Seguro de anualidades

Por

AGUSTIN SANS Y DE LLANOS

Nota previa

En este trabajo se utilizan integrales de Stieltjes a fin de evitar la tediosa distinción entre campo "discreto" y campo "continuo".

I. SEGURO DE ANUALIDADES CONSTANTES

La fórmula de la correspondiente prima única es:

$$\bar{a}_{x/\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta \cdot t} \cdot (1 - {}_tp_x) \cdot dt = \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|} \qquad [1]$$

Otra forma de obtenerla es la siguiente:

$$\int_0^n e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot \bar{a}^{(\delta)}_{\overline{n-t}|} \cdot dt = \int_0^n e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot \frac{1 - e^{-\delta \cdot (n-t)}}{\delta} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{\delta} \cdot \int_0^n [e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} - e^{-\delta \cdot n} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}] \cdot dt = \qquad [2]$$

$$= \frac{1}{\delta} \cdot \left[\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - e^{-\delta \cdot n} \int_0^n \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \right] = \frac{1}{\delta} \cdot \left[\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - e^{-\delta \cdot n} \cdot {}_{/n}q_x \right]$$

La [2] se puede fácilmente transformar en esta otra expresión:

$$\frac{1}{\delta} \cdot \left[\overline{A}_{x:\overline{n}|} - e^{-\delta \cdot n} \right] \qquad [3]$$

la cual relaciona la prima única $\bar{a}_{x/\overline{n}|}$ con la de un seguro *mixto* y la de un *término fijo.*

También se puede abordar la cuestión integrando por partes, como se expone a continuación:

$$\frac{1}{\delta}\cdot\frac{-1}{l_x}\cdot\left[[l_{x+t}\cdot(e^{-\delta\cdot t}-e^{-\delta\cdot n})]_o^n-\int_o^n l_{x+t}\cdot d\,(e^{-\delta\cdot t}-e^{-\delta\cdot n})\right]=$$

$$=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{-1}{l_x}\cdot\left[l_{x+n}\cdot(e^{-\delta\cdot n}-e^{-\delta\cdot n})-l_x(1-e^{-\delta\cdot n})-\int_o^n l_{x+t}[(-\delta)\cdot e^{-\delta\cdot t}]\cdot dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\delta}\cdot\left[(1-e^{-\delta\cdot n})+\int_o^n(-\delta)\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot{}_tp_x\cdot dt\right]=$$

$$=\frac{1-e^{-\delta\cdot n}}{\delta}-\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\bar{a}_{\overline{n}|}-\bar{a}_{x:\overline{n}|} \qquad [4]$$

El límite de $\bar{a}_{x/\overline{n}|}$ cuando $\gamma=0$ es:

$$\lim_{\delta\to 0}\,(\bar{a}_{\overline{n}|}-\bar{a}_{x:\overline{n}|})=n-\overset{o}{e}_{x:\overline{n}|} \qquad [5]$$

Si la renta cierta hubiese de calcularse a la tasa de interés ϕ, distinta de la tasa δ del asegurador, la expresión de la prima única es:

$$\int_o^n e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(-\frac{dl_{x+t}}{l_x}\right)\cdot\int_o^{n-t}e^{-\phi\cdot u}\cdot du$$

Su integración conduce a las siguientes fórmulas equivalentes:

$$\frac{1}{\phi}\left[\bar{A}^{1\,(\delta)}_{x:\overline{n}|}-e^{-\phi\cdot n}\cdot\bar{A}^{1\,(\delta-\phi)}_{x:\overline{n}|}\right] \qquad [6]$$

$$\bar{a}^{(\phi)}_{\overline{n}|}-\left[\delta\cdot\bar{a}^{(\delta)}_{x:\overline{n}|}+e^{-\phi\cdot n}\cdot(\delta-\phi)\cdot\bar{a}^{(\delta-\phi)}_{x:\overline{n}|}\right]\cdot\frac{1}{\phi} \qquad [7]$$

$$\frac{I}{\phi}\cdot\left[\bar{A}^{1\,(\delta)}_{x:\overline{n}|}-e^{-\phi\cdot n}\cdot(\delta-\phi)\cdot\bar{a}^{(\delta-\phi)}_{x:\overline{n}|}\cdot e^{-\phi\cdot n}\right] \qquad [8]$$

En estas expresiones, si se hace $\delta=0$, se obtiene como límite el valor:

$$n-\overset{o}{e}_{x:\overline{n}|}$$

que se obtuvo en la fórmula [5]; y ello porque haciendo $\delta=\phi$ (o sea, coincidiendo las dos tasas de interés) se llega a la [2], que es igual a la [1], bastando entonces tomar el límite de ésta cuando el interés tiende a cero.

