La variación exponencial o en progresión geométrica en las operaciones financieras

Por el Profesor Doctor
ANTONIO ALEGRE ESCOLANO

1. INTRODUCCION

En el presente trabajo se pretende efectuar un estudio exhaustivo de la problemática propia que en las operaciones financieras y en particular en los instrumentos de análisis por ellas utilizados, rentas y flujos, plantea la incorporación en sus términos de variaciones exponenciales o en progresión geométrica.

En la actualidad, tanto en el campo financiero como en el actuarial, se presentan cada vez con mayor frecuencia operaciones en las que se ha pasado de consideraciones de constancia, en los términos de las prestaciones o contraprestaciones, a la incorporación en dichos términos de factores cuya influencia lleva consigo la consideración de variaciones de tipo acumulativo, dando lugar, en el caso discreto, a términos variables en progresión geométrica, y en el caso continuo, a variaciones de tipo exponencial.

Será conveniente, por tanto, desarrollar con una mayor profundidad la problemática que surge en la incorporación de estos factores de variación y que la literatura clásica ha abordado de una forma superficial, ya que no se dejaba sentir la necesidad de su estudio como en la época actual.

Trataremos, por tanto, de desarrollar en este trabajo los siguientes puntos:

a) La valoración de rentas cuyos términos varían en progresión geométrica. En este tema comenzaremos utilizando un planteamiento de análisis clásico, llegando a expresiones que figuran en la mayoría de textos de Matemática Financiera, para pasar seguidamente a la comparación con las rentas constantes, tomando como término constante tanto el primero como el último de la renta variable, este último en el caso temporal. Este planteamiento nos permitirá considerar el instrumento altamente elaborado de las rentas constantes para valorar, previa la oportuna transformación del tanto, las rentas variables en progresión geométrica, utilizando para ello las tablas financieras correspondientes a valores actuales y finales de rentas constantes unitarias o bien las subrutinas incorporadas en las actuales calculadores especialmente programadas para resolver sencillos problemas financieros, en las que tanto el valor actual como el final de dichas rentas unitarias están introducidos de forma que, dados dos cualesquiera de sus parámetros, puede obtenerse el tercero sin más que pulsar la correspondiente instrucción.

b) La extensión de todo el planteamiento realizado anteriormente en el caso discreto, para las rentas, al caso continuo, estudiando entonce la valoración de los flujos con intensidad variable exponencialmente, logrando efectuar su valoración también mediante la valoración de rentas unitarias.

c) Trataremos, finalmente, una aplicación de la metodología anterior al análisis de las operaciones de préstamos reembolsable periódicamente con interés vencido y cuyos términos amortizativos varían en progresión geométrica, viendo cómo la metodología propuesta para su análisis resuelve de una forma trivial el problema que hasta ahora la literatura en uso consideraba de compleja solución con los planteamientos clásicos; este problema es el consistente en la determinación de la razón de variación conocido el primer término de la renta amortizativa o incluso si se nos da como dato el último de dichos términos, problema este último no tratado por la literatura disponible.

2. VALORACION DE RENTAS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA

Trataremos en este epígrafe la valoración de renta cuyos términos varían en progresión geométrica, teniendo dichas rentas periodicidad igual a P años, o sea, frecuencia igual a $m = \frac{1}{P}$ veces al año, considerándose como rentas inmediatas y vencidas, analizándose el caso temporal y el perpetuo.

Para realizar las oportunas valoraciones utilizaremos una ley estacionaria de parámetro A, correspondiente a un precio financiero o tanto instantáneo de interés constante $\rho = \ln A$, cuyo factor financiero de capitalización viene dado por:

$$e\,(0, t) = A^t = e^{\rho \cdot t}$$

También consideraremos, en particular, un régimen financiero racional de interés compuesto a tanto anual i y período de capitalización p, que corresponde a una ley estacionaria de parámetro $A = (1 + i \cdot p)^{1/p}$, que también puede expresarse, a través del correspondiente tanto efectivo equivalente, por período P de la renta, siendo entonces este tanto el que viene dado por:

$$I_m = A^P - 1 = (1 + i \cdot p)^{P/p} - 1$$

2.1 RENTAS TEMPORALES

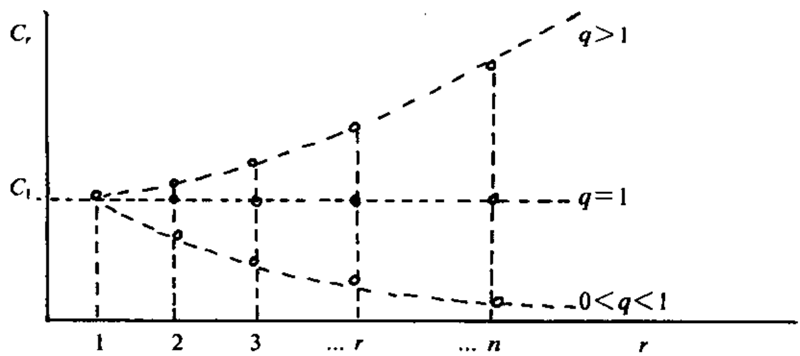
Consideraremos una renta temporal inmediata y vencida como un conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, r \cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

donde las cuantías C_r serán variables en progresión geométrica, con primer término $C_1 > 0$, y siendo la razón de la progresión $q > 0$; de esta forma, el término r-ésimo, con $r = 1, 2, \ldots, n$, será igual a:

$$C_r = C_1 \cdot q^{r-1}$$

asegurándose así la positividad de todos los términos, al ser positivos tanto el primero de ellos como la razón de variación geométrica. Podríamos representar la variación de los términos en el gráfico siguiente, según los posibles valores de la razón q:



