Una teoría económica del seguro [1]

Prof. Karl BORCH

Director del Instituto del Seguro de la Escuela Noruega de Economía y Administración de Empresas. Bergen (Noruega).

RECAPITULACION

La teoría económica explica cómo la oferta en conjunto con la demanda determinan los precios. En el presente artículo el autor intenta aplicar este concepto al seguro.

La curva de la oferta de un productor depende del fin que él se propone. En la teoría económica se admite generalmente que lo que se desea es la maximación del beneficio. Para una Compañía de Seguros esta suposición no es posible, pues el beneficio es una variable casual. Con el concepto de utilidad de Von Neumann y Morgenstern es, sin embargo, posible de definir una finalidad para Compañías de Seguros.

Con este concepto el autor desarrolla una teoría para los mercados del Reaseguro. El demuestra que unas situaciones de equilibrio "óptimas" de Pareto existen en tales Mercados. Sin embargo, no existe un mecanismo de precios sencillo que pueda llevar el mercado a una tal situación.

1. La teoría económica pretende ser una teoría absolutamente general. Por lo tanto debería ser posible aplicar esta teoría a todos los Ramos de la Economía y a todos los problemas económicos; sin embargo, no es así.

El Seguro es una Rama de la economía y una Compañía de Seguros es una Empresa. Parece, sin embargo, que las teorías económi-

---

(1) Del *Boletín de la Asociación de Actuarios Suizos*, vol 1 de 1964. Editorial Stämpfli & Cie., Berna.

cas comunes no han tenido aplicación en esta Rama y la teoría económica general de las Empresas no tiene mucha comprensión por la Ciencia del Seguro.

2. Una teoría proviene de premisas sencillas o de axiomas, y de éstos se derivan los teoremas. Así, por ejemplo, en las teorías económicas se intenta deducir teoremas sobre la formación de los precios en un mercado partiendo de premisas sobre la forma de actuar de los individuos.

Como ejemplo daremos un breve resumen de la teoría general de Walras [7] sobre el equilibrio. Walras presupone:

(i) Para el productor se da una función de producción $f(x, y) = 0$. En ésta $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un vector, el cual indica la cantidad de las materias brutas consumadas, e y la cantidad de mercancías producidas.

(ii) Los precios de las materias brutas y de las mercancías acabadas $p = (p_1, \ldots, p_n)$ y q vienen dadas.

(iii) Los productores intentan maximizar su beneficio.

El beneficio viene dado por la expresión siguiente:

$$G = qy - \Sigma p_i \, x_i$$

El productor deberá maximizar esta expresión mediante la condición de que $f(x, y) = 0$.

La solución de esto nos dará, a su vez, la oferta del productor, es decir, la cantidad y que él ofrece a la venta en el mercado, si los precios p y q están dados.

3. Para el consumidor existen las siguientes premisas de Walras:

(i) La estructura de las necesidades de un consumidor está expresada por una función de utilidad $u(y_i \ldots y_m)$. Aquí $y_i \ldots y_m$ significan las cantidades de los distintos bienes de consumo.

(ii) El consumidor intenta maximizar su beneficio bajo las limitaciones impuestas por sus ingresos r.

El consumidor debe maximizar $u(y_i \ldots y_m)$ con la condición de que

$$\Sigma \, q_j \, y_j = r$$

La solución de este problema da por resultado la demanda del consumidor, es decir, las cantidades $y_1, \ldots, y_m$, que él compra en el mercado de las distintas mercancías si los precios son $q_1, \ldots, q_m$.

Si queremos ahora que para todos los bienes la oferta y la demanda sean iguales, entonces podemos determinar un vector de precios de equilibrio.

Si todos los participantes en el mercado aceptan estos precios de equilibrio y adaptan a los mismos sus decisiones de entonces, el mercado llegará a una situación "óptima" de Pareto. Este resultado sería considerado como el más bello de la teoría clásica; significaría que la libre competencia conduce "al mejor de todos los mundos".

Vamos a intentar ahora adaptar estas ideas básicas de la economía clásica al seguro.

4. Fijémonos ante todo sobre una Compañía de Seguros. Su finalidad no puede evidentemente consistir en una sencilla maximación de ganancia. La ganancia del seguro será siempre una variable casual y no tiene sentido hablar de su maximación.

