Aplicación del desglose de Zillmer a los títulos de capitalización con sorteo

Por D. José Antonio ESTRUGO Y ESTRUGO

Con objeto de evidenciar el modo de constituir las reservas en los seguros de vida y calcular el beneficio o la pérdida resultante de una mortalidad real diferente de la supuesta, Zillmer dio a conocer un método que ha sido punto de partida para interesantes trabajos.

Este autor descompone la prima anual en dos sumandos, uno de los cuales se capitaliza pura y simplemente para constituir la reserva, mientras el otro se utiliza para cubrir el riesgo de la operación vitalicia.

Nuestro objeto es aplicar esta idea fundamental a los títulos de capitalización con sorteo (*), aprovechando dicho desglose para calcular directamente la reserva en un año k cualquiera de la vida del título

---

(*) Mediante la suscripción de un título de capitalización, la entidad se obliga al pago anticipado del capital si sale premiado en cualquiera de los sucesivos sorteos que realiza, o en caso contrario, al término del plazo prefijado. Las obligaciones del suscriptor consisten en el pago de la prima convenida con la frecuencia y duración que se establezca o hasta que el título salga premiado.

Existen en la actualidad otras formas que no son más que variantes de la citada (plazo del pago de primas inferior a la duración del contrato, mantenimiento de éste caso de ser premiado el título, etc.).

Las sociedades de capitalización siguen dos sistemas en lo que se refiere a los sorteos. Por el primero cada título posee una combinación de tres letras del abecedario y mensualmente se sortean ocho de todas las posibles, premiándose aquellos títulos en vigor que sean coincidentes, anticipándoles el importe del nominal, cualquiera que sea la edad del título. La segunda forma consiste en que cada título lleva varios números (generalmente cuatro) < 10.000, y se hace el sorteo mensual que premia al que lleve el número aparecido.

Dos también son las leyes respectivas de eliminación: la creciente o de Moivre, $l_x = l_0 - xt$ y la de probabilidad constante o ley exponencial $l_x = l_0 p^x$, que es la que seguimos en el texto.

y, como caso particular, la prima pura anual de esta modalidad. Utilizaremos como instrumento para su obtención la "sucesión financiera" justificando así la aplicación de ésta con carácter general a todos los procesos de amortización o constitución paulatina de capitales, ciertos o contingentes.

Si en los títulos de capitalización con sorteo se adopta la ley de eliminación exponencial, es decir, de probabilidad constante $p (q = 1 - p)$, la obtención de la prima pura anual se deduce clásicamente siguiendo el método analítico.

Desde este supuesto, tendremos, colocándonos en el k-ésimo sorteo, que la probabilidad de que un título se amortice será $p^{k-1}q$, y la de que siga en vigor, p^k. Por tanto, si un título se amortiza, el portador percibirá la unidad, cuyo valor al comienzo del contrato será $p^{k-1}q \cdot v^k$.

Por consiguiente, la prima única, teniendo en cuenta que si no se amortiza se reembolsa al término, será

$$A_{\overline{n|}} = \underbrace{qv + pqv^2 + p^2qv^3 + \dots\dots + p^{n-2}qv^{n-1}}_{\text{amortizaciones sucesivas}} +$$

$$+ \underbrace{p^{n-1} \cdot v^n}_{\text{reembolso al término}} =$$

$$= qv \frac{1 - (pv)^{n-1}}{1 - pv} + v \cdot (pv)^{n-1} = v \frac{q + i(pv)^n}{1 - pv} \qquad [1]$$

La prima periódica se obtiene observando que para que sea pagada la k-ésima prima, es preciso que esté en circulación el título, existiendo para ello la probabilidad p^{k-1}, cuyo valor actual será $(pv)^{k-1}$. Luego, de la igualdad financiera

$$A_{\overline{n|}} = P_{\overline{n|}} \; a'_{\overline{n|}} \qquad [2]$$

en donde

$$a'_{\overline{n|}} = 1 + pv + p^2v^2 + \dots\dots + p^{n-1}v^{n-1} = \frac{1 - (pv)^n}{1 - pv} \qquad [2']$$

se deduce, teniendo en cuenta [1], que

$$P_{\overline{n|}} = v \frac{q + i(pv)^n}{1 - (pv)^n} \qquad [3]$$

Como en la práctica los sorteos y el pago de primas son mensuales, tendremos:

$$P^{(12)}_{\overline{n|}} = v' \frac{q + i'(pv')^{12n}}{1 - (pv')^{12n}} \qquad \left[\begin{array}{l} v' = v^{\frac{1}{12}} \\ i' = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 \end{array}\right] \qquad [4]$$

La reserva matemática, calculada por el método prospectivo, sería

$$kV_{\overline{n|}} = v \frac{q + i(pv)^{n-k}}{1 - pv} - P_{\overline{n|}}\, a'_{\overline{n-k|}} \qquad [5]$$

$$kV^{(12)}_{\overline{n|}} = v' \frac{q + i'(pv')^{12n-k}}{1 - pv'} - P^{(12)}_{\overline{n|}} \frac{1 - (pv')^{12n-k}}{1 - pv'} \qquad [5']$$

en donde v' e i' son los valores dados en [4], y ambas evaluadas al término del año o período k, respectivamente.

El desglose de la prima hecho por Zillmer, en prima de ahorro y prima de riesgo en los seguros de vida, puede servirnos, como indicamos anteriormente, para un enfoque de la cuestión desde otro punto de vista (**).