Observándose, por tanto, que para $q > 1$ la renta será creciente, decreciente para $0 < q < 1$ y apareciendo un caso degenerado de variación en progresión geométrica en el caso en que la razón es $q = 1$, ya que entonces la renta es constante de término $\alpha = C_1 = \ldots = C_n$.

2.1.1 *Valor actual*

El valor actual vendrá dado por la cuantía del capital suma financiera, con diferimento cero, del conjunto de capitales que forman la renta, o sea:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot A^{-r \cdot P} = \sum_{r=1}^{n} C_1 \cdot q^{r-1} \cdot A^{-r \cdot P} = C_1 \cdot A^{-P} \cdot \sum_{r=1}^{n} (q \cdot A^{-P})^{r-1}$$

Para obtener la suma anterior tendremos en cuenta los dos casos siguientes:

a) Sea en primer lugar el caso en que $q \cdot A^{-P} = 1$, o sea, cuando $q = A^P$, tendremos que:

$$V_0 = C_1 \cdot A^{-P} \cdot \sum_{r=1}^{n} 1 = C_1 \cdot A^{-P} \cdot n = \frac{C_1 \cdot n}{A^P}$$

b) Si exceptuamos el caso particular ya obtenido, será $q \cdot A^{-P} \neq 1$, o, lo que es idéntico, $q \neq A^P$, teniéndose entonces que el sumatorio será la suma de una progresión geométrica de razón $q \cdot A^{-P}$, con lo que:

$$V_0 = C_1 \cdot A^{-P} \cdot \frac{1-(q \cdot A^{-P})^{n-1} \cdot q \cdot A^{-P}}{1-q \cdot A^{-P}} = C_1 \cdot \frac{1-q^n \cdot A^{-n \cdot P}}{A^P - q}$$

Luego, resumiendo, tendremos que:

$$V_0 = \begin{cases} \dfrac{C_1 \cdot n}{A^P} & \text{si } q = A^P \\[2ex] C_1 \cdot \dfrac{1-q^n \cdot A^{-n \cdot P}}{A^P - q} & \text{si } q \neq A^P \end{cases}$$

Si ponemos el parámetro A en función del precio financiero o tanto instantáneo de interés, siendo $A = e^\rho$, obtendremos que:

$$V_0 = \begin{cases} \dfrac{C_1 \cdot n}{e^{\rho \cdot P}} & \text{si } q = e^{\rho \cdot P} \\[2ex] C_1 \cdot \dfrac{1-q^n \cdot e^{-\rho \cdot n \cdot P}}{e^{\rho \cdot P} - q} & \text{si } q \neq e^{\rho \cdot P} \end{cases}$$

Si en particular la valoración se realiza en interés compuesto, tendremos que:

$$V_0 = \begin{cases} \dfrac{C_1 \cdot n}{(1+i \cdot p)^{P/p}} = \dfrac{C_1 \cdot n}{1+I_m} & \text{si } q = (1+i \cdot p)^{P/p} = 1 + I_m \\[2ex] C_1 \cdot \dfrac{1-q^n \cdot (1+i \cdot p)^{-n \cdot P/p}}{(1+i \cdot p)^{P/p} - q} = C_1 \cdot \dfrac{1-q^n \cdot (1+I_m)^{-n}}{(1+I_m) - q} & \\ & \text{si } q \neq (1+i \cdot p)^{P/p} = 1 + I_m \end{cases}$$

2.1.2 *Valor final*

La obtención del valor final, como sabemos, es inmediata conocido el valor actual, pues simplemente deberemos multiplicar éste por el factor de capitalización:

$$e(0, n \cdot P) = A^{n \cdot P} = (1 + i \cdot p)^{n \cdot P/p} = (1 + I_m)^n$$

quedando:

$$V_n = V_0 \cdot e(0, n \cdot P)$$

con lo que tendremos, según una ley estacionaria de parámetro A:

$$V_n = \begin{cases} C_1 \cdot n \cdot A^{(n-1)\cdot P} & \text{si } q = A^P \\ C_1 \cdot \dfrac{A^{n\cdot P} - q^n}{A^P - q} & \text{si } q \neq A^P \end{cases}$$

Y en función del precio financiero o tanto instantáneo de interés ρ tendremos:

$$V_n = \begin{cases} C_1 \cdot n \cdot e^{\rho\cdot(n-1)\cdot P} & \text{si } q = e^{\rho\cdot P} \\ C_1 \cdot \dfrac{e^{\rho\cdot n\cdot P} - q^n}{e^{\rho\cdot P} - q} & \text{si } q \neq e^{\rho\cdot P} \end{cases}$$