Sería naturalmente posible admitir que una Compañía de Seguros intente maximizar la probabilidad de estas variables casuales. Esta suposición nos daría una teoría sencilla y agradable que, sin embargo, no tendría nada de común con la realidad. Por lo menos, esta suposición no tiene valor para una Compañía de Seguros que reasegure una parte de su cartera. La prima del Reaseguro es siempre mayor que los desembolsos probables, por lo que un reaseguro significa siempre una menor esperanza de beneficio.

5. El beneficio de una Compañía de Seguros es una variable casual y, la cual puede ser definida por medio de una distribución de probabilidad $F(y)$. Generalmente existen para las Compañías de Seguros posibilidades de introducir modificaciones en esta distribución; por ejemplo, se podría, por medio de un contrato de Reaseguro, transformar $F(y)$ en $G(y)$.

Una Compañía de Seguros que tenga tales posibilidades de opción, necesita una regla por medio de la cual pueda determinar cuándo la distribución $F(y)$ sea mejor que $G(y)$. Sin una regla de este género, la Sociedad no podrá tomar una decisión racional. Para dar a esto una formulación matemática exigimos que la Compañía de Seguros tenga un orden de preferencia de la masa de todas las distribuciones de probabilidad.

Un orden de preferencias de este género se puede representar por medio de un indicador que es una representación $U(F)$ de la masa de las distribuciones de probabilidad $F(y)$ sobre la derecha real de forma que $U(F) > U(G)$, cuando, y sólo cuando, $F(y)$ se estima mejor que $G(y)$.

Al indicador $U(F)$ lo llamaremos beneficio en la participación de ganancia $F(y)$.

Si queremos que el orden sea completo, estable y transitivo, entoncès existirá una función $u(y)$ de forma tal que una representación del género

$$U(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) \, d\, F(y)$$

es posible.

Esta representación es posible también en el caso degenerado en que $F(y) = \varepsilon(y - a)$ indica cuándo es $y = a$, con probabilidad uno. En consecuencia, la función $u(y)$ puede ser considerada como beneficio de la ganancia segura y o bien como como beneficio de la suma en dinero y.

6. Fijémonos ahora en una Compañía de Seguros que ofrezca una nueva forma de seguro y supongamos:

(i) Los desembolsos para este contrato de seguros son x, una variable casual con la distribución $F(x)$.

(ii) La prima P de este seguro está dada por las condiciones del mercado.

(iii) El capital propio de la Sociedad es S.

(iv) La política de riesgos de la Sociedad puede venir representada por medio de la función $u(x)$.

Si la Sociedad n estipula tales seguros, entonces conseguirá el beneficio siguiente:

$$U(n) = \int_{0}^{\infty} u(S + nP - x) \, dF^{(n)}(x)$$

donde $F^{(n)}(x)$ es la n-enésima derivada de $F(x)$.

7. La finalidad de la Compañía consiste en maximizar el beneficio. Consecuencia de esto es que el nuevo seguro puede ser puesto en el mercado tan sólo si P es tan importante que:

$$U(n) > u(S)$$

Además, este modelo es trivial. Se ve fácilmente que $U(n)$ aumenta constantemente con n, de forma que ninguna maximación real del beneficio es posible. La Compañía intentará siempre obtener el mayor número posible de seguros.

Con el fin de conseguir una formulación realista, supongamos que la cuantía s que se invierte en la adquisición de seguros, determine el número de los seguros concertados n, es decir, supongamos que sea dada una función $n = n(s)$.

La inversión de una cuantía s proporcionará entonces a la Compañía el siguiente beneficio:

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(S + nP - s - x)\, dF^{(n)}(x)$$

8. Con esta expresión hemos conseguido una formulación operacional del problema de la Compañía de Seguros. Si la función $n(s)$ está dada, el actuario puede calcular la inversión óptima de adquisición de seguros.

Generalmente, la función $n(s)$ no es conocida; sin embargo, se puede admitir que, por medio de las investigaciones del mercado, sea posible determinar aproximadamente la forma de esta función.

Puede preguntarse también si este modelo es realista, es decir, si puede existir una función $n(s)$.

Podríamos, por ejemplo, admitir que el número de los seguros concertados no dependan tan sólo de s, sino también de las inversiones de adquisición $r_1, \ldots, r_m$ de otras n Compañías, las cuales trabajen en el mismo mercado. Con esta suposición, $n = n(s, r_1, \ldots, r_m)$ será una función con $m + 1$ variables. De estas variables, nuestra Compañía controla sólo una única. Por lo tanto, no tiene sentido hablar de maximación, y está claro que nuestro problema puede ser analizado sistemáticamente sólo cuando sea formulado en el marco de la teoría del juego de Von Neumann y Morgenstern [6].