En efecto, la prima correspondiente al período k-ésimo en un título de capitalización con sorteo, se puede descomponer:

a) En una cantidad que sirva para constituir el capital unidad al término del contrato, que podemos representar por

$$C_{k+1}v - C_k \qquad [6]$$

siendo C_k la cantidad constituida al comienzo del año k; por tanto

$$C_1 = 0 \quad ; \quad C_{n+1} = 1 \qquad [6']$$

(**) De todas formas, puede observarse la similitud de la capitalización con sorteo con el seguro mixto: capital pagadero al término del período y sobre una edad 0, considerando la ley de supervivencia $l_x = l_0 p^x$, siendo, por tanto, $_nE_0 = (pv)^n$.

b) Caso de amortizarse el título en el k-ésimo sorteo, para lo cual existe una probabilidad q, y como el suscriptor en ese instante tiene constituido C_{k+1}, el riesgo será $1 - C_{k+1}$, cuyo valor probable al comienzo de dicho período será

$$(1 - C_{k+1})vq \qquad [7]$$

Por consiguiente, si denominamos α a la prima, ésta se compondrá de los sumandos [6] y [7], es decir:

$$\alpha = C_{k+1}v - C_k + (1 - C_{k+1})vq \qquad [8]$$

Despejando en [8] C_{k+1}, se tiene:

$$C_{k+1} = C_k \frac{1}{vp} - \frac{vq - \alpha}{vp} \qquad (C_{n+1} = 1) \qquad [9]$$

sucesión financiera (***), en donde

$$\varphi(k) = \frac{1}{vp} \quad y \quad \psi(k) = -\frac{vq - \alpha}{vp} \qquad (c = 1)$$

(***) La sucesión financiera resuelve el siguiente problema: Determinar una función de la cual se conoce una relación lineal entre dos valores consecutivos y *una ecuación de condición*. Es decir, si $F(x)$ es la función incógnita,

$$F(x + 1) = F(x)\,\varphi(x) + \psi(x) \qquad (1)$$

será la relación lineal y

$$F(n + 1) = c \qquad (2)$$

la ecuación de condición.

La integral general habida cuenta de la condición (2) es:

$$F(x) = \frac{c}{\prod_{x}^{n} \varphi(x)} + \prod_{1}^{x-1} \varphi(x) \sum_{x}^{n} \frac{-\psi(x)}{\prod_{1}^{x} \varphi(x)} \qquad (3)$$

Por tanto, según (4),

$$C_k = \frac{1}{\prod\limits_{k}^{n} \frac{1}{vp}} + \prod_{1}^{k-1} \frac{1}{vp} \sum_{k}^{n} \frac{\frac{vq-\alpha}{vp}}{\prod\limits_{1}^{k} \frac{1}{vp}} =$$

$$= (vp)^{n-k+1} + \frac{1}{(vp)^{k-1}} (vq - \alpha) \sum_{k}^{n} (vp)^{k-1} =$$

$$= (vp)^{n-k+1} + (vq - \alpha) [1 + vp + v^2p^2 + \ldots\ldots\ldots + v^{n-k}p^{n-k}] =$$

$$= (vp)^{n-k+1} + (vq - \alpha)a'_{\overline{n-k+1|}} \qquad [10]$$

que nos da el valor constituido al comienzo del período k-ésimo, o sea, el valor en ese momento de la reserva matemática.

Un caso particular notable es cuando la ecuación de condición

$$F(n + 1) = 0 \qquad (3')$$

transformándose la (3) en

$$F(x) = \prod_{1}^{x-1} \varphi(x) \sum_{x}^{n} \frac{-\psi(x)}{\prod\limits_{1}^{x} \varphi(x)} \qquad (3'')$$

que tiene aplicación en la deducción de todos los sistemas de préstamos y empréstitos.

En relación con las notaciones del texto, la (3) puede escribirse:

$$C_k = \frac{c}{\prod\limits_{k}^{n} \varphi(k)} + \prod_{1}^{k-1} \varphi(k) \sum_{k}^{n} \frac{-\psi(k)}{\prod\limits_{1}^{k} \varphi(k)} \qquad (4)$$

que es a lo que nos referimos.

Si deseáramos hallar la prima, despejándola de [10] después de hacer $k = 1$, en cuyo caso $C_1 = 0$, como indicamos antes, tendríamos

$$0 = (vp)^n + (vq - \alpha)a'_{\overline{n|}}$$

y de aquí sustituyendo el valor de $a'_{\overline{n|}}$ dado en [2']

$$\alpha = \frac{(vp)^n}{a'_{\overline{n|}}} + vq = \frac{(1 - pv)(vp)^n}{1 - (pv)^n} + vq =$$

$$= \frac{vq + (vp)^n\,(1 - vp - vq)}{1 - (pv)^n} = \frac{vq + (vp)^n\,(1 - v(p + q))}{1 - (pv)^n} =$$

$$= \frac{vq + (vp)^n\,(1 - v)}{1 - (pv)^n} = v\,\frac{q + i(pv)^n}{1 - (pv)^n} \qquad [11]$$

que coincide con la obtenida en [3] por el otro procedimiento.

Un simple juego algebraico haría patente la igualdad del valor de C_{k+1} de [10] con $kV_{\overline{n|}}$ de [5], reserva al término del período k-ésimo.

Con la utilización de las expresiones [10] y [11] quedan resueltos todos los problemas a que puedan dar lugar esta clase de operaciones.