Y si en particular se trata de interés compuesto, quedará:

$$V_n = \begin{cases} C_1 \cdot n \cdot (1+i\cdot p)^{(n-1)\cdot P/p} = C_1 \cdot n \cdot (1+I_m)^{n-1} \\ \qquad\qquad \text{si } q = (1+i\cdot p)^{P/p} = 1 + I_m \\ C_1 \cdot \dfrac{(1+i\cdot p)^{n\cdot P/p} - q^n}{(1+i\cdot p)^{P/p} - q} = C_1 \cdot \dfrac{(1+I_m)^n - q^n}{(1+I_m) - q} \\ \qquad\qquad \text{si } q \neq (1+i\cdot p)^{P/p} = 1 + I_m \end{cases}$$

Como puede verse, según las expresiones obtenidas para V_0 y V_n, estos valores no son fácilmente tabulables como lo eran los correspondientes a las rentas constantes, ya que aun haciendo $C_1 = 1$, como se hace en las constantes al transformarlas en unitarias, aquí la expresión resultante quedará en función de tres parámetros: la razón de variación q, el número de períodos n y el tanto efectivo por período I_m, lo que requeriría una tabla con tres entradas, muy incómoda de manejar.

2.2 Rentas perpetuas

La renta perpetua quedará aquí definida a través de un conjunto infinito numerable de capitales financieros, como sigue:

$$\{(C_r\,,\ r\cdot P)\}_{r=1,2,\ldots 2}$$

El problema de calcular el valor actual de la renta perpetua lleva consigo implícitamente el problema de convergencia de la serie formada por las cuantías de los capitales equivalentes, con diferimento cero, a los que forman la renta; así:

$$V_0^{\infty} = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \cdot A^{-r\cdot P} = \sum_{r=1}^{\infty} C_1 \cdot q^{r-1} \cdot A^{-r\cdot P} = C_1 \cdot A^{-P} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} (q \cdot A^{-P})^{r-1}$$

en la que aparece el valor de la suma de una serie geométrica de razón $q \cdot A^{-P}$, y, como sabemos, la condición de convergencia será que:

$$q \cdot A^{-P} = |\,q \cdot A^{-P}| < 1$$

o, lo que es lo mismo, $q<A^P$, será entonces:

$$V_0^\infty = C_1 \cdot A^{-P} \cdot \frac{1}{1-q\cdot A^{-P}} = \frac{C_1}{A^P - q}$$

Este valor en función de p será:

$$V_0^\infty = \frac{C_1}{e^{p\cdot P}-q} \qquad \text{con la condición } q<e^{p\cdot P}$$

Y en el caso particular del interés compuesto nos queda que:

$$V_0^\infty = \frac{C_1}{(1+i\cdot p)^{P/p}-q} = \frac{C_1}{(1+I_m)-q}$$

debiendo ser aquí $q<(1+i\cdot p)^{P/p}=1+I_m$.

2.3 La valoración de rentas constantes como caso particular degenerado de las rentas variables en progresión geométrica

Si en las expresiones correspondientes a los valores actuales y final de las rentas variables en progresión geométrica hacemos $q=1$, y tenemos en cuenta que entonces

$$q=1<A^P=e^{p\cdot P}=(1+i\cdot p)^{P/p}=1+I_m$$

obtendremos:

$$V_0 = C_1 \cdot \frac{1-1^n\cdot A^{-n\cdot P}}{A^P-1} = C_1 \cdot \frac{1-A^{-n\cdot P}}{A^P-1} = C_1 \cdot \overset{(m)}{a}_{\overline{n}|A}$$

$$V_n = C_1 \cdot \frac{A^{n\cdot P}-1^n}{A^P-1} = C_1 \cdot \frac{A^{n\cdot P}-1}{A^P-1} = C_1 \cdot \overset{(m)}{s}_{\overline{n}|A}$$

y

$$V_0^\infty = \frac{C_1}{A^P-1} = C_1 \cdot \overset{(m)}{a}_{\overline{\infty}|A}$$

que expresadas en interés compuesto al tanto efectivo I_m por período P de la renta nos dará:

$$V_0 = C_1 \cdot \frac{1-1^n\cdot(1+I_m)^{-n}}{(1+I_m)-1} = C_1 \cdot \frac{1-(1+I_m)^{-n}}{I_m} = C_1 \cdot a_{\overline{n}|I_m}$$

$$V_n = C_1 \cdot \frac{(1+I_m)^n-1^n}{(1+I_m)-1} = C_1 \cdot \frac{(1+I_m)^n-1}{I_m} = C_1 \cdot s_{\overline{n}|I_m}$$

y, por último,

$$V_0^\infty = \frac{C_1}{(1+I_m)-1} = \frac{C_1}{I_m} = C_1 \cdot a_{\overline{\infty}|I_m}$$

2.4 Valoración de rentas variables en progresión geométrica a través de la valoración de rentas unitarias constantes

Como hemos visto en el epígrafe 2.2.1,

$$V_0=\begin{cases} \dfrac{C_1\cdot n}{1+I_m} & \text{si } q=1+I_m \\ \\ C_1\cdot\dfrac{1-q^n\cdot(1+I_m)^{-n}}{(1+I_m)-q} & \text{si } q\neq 1+I_m \end{cases}$$