9. Las funciones $n(s)$ y $n(s, r_1, \ldots, r_m)$ expresan la reacción del mercado. La forma en la que el mercado reacciona a las distintas medidas de adquisición constituye un problema difícil y muy complicado. Sin embargo, no es necesario que se conteste a este problema, si tomamos en consideración tan sólo transacciones entre distintas Compañías de Seguros. En las transacciones en las que todos los participantes son Compañías de Seguros, tienen gran importancia los contratos de Reaseguro.

Por esto dedicaremos particular atención al Reaseguro, que constituye la natural introducción a la teoría económica del Seguro.

10. Consideremos ahora n Compañías de Seguros. Para la Compañía $i(i = 1, 2, \ldots, n)$ supongamos:

(i) La Compañía tiene una cartera de Seguros a plazo corto. La suma de los desmebolsos derivados de estos contratos es una variable casual x_1 con la distribución $F_1(x_1)$.

(ii) Para dichos desembolsos, la Compañía dispone de una suma en metálico S_i.

La Compañía es solvente de forma que

$$S_i > \int_0^\infty x \cdot dF_i(x)$$

(iii) La Compañía sigue una política de riesgos racional que puede venir representada por medio de una función de beneficio $u_i(x)$.

Con esta premisa la Compañía consigue el beneficio:

$$U_i(x) = \int_0^\infty u_i(S_i - x)\, dF_i(x)$$

11. Examinemos ahora los posibles órdenes de Reaseguro. Un orden de Reaseguro colectivo y general puede ser descrito por medio de las siguientes n funciones:

$y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n) =$ a la suma que la Compañía i tiene que pagar si los desembolsos de las n carteras originales son $x_1, \ldots, x_n$.

La suma total de los desembolsos es, naturalmente, independiente del Reaseguro de modo que se cumple la condición:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Si las Compañías no tienen contratos de Reaseguro, entonces tendremos, naturalmente, $y_i = x_i$ para todas las i.

El orden general dará a la Sociedad i el beneficio siguiente:

$$U_i(y) = \int_R u_i(S_i - y_i)\, dF(x_1, \ldots, x_n)$$

Aquí la integración debe ser tomada sobre todo el "ortante" R.

12. El fin del Reaseguro es aumentar el beneficio de las Compañías participantes.

Supongamos, por lo tanto, que sea tomado en consideración tan sólo el orden de Reaseguro $y = (y_i, \ldots, y_n)$ cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

(i) Para cada i tenemos:

$$U_i(y) > U_i(x)$$

Esta condición dice que una Sociedad participa sólo en un orden si dicha condición proporciona un mayor beneficio a la Sociedad, es decir, que las Compañías actúan individualmente de forma racional.

(ii) No existe ninguna y de forma que: $U_i(\bar{y}) > U_i(y)$ para todas las i.

Esta condición dice que las Sociedades actúan colectivamente de forma racional de forma que no aceptan un orden cuando existe otro orden que resulte más provechoso para todas ellas.

Los órdenes de Reaseguro que satisfagan estas dos condiciones, los llamaremos masa de los órdenes óptimos de Pareto.

13. Es posible demostrar que las funciones que cumplen la condición (ii) están dadas por las relaciones siguientes:

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = \frac{\dfrac{k_i}{u''_i(S_i - y_i)}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{u''_j(S_j - y_j)}}$$

$$k_i\, u'_i(S_i - y_i) = k_j\, u'_j(S_j - y_j)$$

Aquí, $x = \Sigma X_i$ expresa los desembolsos totales y $k_1, \ldots, k_n$ son constantes arbitrarias positivas que cumplen con la condición de normación $\Sigma\, k_i = 1$.

No daremos aquí la demostración de este principio. El principio está demostrado en otro artículo [2]. Además constituye un caso particular del conocido teorema de Kuhn y Tucker [5] y puede ser deducido también de un principio más sencillo de Farkas [4].

14. Siendo que $y_1, \ldots, y_n$ son funciones de la única variable x, tenemos en consecuencia que el mejor orden de Reaseguro es equivalente a un orden de "Pool". Si los desembolsos totales del "Pool" son x, entonces la Sociedad i tendrá que pagar la suma $y_i(x)$. Para el ingreso en este orden de "Pool", la Compañía i paga la prima $y_i(0)$, la cual puede ser positiva o negativa.