II. SEGURO DE ANUALIDADES CRECIENTES EN PROGRESION GEOMETRICA

Sea θ la tasa de crecimiento exponencial. La prima única reviste dos formas distintas, según que el crecimiento se inicie desde el origen de la operación, o bien, una vez fallecida la cabeza (x), desde que se empieza a servir la renta.

a) *La renta crece desde el origen*

En este caso la prima única tiene como formulación más sencilla la siguiente:

$$\int_o^n e^{-\delta \cdot t} \cdot (1 - {}_tp_x) \cdot e^{\theta \cdot t} \cdot dt = \int_o^n e^{-(\delta - \theta) \cdot t} \cdot (1 - {}_tp_x) \cdot dt = \bar{a}^*_{\overline{n}|} - a^*_{x:\overline{n}|} \quad [9]$$

(siendo $\eta = \delta - \theta$ el tipo de interés de estas rentas).

Se aprecia la total simetría de esta fórmula [9] con la [1].

b) *La renta crece desde que se genera*

En este caso, la expresión de la prima única es:

$$\int_o^n e^{-\delta \cdot t} \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot \int_o^{n-t} e^{-\delta \cdot u} \cdot e^{\theta \cdot u} \cdot du$$

Haciendo $\eta = \delta - \theta$ y procediendo a una integración por partes se llega a:

$$\frac{1}{\eta} \cdot \left[\overline{A}^{1\,(\delta)}_{x:\overline{n}|} - e^{-\eta \cdot n} \cdot \overline{A}^{1\,(\theta)}_{x:\overline{n}|} \right] \quad [10]$$

Si $\theta = 0$, es decir, no hubiere crecimiento, el límite de [10] es la [1].

Un caso de particular interés se presenta cuando $\delta = \theta$.

Hay que calcular entonces el siguiente límite:

$$\lim_{\eta \to 0} \left(\frac{1}{\eta} \cdot \int_o^n e^{-\delta \cdot t} \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} - \frac{1}{\eta} \cdot \int_o^n e^{-\eta \cdot n} \cdot e^{-\theta \cdot t} \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \right)$$

El límite de la primera función es cero; y, denotando por $F(\eta)$ la segunda función, su límite, aplicando la regla de L'Hôpital, es el siguiente:

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{F(\eta)}{\eta} = \lim_{\eta \to 0} \frac{dF(\eta)}{d\eta} = \text{Lím } dF(\eta), \text{ ya que } d\eta = 1$$

$$= \int_o^n \left[(-n) \cdot e^{-\eta \cdot n} \cdot e^{-\theta \cdot t} + e^{-\eta \cdot n} \cdot (-t) \cdot e^{-\theta \cdot t} \right] \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} =$$

$$= e^{-\eta \cdot n} \left[\int_o^n n \cdot e^{-\theta \cdot t} \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} - \int_o^n t \cdot e^{-\theta \cdot t} \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \right] =$$

$$= e^{-\eta \cdot n} \left[n \cdot \overline{A}^{1\,(\theta)}_{x:\overline{n}|} - (I\overline{A})^{1\,(\theta)}_{x:\overline{n}|} \right] \xrightarrow[\eta \to 0]{} n \cdot \overline{A}^{1\,(\theta)}_{x:\overline{n}|} - (I\overline{A})^{1\,(\theta)}_{x:\overline{n}|} \qquad [11]$$

Cuando θ tiende a 0 se obtiene:

$$n \cdot {}_{/n}q_x - (\overset{o}{e}_{x:\overline{n}|} - n \cdot {}_n p_x) = n - \overset{o}{e}_{x:\overline{n}|} \quad , \quad \text{o sea, la [5]}$$