Ahora bien, en el caso en que $q\neq 1+I_m$, podríamos escribir:

$$V_0=C_1\cdot\frac{1-[q\cdot(1+I_m)^{-1}]^n}{(1+I_m)\cdot[1-q\cdot(1+I_m)^{-1}]}=\frac{C_1}{1+I_m}\cdot\frac{1-[q\cdot(1+I_m)^{-1}]^n}{1-q\cdot(1+I_m)^{-1}}$$

y considerar entonces los dos casos siguientes:

a) En primer lugar supondremos que $q<1+I_m$, con lo que

$$q\cdot(1+I_m)^{-1}=\frac{q}{1+I_m}<1$$

podremos entonces definir $X_m>0$ como sigue:

$$\frac{q}{1+I_m}=\frac{1}{1+X_m}=(1+X_m)^{-1}$$

obteniéndose a partir de aquí X_m como

$$X_m=\frac{1+I_m}{q}-1=\frac{1+I_m-q}{q}$$

y de aquí, en función de X_m, que podríamos considerar como un tanto efectivo de período P, resultante de comparar el factor $1+I_m$ con la razón q, podremos escribir el valor actual de la renta variable en progresión geométrica como:

$$V_0=\frac{C_1}{1+I_m}\cdot\frac{1-(1+X_m)^{-n}}{1-(1+X_m)^{-1}}=\frac{C_1}{1+I_m}\cdot(1+X_m)\cdot\frac{1-(1+X_m)^{-n}}{(1+X_m)-1}=$$

$$=\frac{C_1}{1+I_m}\cdot(1+X_m)\cdot a_{\overline{n}|X_m}=\frac{C_1}{1+I_m}\cdot \ddot{a}_{\overline{n}|X_m}=\frac{C_1}{1+I_m}\cdot(1+a_{\overline{n-1}|X_m})$$

siendo $X_m=\dfrac{1+I_m-q}{q}$ el tanto efectivo al que debe obtenerse el valor actual de la renta unitaria anticipada $\ddot{a}_{\overline{n}|X_m}$.

b) Si ahora suponemos que $q>1+I_m$, con lo que

$$q\cdot(1+I_m)^{-1}=\frac{q}{1+I_m}>1$$

podremos entonces definir $Y_m > 0$ como sigue: $\dfrac{q}{1+I_m} = 1 + Y_m$, con lo que obtendremos Y_m como:

$$Y_m = \frac{q}{1+I_m} - 1 = \frac{q-(1+I_m)}{1+I_m}$$

y de aquí, en función de Y_m, que podríamos considerar también como un tanto efectivo de período P, resultante de comparar la razón q con el factor $1+I_m$, podremos escribir el valor actual de la renta variable en progresión geométrica como:

$$V_0 = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot \frac{1-(1+Y_m)^n}{1-(1+Y_m)} = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot \frac{(1+Y_m)^n - 1}{Y_m} = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot s_{\overline{n|}Y_m}$$

siendo $Y_m = \dfrac{q-(1+I_m)}{1+I_m}$ el tanto efectivo al que debe obtenerse el valor final de la renta unitaria.

Resumiendo, tendremos que:

$$V_0 = \begin{cases} \dfrac{C_1}{1+I_m} \cdot (1 + a_{\overline{n-1|}X_m}) \text{ con } X_m = \dfrac{1+I_m-q}{q} & \text{si } q < 1+I_m \\[2ex] \dfrac{C_1}{1+I_m} \cdot n & \text{si } q = 1+I_m \\[2ex] \dfrac{C_1}{1+I_m} \cdot s_{\overline{n|}X_m} \quad \text{con } Y_m = \dfrac{q-(1+I_m)}{1+I_m} & \text{si } q > 1+I_m \end{cases}$$

De esta forma podemos calcular el valor actual de la renta temporal variable en progresión geométrica a partir del valor actual o final de una renta unitaria vencida, valorada al tanto X_m o Y_m, respectivamente.

Asimismo, el valor final de la renta, sin más que multiplicar por $(1+I_m)^n$, vendrá dado por:

$$V_n = \begin{cases} C_1 \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot (1 + a_{\overline{n-1|}X_m}) \text{ con } X_m = \dfrac{1+I_m-q}{q} & \text{si } q < 1+I_m \\[2ex] C_1 \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot n & \text{si } q = 1+I_m \\[2ex] C_1 \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot s_{\overline{n|}Y_m} \quad \text{con } Y_m = \dfrac{q-(1+I_m)}{1+I_m} & \text{si } q > 1+I_m \end{cases}$$

