+t}-2\sum_{0}^{\infty} R_{50+t}-R_{30}-39\cdot R_{50}-400\,(M_{50}-D_{50})=$$

$$=71.549.604-2.599.259-39.606.996+20.719.556=50.062.905$$

Valor exacto de $P_{30:\overline{20|}}(0{,}04)$

Aplicando símbolos de A. F. al 4 por 100:

$$P=\frac{M_{30}-M_{50}+D_{50}}{N_{30}-N_{50}}=\frac{73.391{,}96-44.222{,}89+88.469{,}88}{4.310.028{,}30-1.172.756{,}34}=37{,}49\ ‰$$

$$\text{Error}=1-\frac{37{,}43}{37{,}49}=1{,}60\ ‰ \text{ del valor exacto}$$