Si la renta cierta tuviese como tasa de interés ϕ en lugar de δ, se tendría:

$$\int_o^n e^{-\delta \cdot t} \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot \int_o^{n-t} e^{-\phi \cdot u} \cdot e^{\theta \cdot u} du$$

Haciendo $\phi - \theta = \eta$
$\delta - \eta = \delta - \phi + \theta = \alpha$

siguiendo el camino ya trazado se obtiene la fórmula de la prima única relativa a este *caso general:*

$$\boxed{\frac{1}{\eta} \cdot \left[\overline{A}^{1\,(\delta)}_{x:\overline{n}|} - e^{-\eta \cdot n} \cdot \overline{A}^{1\,(\alpha)}_{x:\overline{n}|} \right]} \qquad [12]$$

Cuando $\delta = \phi$ es $\alpha = \theta$ y, por ello, resulta:

$$\overline{A}^{1\,(\alpha)}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^{1\,(\theta)}_{x:\overline{n}|}$$

resultando, finalmente, la [10].

Es ésta la más general de la fórmulas obtenidas, como lo prueba el hecho de que si en ella se hace $\theta = 0$, es decir, no hay crecimiento, se vuelve a la [2], la cual ya se demostró que es idéntica con la [1].

III. SEGURO DE ANUALIDADES CRECIENTES EN PROGRESION ARITMETICA

Se distinguen también los dos casos ya estudiados en II.

Sea R la razón de la progresión aritmética.

a) *La renta crece desde el origen*

$$\int_1^n V^t \cdot (1 - {}_tp_x) \cdot [1 + R \cdot (t - 1)] \cdot dt$$

siendo $V = (1+i)^{-1}$; $\quad \mathrm{Log}_e (1+i) = \delta$; $\quad$ y también $\delta = -\mathrm{Log}_e V$

Su valor es:

$$(1 - R) \cdot (a_{\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}) + R \cdot [(Ia)_{\overline{n}|} - (Ia)_{x:\overline{n}|}]$$

con:

$$(Ia)_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - n \cdot V^n}{i}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n}}{D_x}$$

Se observa que para $R = 0$ queda $a_{x/\overline{n}|}$

b) *La renta crece desde que se genera*

Siendo, como en el caso anterior, $V = (1+i)^{-1}$ y $\delta = -\mathrm{Log}_e V$, la prima única vale:

$$U_{x/n} = \int_o^n V^t \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot \left[a_{\overline{n-t}|} + R \cdot (Ia)_{\overline{n-t}|} \right]$$

Ahora bien, por ser

$$(Ia)_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - n \cdot V^n}{i}$$

sustituyendo se obtiene esta otra expresión de $U_{x/n}$:

$$U_{x/n} = (a_{\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}) + R \cdot \int_o^n V^t \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot \left[a_{\overline{n-t}|} + \frac{a_{\overline{n-t}|} - (n-t) \cdot V^{n-t}}{i} \right]$$

La integral se puede transformar como se expone a continuación:

$$R \cdot \int_0^n V^t \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot a_{\overline{n-t}|} + \frac{R}{i} \cdot \int_0^n V^t \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot a_{\overline{n-t}|} -$$

$$- \frac{R}{i} \int_0^n V^t \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot (n-t) \cdot V^{n-t} = R \left[\left(1 + \frac{1}{i}\right) \cdot (a_{\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}) \right] +$$

$$+ \frac{R}{i} \cdot \cdot \left[\int_0^n n \cdot V^n \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} - \int_0^n V^n \cdot t \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \right]$$

Teniendo presente las relaciones:

$$\int_0^n \frac{-dl_{x+t}}{l_x} = 1 - {}_np_x \qquad \text{y} \qquad \int_0^n t \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} = \mathring{e}_{x:\overline{n}|} - n \cdot {}_np_x$$

se obtiene que:

$$U_{x/n} = \left(1 + R + \frac{R}{i}\right) \cdot (a_{\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}) - \frac{R}{i} \cdot V^n \cdot (n - \mathring{e}_{x:\overline{n}|}) \qquad [13]$$