En el caso del valor final también es muy interesante obtenerlo en función del último término de la renta, o sea, en función de $C_n = C_1 \cdot q^{n-1}$, esto es inmediato, sin más que hacer $C_1 = C_n \cdot q^{-(n-1)}$, quedando:

$$V_n = \begin{cases} C_n \cdot s_{\overline{n|}X_m} \quad \text{con } X_m = \dfrac{1+I_m-q}{q} & \text{si } q < 1+I_m \\[2ex] C_n \cdot n & \text{si } q = 1+I_m \\[2ex] C_n \cdot (1 + a_{\overline{n-1|}X_m}) \quad \text{con } Y_m = \dfrac{q-(1+I_m)}{1+I_m} & \text{si } q > 1+I_m \end{cases}$$

ya que:

$$C_1 \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot a_{\overline{n}|X_m} = C_n \cdot q^{-(n-1)} \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot a_{\overline{n}|X_m} = \\ = C_n \cdot (1+X_m)^{n-1} \cdot a_{\overline{n}|X_m} = C_n \cdot s_{\overline{n}|X_m}$$

$$C_1 \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot n = C_n \cdot q^{-(n-1)} \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot n = C_n \cdot n$$

y

$$C_1 \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot s_{\overline{n}|Y_m} = C_n \cdot q^{-(n-1)} \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot s_{\overline{n}|Y_m} = \\ = C_n \cdot (1+Y_m)^{-(n-1)} \cdot s_{\overline{n}|Y_m} = C_n \cdot a_{\overline{n}|Y_m} = C_n \cdot (1 + a_{\overline{n-1}|X_m})$$

En este epígrafe hemos reducido la valoración de rentas variables en progresión geométrica a la obtención del valor actual o final de las correspondientes rentas unitarias, valoradas al tanto conveniente en cada caso, con lo que serán aplicables para su determinación las tablas existentes para las rentas unitarias y, en la actualidad, las subrutinas que calculan dichos valores y que se encuentran incorporadas en la mayoría de las máquinas de calcular, que poseen un mínimo de subrutinas aplicables al cálculo financiero.

También en el caso de las rentas perpetuas, con $q < 1 + I_m$ para que sea convergente, podemos escribir:

$$V_0^\infty = \frac{C_1}{1+I_m-q} = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot \frac{1}{1-q\cdot(1+I_m)^{-1}} = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot \\ \cdot \frac{1}{1-(1+X_m)^{-1}} = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot (1+X_m) \cdot \frac{1}{X_m} = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot \\ \cdot (1+X_m) \cdot a_{\overline{\infty}|X_m} = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot a_{\overline{\infty}|X_m} = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot (1 + a_{\overline{\infty}|X_m})$$

expresión formalmente indéntica a la correspondiente a las rentas temporales con $q < 1 + I_m$, sin más que hacer $n \to \infty$.

Por último, a partir de estas expresiones tenemos que el caso de las rentas constantes cuando $q = 1$ surge de inmediato, sin más que tener en cuenta que $1 = q < 1 + I_m$, con lo que:

$$X_m = \frac{1+I_m-q}{q} = \frac{1+I_m-1}{1} = I_m$$

siendo entonces:

$$V_0 = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot (1 + a_{\overline{n-1}|X_m}) = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot a_{\overline{n}|I_m} = C_1 \cdot a_{\overline{n}|I_m}$$

$$V_n = C_1 \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot (1 + a_{\overline{n-1}|X_m}) = C_1 \cdot (1+I_m)^{n-1} \cdot a_{\overline{n}|I_m} = \\ = C_1 \cdot (1+I_m)^n \cdot a_{\overline{n}|I_m} = C_1 \cdot s_{\overline{n}|I_m}$$

o bien directamente, $V_n = C_n \cdot s_{\overline{n}|I_m} = C_1 \cdot s_{\overline{n}|I_m}$, al ser $C_1 = C_n$, y también, por último:

$$V_0^\infty = \frac{C_1}{1+I_m} \cdot (1+I_m) \cdot a_{\overline{\infty}|I_m} = C_1 \cdot a_{\overline{\infty}|I_m} = \frac{C_1}{I_m}$$

que no son sino los valores actuales y finales de una renta constante:

3. VALORACION DE FLUJOS DE INTENSIDAD VARIABLE EXPONENCIALMENTE

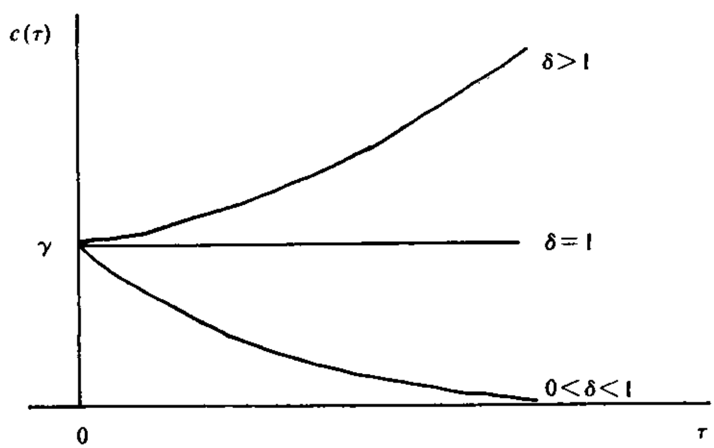
Trataremos aquí la valoración de disponibilidades financieras que se producen en el campo temporal continuo y a lo largo de un cierto intervalo, y que hemos venido en denominar flujos financieros ciertos; éstos quedan totalmente especificados al dar la función de intensidad del flujo $c(\tau)$ y el intervalo temporal en el que se contempla el acceso de la disponibilidad que corresponde a dicha intensidad $(d, d+t)$; si t es finito, surgen los flujos temporales, y si t es ∞, los perpetuos; d será el diferimiento del flujo y se considerará a éste como inmediato si $d=0$.