Nuestra solución es todavía indeterminada, pues las constantes $K_i \ldots k_n$ pueden ser escogidas arbitrariamente. Por lo tanto, debemos imaginarnos que el orden del Reaseguro puede ser conseguido por medio de uno de dos procedimientos:

(i) Las Sociedades acuerdan actuar racionalmente y conseguir un orden óptimo de Pareto.

(ii) Por medio de negociaciones, las Sociedades examinan los valores de las constantes $K_i \ldots K_n$.

Se ve fácilmente que el orden de la Sociedad i es tanto más provechoso cuanto menor resulta K_i.

15. Supongamos que la función de beneficio tenga la forma siguiente:

$$u_i(x) = x - a_i x^2$$

El beneficio de la Compañía i se expresa por medio de:

$$U_i(x) = \int_0^\infty \{(S_i - x) - a_i(S_i - x)^2\} \, dF_i(x) = (S_i - E_i) -$$

$$- a_i(S_i - E_i)^2 - a_i V_i$$

en la cual E_i y V_i son el valor medio y la variación de la distribución $F_i(x)$.

Tenemos además

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = \frac{\dfrac{k_i}{a_i}}{\sum \dfrac{k_j}{a_j}} = q_i$$

y

$$y_i(x) = q_i\, x + q_i \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2a_j} - S_j \right) - \left(\frac{1}{2a_i} - S_i \right)$$

o bien

$$y_i(x) = q_i\, x + q_i\, A - A_i$$

El orden óptimo de Pareto exige que la Compañía i cubra una Cuota q_i de los desembolsos totales y pague una prima de

$$y_i(0) = q_i \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2a_j} - S_j \right) - \left(\frac{1}{2a_i} - S_i \right) = q_i\, A - A_i$$

Este orden dará a la Compañía i el beneficio siguiente:

$$U_i(y) = \left(\frac{1}{2a_i} - q_i\, A - q_i\, E \right) - a_i \left(\frac{1}{2a_i} - q_i\, A - q_i\, E \right)^2 -$$

$$- a_i\, q_i^2\, V$$

Aquí E y V son valor medio y variación de la variable casual $x = \Sigma x_i$.

Tenemos

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j$$

y cuando $x_1, \ldots, x_n$ son independientes "estocásticamente"

$$V = \sum_{j=1}^{n} V_j$$

Está claro que las Compañías tienen en este caso que negociar sobre los valores $q_{i1}, \ldots, q_{in}$.

16. Parece natural enfrentarse con nuestro problema apoyándonos en la teoría general del juego. Sabemos, sin embargo, que esta teoría no puede darnos soluciones determinadas sin que hagamos ulteriores suposiciones. Existen muchas de estas suposiciones que son posibles y conducen a distintas soluciones determinadas. Sin embargo, para todas las suposiciones hay que concretar algo acerca de los procedimientos de la operatoria. Necesitamos puntos de apoyo sobre la forma en que las Compañías se desenvuelven y cómo constituyen "coaliciones", con el fin de colaborar en el curso de las operaciones.

No vamos a estudiar este problema general, pero buscaremos una suposición sencilla que pueda proporcionarnos algo parecido al mecanismo clásico de los precios.

17. Nuestra dificultad está en que en nuestro mercado no existe ningún concepto natural de precio. En el mercado del Reaseguro la cobertura se compra y se vende pagando en metálico, pero no existe ninguna unidad natural.

Parece que un concepto razonable de precio consista en la transformación de una distribución de probabilidades, es decir, que exista una transformación $P(F)$ tal que en el mercado haya de pagarse la suma $P(F)$ en metálico, con el fin de conseguir cobertura para una cartera con distribución $F(x)$. Cuando se habla del precio del mercado para el Reaseguro, parece que se piensa en una transformación de este género.

Consideremos ahora dos variables casuales independientes x y y con distribuciones $F_1(x)$ y $F_2(y)$. *El "pliegue"* de estas dos distribuciones $F(z)$ es la distribución de $z = x + y$.

Exijamos ahora que nuestra transformación cumpla con la condición siguiente:

$$P(F) = P(F_1) + P(F_2)$$

Esta condición exige tan sólo que se tenga que pagar la misma cuantía tanto si un Reaseguro se establece en una o dos transacciones.