Si en esta fórmula se hace $R = i$, resulta:

$$(2+i) \cdot a_{x/\overline{n}|} - V^n \cdot (n - \mathring{e}_{x:\overline{n}|})$$

expresión que para $i = 0$ conduce a:

$$2 \cdot (n - \mathring{e}_{x:\overline{n}|}) - (n - \mathring{e}_{x:\overline{n}|}) = n - \mathring{e}_{x:\overline{n}|}$$

que es la fórmula [5], o sea:

$$\lim_{i \to 0} \left(a^{(i)}_{\overline{n}|} - a^{(i)}_{x:\overline{n}|}\right)$$

IV. DETERMINACION DE PRIMAS ANUALES

La prima única del seguro de anualidades —en cualquiera de las modalidades analizadas en este trabajo— corresponde a un riesgo decreciente.

El hecho es consecuencia de que el producto determinante de la prima natural de cada año t, es decir:

$$P_{x+t} = V^{t+\frac{1}{2}} \cdot q_{x+t} \cdot (\text{valor actual renta cierta creciente o no}) = \pi_{x+t} \cdot (Va)_{\overline{n-t}|}$$

es obvio que, en tanto viva la cabeza (x), se anula para $t = n$. Y antes de ese momento, el crecimiento de π_{x+t} conjugado, por producto, con el decrecimiento de $(Va)_{\overline{n-t}|}$ suele producir una curva de campana.

No pueden, pues, pactarse primas anuales a n años de duración, ya que se producirían reservas matemáticas negativas.

Se abren, para evitar esa negativización, dos caminos:

a) *Acortamiento en la duración de pago de primas*

a.1) *Seguro de anualidades constantes:* Se fija una duración m ($m < n$), normalmente $m = n - 5$ si $n > 8$.

a.2) *Seguro de anualidades crecientes:* Es imprescindible el análisis, una vez conocida la razón de la progresión (geométrica o aritmética), y ello en función de cada par (x ; n). En la práctica, suele resultar un valor de m distinto para cada n.

b) *Garantizar un pago cierto al vencimiento*

Procediendo a garantizar un pago cierto al término del contrato, haya muerto o no el asegurado, se puede establecer la duración n para el pago de primas. Obviamente, actuando así se encarece el precio del seguro, por cuanto se otorga una garantía cierta al vencimiento.

b.1) *Seguro de anualidades constantes:* La prima única a dividir por $\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$ será:

$$V^n + (a_{\overline{n-1}|} - a_{x:\overline{n-1}|}) \qquad [14]$$

b.2) *Seguro de anualidades crecientes:*

b.2.1) *En progresión geométrica:* Si la renta crece desde el origen, la prima única es:

$$(1+\theta)^{n-1} + (a^*_{\overline{n-1}|} - a^*_{x:\overline{n-1}|}) \qquad [15]$$

Si la renta crece desde que se genera, se tiene:

$$(1+\theta)^{n-1} + \frac{1}{\eta}\left[A^{1\,(\delta)}_{x:\overline{n-1}|} - e^{-\eta\cdot(n-1)}\cdot A^{1\,(\alpha)}_{x:\overline{n-1}|}\right] \qquad [16]$$

b.2.2) *En progresión aritmética:* Si crece desde el origen, es:

$$V^n[1+(n-1)\cdot R] + (1-R)[(a_{\overline{n-1}|} - a_{x:\overline{n-1}|})] + R[(Ia)_{\overline{n-1}|} - (Ia)_{x:\overline{n-1}|}] \qquad [17]$$

Si crece desde que se genera, se tendrá:

$$V^n[1+(n-1)\cdot R] + U_{x/n-1} \qquad [18]$$

calculándose $U_{x/n-1}$ según la [13].

Es de notar que en los casos considerados en b.2.1 las primas anuales pueden calcularse como constantes o bien creciendo en progresión geométrica de razón igual a la prevista para la renta.

Y análogamente para los casos contemplados en b.2.2.

Para la elección de un sistema u otro habrá que atender a razones comerciales y en ocasiones, a la complejidad de las fórmulas correspondientes a las reservas matemáticas, que es notoria cuando se opera con progresión aritmética como base de la ley de crecimiento de los términos de renta o/y de primas.

Madrid, diciembre de 1982.