Nosotros estamos interesados aquí en los flujos cuya función de intensidad sea exponencial, o sea, de la forma:

$$c(\tau)=\gamma\cdot\delta^{\tau}$$

donde τ tomará valores en el intervalo de definición y los parámetros γ y δ deberán ser positivos para asegurar, así, la positividad de la intensidad para todo valor de τ.

Podríamos representar aquí, igual que hemos hecho en el caso de las rentas, la variación en la intensidad del flujo exponencial, en el gráfico siguiente, según los posibles valores del parámetro δ, base de la función exponencial, obteniéndose:



Se observa que la intensidad será creciente para $\delta>1$, asintóticamente decreciente para $0<\delta<1$ y que aparecerá el flujo uniforme o de intensidad constante como caso degenerado del exponencial cuando la base $\delta=1$, siendo entonces la intensidad constante $c(\tau)=\alpha=\gamma$.

3.1 Valoración de flujos temporales con intensidad variable exponencialmente

Consideraremos en primer lugar el caso en que el flujo sea inmediato, o sea, que el intervalo de definición sea $(0, t)$; entonces tendremos que el valor actual del flujo será:

$$\overline{V_0} = \int_0^t c(\tau) \cdot e(\tau, 0) \cdot d\tau$$

Siendo $e(\tau, 0)$ el factor de actualización correspondiente a la ley de valoración, en el caso de una ley estacionaria tendremos:

$$\overline{V_0} = \int_0^t c(\tau) \cdot A^{-\tau} \cdot d\tau = \int_0^t \gamma \cdot \delta^\tau \cdot A^{-\tau} \cdot d\tau = \int_0^t [\delta \cdot A^{-1}]^\tau \cdot d\tau$$

Para calcular la integral que define el valor actual $\overline{V_0}$ distinguiremos dos casos:

a) Sea en primer lugar el caso en que $\delta \cdot A^{-1} = 1$, o sea, cuando $\delta = A$, tendremos que:

$$\overline{V_0} = \gamma \cdot \int_0^t d\tau = \gamma \cdot [\tau]_0^t = \gamma \cdot t$$

b) Si exceptuamos el caso particular ya obtenido, será $\delta \cdot A^{-1} \neq 1$ ó, lo que es lo mismo, $\delta \neq A$, teniéndose entonces que la integral nos dará un valor actual:

$$\overline{V_0} = \gamma \cdot \int_0^t (\delta \cdot A^{-1})^\tau \cdot d\tau = \gamma \cdot \left[\frac{(\delta \cdot A^{-1})^\tau}{\ln(\delta \cdot A^{-1})} \right]_0^t = \gamma \cdot \frac{(\delta \cdot A^{-1})^t - 1}{\ln \delta - \ln A} =$$

$$= \gamma \cdot \frac{1 - \delta^t \cdot A^{-t}}{\ln A - \ln \delta}$$

Luego resumiendo los dos casos tendremos que:

$$\overline{V_0} = \begin{cases} \gamma \cdot t & \text{si } \delta = A \\ \gamma \cdot \dfrac{1 - \delta^t \cdot A^{-t}}{\ln A - \ln \delta} & \text{si } \delta \neq A \end{cases}$$

y poniendo ahora el parámetro A en función del precio financiero o tanto instantáneo de interés ρ, obtendremos que:

$$\overline{V_0} = \begin{cases} \gamma \cdot t & \text{si } \delta = e^\rho \quad \text{o} \quad \ln \delta = \rho \\ \gamma \cdot \dfrac{1 - \delta^t \cdot e^{-\rho \cdot t}}{\rho - \ln \delta} & \text{si } \delta \neq e^\rho \quad \text{o} \quad \ln \delta \neq \rho \end{cases}$$

y si en particular la valoración se realiza en interés compuesto a tanto i y período de capitalización p, tendremos:

$$\overline{V_0}=\begin{cases} \gamma \cdot t & \text{si } \delta=(1+i\cdot p)^{1/p} \\ \gamma \cdot \dfrac{1-\delta^t\cdot(1+i\cdot p)^{-t/p}}{\dfrac{1}{p}\cdot \ln(1+i\cdot p)-\ln\delta} & \text{si } \delta\neq(1+i\cdot p)^{1/p} \end{cases}$$

y finalmente, si t es un número entero de años, es útil expresar el valor actual en función del tanto efectivo anual I_1, con lo que

$$\overline{V_0}=\begin{cases} \gamma \cdot t & \text{si } \delta=1+I_1 \\ \gamma \cdot \dfrac{1-\delta^t\cdot(1+I_1)^{-t}}{\ln(1+I_1)-\ln\delta} & \text{si } \delta\neq 1+I_1 \end{cases}$$