Se puede demostrar que todas las transformaciones fijas que cumplen con esta condición deben tener la forma siguiente:

$$P(F) = \sum_{n=1}^{\infty} p_1 \varkappa_n$$

Aquí p_1, p_2, ..., son constantes $\varkappa_n$ es la cumulante *n-ésima* de $F(x)$.

Como condición fija exigimos además que $p_1 = 1$. Sin esta condición el caso en que se convierte $\left[F \cdot (x) = \varepsilon(x - a)\right]$ no tiene sentido.

18. En el ejemplo que acabamos de considerar, naturalmente tienen importancia sólo las dos primeras cumulantes. Las cumulantes más elevadas no tienen ningún efecto sobre las funciones de beneficio y tienen, por lo tanto, que tener un precio nulo, es decir, $p_j = 0$ para $j > 2$.

En este ejemplo tenemos, por tanto, el concepto de precio $P(F) = E + pV$. Este concepto del precio ha sido expuesto ya por otros autores intuitivamente.

Parece ahora que podemos admitir que un precio de mercado de esta forma esté dado, y que cada Compañía de Seguros puede decidir cómo quiere comprar y vender el Reaseguro a dicho precio. Sin embargo, esta admisión nos lleva ahora a algunas dificultades y se puede demostrar que este procedimiento no puede dar por resultado ninguna situación óptima de Pareto [3].

La causa de esto la entenderemos quizás mejor si nos fijamos en el valor de mercado de los "bienes" antes y después de la transacción.

En la situación de salida dicho valor es

$$\Sigma(E_i + pV_i) = E + pV$$

Según un orden de Reaseguro óptimo de Pareto, tenemos como valor

$$\Sigma(q_i\, E + pq_i^2\, V_i) = E + p\ \Sigma\ q_i^2\ V_i$$

En la teoría clásica del mercado, el valor total de todos los bienes es naturalmente una invariante.

19. Arrow [1] ha demostrado que con un concepto de precio completamente distinto, es posible salvar el mecanismo clásico de los precios.

En nuestro caso, el concepto de precio de Arrow puede ser explicado de la forma siguiente:

Existe una función del precio $P(x)$ = a la suma en metálico que tiene que ser pagada en el mercado para conseguir con seguridad una unidad de dinero, si los desembolsos totales de las Compañías son iguales a x. Esta función constituye un sistema de precios completo, y cuando quede dada, toda Compañía de Seguros puede decidir cómo debe comprar y vender cobertura de Reaseguro con el fin de maximizar su beneficio.

Arrow ha demostrado que tal función $P(x)$ existe y que puede ser considerada como precio de equilibrio, es decir, que para esta función (si existe libre competencia), la oferta y la demanda son equivalentes. Además, Arrow ha demostrado que si la competencia es libre el mercado llega a una situación óptima de Pareto, si esta función de equilibrio está dada.

En nuestro ejemplo podemos encontrar una expresión clara para la función del precio. Es la siguiente:

$$P(x) = f(x) \frac{x + A}{E + A}$$

20. El precio de Arrow nos proporciona la única posibilidad de formar una teoría del mercado de Reaseguro en el marco del análisis clásico del equilibrio. Suponiendo que las Compañías de Seguros actúen, como si el precio de Arrow existiera, tenemos una solución determinada muy satisfactoria. No admitiendo esto hay que formular otras suposiciones sobre la actuación de las Compañías.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arrow: "El papel de los valores bursátiles para la mejor distribución de los riesgos". *Colloques Internationaux du CNRS XL*, París, 1935, pp. 41-48.

[2] Borch, K.: "El recargo de Seguridad de las Primas de Reaseguro". *Skandinavisk Aktuarietidsskrift*, 1960, pp. 163-184.

[3] "El Equilibrio en un Mercado de Reaseguro". *Econométrica*, 1962, pp. 424-444.

[4] Farkas, J.: "Sobre la Teoría de las Equivalencias sencillas". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1901, pp. 1-27.

[5] Kuhn, H. W., y A. W. Tucker: *Programación no-linear, Proceedings of the Second Berkely Symposium*, Berkely, 1951, pp. 481-492.

[6] Neumann, J. von, y O. Morgenstern: *Teoría de los Juegos y Conducta Económica*, Princeton, 1944.

[7] Walras, L.: *Elementos de Economía Política Pura*, Lausanne, 1877.