El valor final se obtendrá por la propiedad de escindibilidad por producto, sin más que multiplicar por el factor $e(0, t)$, con lo que tendremos:

$$\overline{V_t}=\begin{cases} \gamma \cdot A^t\cdot t & \text{si } \delta=A \\ \gamma \cdot \dfrac{A^t-\delta^t}{\ln \mathrm{A}-\ln\delta} & \text{si } \delta\neq A \end{cases}$$

o bien en función del precio financiero ρ:

$$\overline{V_t}=\begin{cases} \gamma \cdot e^{\rho\cdot t}\cdot t & \text{si } \delta=e^\rho \quad \text{o} \quad \ln\delta=\rho \\ \gamma \cdot \dfrac{e^{\rho\cdot t}-\delta^t}{\rho-\ln\delta} & \text{si } \delta\neq e^\rho \quad \text{o} \quad l\eta\delta\neq\rho \end{cases}$$

quedando en el caso de interés compuesto como sigue:

$$\overline{V_t}=\begin{cases} \gamma \cdot (1+i\cdot p)^{t/p}\cdot t=\gamma\cdot(1+I_1)^t\cdot t \\ \qquad\qquad\qquad \text{si } \delta=(1+i\cdot p)^{1/p}=1+I_1 \\ \gamma \cdot \dfrac{(1+i\cdot p)^{t/p}-\delta^t}{\dfrac{1}{p}\cdot\ln(1+i\cdot p)-\ln\delta}=\gamma\cdot\dfrac{(1+I_1)^t-\delta^t}{\ln(1+I_1)-\ln\delta} \\ \qquad\qquad\qquad \text{si } \delta\neq(1+i\cdot p)^{1/p}=1+I_1 \end{cases}$$

3.2 FLUJOS PERPETUOS

En el caso en que el intervalo de definición del flujo sea $(0, \infty)$, en el cálculo del valor actual del flujo aparece una integral impropia, cuya convergencia debe de asegurarse para poder hablar de valor actual de dicho flujo; así:

$$\overline{V_0^\infty}=\int_0^\infty \gamma\cdot\delta^\tau\cdot A^{-\tau}\cdot d\tau=\gamma\cdot\int_0^\infty(\delta\cdot A^{-1})^\tau\cdot d\tau$$

Y por ser la función que figura como integrando exponencial, la condición de convergencia será que la base $\delta\cdot A^{-1}$ sea en valor absoluto menor que 1, por lo que deberá ocurrir que $\delta\cdot A^{-1}<1$, o sea, $\delta<A$, entonces:

$$\overline{V_0^\infty}=\lim_{t\to\infty}\gamma\cdot\int_0^t(\delta\cdot A^{-1})^\tau\cdot d\tau=\gamma\cdot\left[\lim_{t\to\infty}\frac{(\delta\cdot A^{-1})^t}{\ln(\delta\cdot A^{-1})}-\frac{1}{\ln(\delta\cdot A^{-1})}\right]=$$

$$=\frac{-\gamma}{\ln(\delta\cdot A^{-1})}=\frac{-\gamma}{\ln\delta-\ln A}=\frac{\gamma}{\ln A-\ln\delta}$$

cuya expresión en función del precio financiero ρ será:

$$\overline{V_0^\infty}=\frac{\gamma}{\rho-\ln\delta}\qquad\text{para }\delta<e^\rho\quad\text{o}\quad\ln\delta<\rho$$

y en el caso particular de interés compuesto quedará:

$$\overline{V_0^\infty}=\frac{\gamma}{\frac{1}{p}\cdot\ln(1+i\cdot p)-\ln\delta}=\frac{\gamma}{\ln(1+I_1)-\ln\delta}$$

para $\delta<(1+i\cdot p)^{1/p}=1+I_1$.

3.3 LOS FLUJOS UNIFORMES O DE INTENSIDAD CONSTANTE COMO CASO PARTICULAR DEGENERADO DE LOS FLUJOS CON INTENSIDAD VARIABLE EXPONENCIALMENTE

Si en las expresiones obtenidas en el epígrafe anterior correspondientes a los flujos exponenciales hacemos $\delta=1$, con lo que $\ln\delta=0$, y teniendo en cuenta que entonces $\ln\delta=0<\rho$, y también $\delta<(1+i\cdot p)^{1/p}=1+I_1$, obtendremos que:

$$\overline{V_0}=\gamma\cdot\frac{1-e^{-\rho\cdot t}}{\rho}=\gamma\cdot\overline{a}_{\overline{t}|\rho}\quad,\quad\overline{V_t}=\gamma\cdot\frac{e^{\rho\cdot t}-1}{\rho}=\gamma\cdot\overline{s}_{\overline{t}|\rho}$$

y

$$\overline{V_0}=\frac{\gamma}{\rho}=\gamma\cdot\overline{a}_{\overline{\infty}|\rho}$$

resultados que concuerdan con los valores actuales y finales de los flujos uniformes o de intensidad constante.

3.4 VALORACIÓN DE LOS FLUJOS EXPONENCIALES A TRAVÉS DEL VALOR ACTUAL O FINAL DE LOS FLUJOS DE INTENSIDAD UNIFORME

Como hemos visto, para el valor actual de los flujos temporales con intensidad exponencial hemos obtenido:

$$\overline{V_0}=\begin{cases} \gamma\cdot t & \text{si } \delta=e^{\rho} \quad \text{o} \quad \ln\delta=\rho \\ \gamma\cdot\dfrac{1-\delta^{t}\cdot e^{-\rho\cdot t}}{\rho-\ln\delta} & \text{si } \delta\neq e^{\rho} \quad \text{o} \quad \ln\delta\neq\rho \end{cases}$$

ahora, en el caso en que $\ln\delta\neq\rho$, podemos escribir:

$$\overline{V_0}=\gamma\cdot\frac{1-[e^{\ln\delta}]^{t}\cdot e^{-\rho\cdot t}}{\rho-\ln\delta}=\gamma\cdot\frac{1-e^{(\ln\delta-\rho)\cdot t}}{\rho-\ln\delta}$$

y podemos considerar los dos casos siguientes:

a) En primer lugar supondremos que $\delta<e^{\rho}$ o, lo que idéntico, $\ln\delta<\rho$, con lo que $\rho-\ln\delta=\rho_X>0$, y a partir de ello podremos poner:

$$\overline{V_0}=\gamma\cdot\frac{1-e^{\ (\rho-\ln\delta)\cdot t}}{\rho-\ln\delta}=\gamma\cdot\frac{1-e^{-\rho_X\cdot t}}{\rho_X}=\gamma\cdot\overline{a}_{\overline{t}|\rho_X}$$

de modo que obtenemos el valor del flujo exponencial a partir del valor actual del flujo uniforme, donde con ρ_X representamos un tanto instantáneo de interés que es igual a la diferencia entre el tanto instantáneo de valoración ρ y la tasa instantánea de variación exponencial $\ln\delta$.

b) Si ahora suponemos que $\delta>e^{\rho}$, o sea, que $\ln\delta>\rho$, tendremos que $\ln\delta-\rho=\rho_Y>0$, y a partir de esto podremos poner:

$$\overline{V_0}=\gamma\cdot\frac{1-e^{(\ln\delta-\rho)\cdot t}}{-(\ln\delta-\rho)}=\gamma\cdot\frac{e^{\rho_Y\cdot t}-1}{\rho_Y}=\gamma\cdot s_{\overline{t}|\rho_Y}$$

y así obtenemos el valor del flujo exponencial a partir del valor final del flujo uniforme, donde con ρ_Y representamos un tanto instantáneo de interés, que es igual ahora a la diferencia entre la tasa instantánea de crecimiento exponencial $\ln\delta>\rho$ y el propio tanto instantáneo de valoración ρ.

Con ello podremos escribir resumidamente:

$$\overline{V_0}=\begin{cases} \gamma\cdot\overline{a}_{\overline{t}|\rho_X} & \text{con } \rho_X=\rho-\ln\delta & \text{si } \ln\delta<\rho \\ \gamma\cdot t & & \text{si } \ln\delta=\rho \\ \gamma\cdot s_{\overline{t}|\rho_Y} & \text{con } \rho_Y=\ln\delta-\rho & \text{si } \ln\delta>\rho \end{cases}$$

si la valoración se realizase en interés compuesto debería sustituirse el tanto instantáneo de valoración ρ por:

$$\rho=\frac{1}{p}\cdot\ln(1+i\cdot p)=\ln(1+I_1)$$

Asimismo, el valor final de estos flujos exponenciales vendrá dado sin más que multiplicar el valor actual por el factor

$$e^{\rho\cdot t}=(1+i\cdot p)^{t/p}=(1+I_1)^t$$

con lo que podremos escribir:

$$\overline{V}_t=\begin{cases}\gamma\cdot e^{\rho\cdot t}\cdot\overline{a}_{\overline{t}|\rho_X} & \text{con } \rho_X=\rho-\ln\delta \qquad \text{si } \ln\delta<\rho\\ \gamma\cdot e^{\rho\cdot t}\cdot t & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si } \ln\delta=\rho\\ \gamma\cdot e^{\rho\cdot t}\cdot s_{\overline{t}|\rho_Y} & \text{con } \rho_Y=\ln\delta-\rho \qquad \text{si } \ln\delta>\rho\end{cases}$$

y también en el caso de que el flujo sea perpetuo, y recordando que la condición de convergencia era $\delta<e^{\rho}$, o sea, $\ln\delta<\rho$, tendremos que haciendo como antes $\rho_X=\rho-\ln\delta$ queda:

$$\overline{V}_0^{\infty}=\frac{\gamma}{\rho-\ln\delta}=\frac{\gamma}{\rho_X}=\gamma\cdot\frac{1}{\rho_X}=\gamma\cdot\overline{a}_{\overline{\infty}|\rho_X}$$

expresión formalmente idéntica a la correspondiente al flujo temporal cuando $\ln\delta<\rho$, sin más que hacer $n\to\infty$.

A partir de estos resultados podría obtenerse de una forma muy simple el caso de los flujos uniformes, sin más que hacer $\delta=1$, con lo que $\ln=0<\rho$, siendo entonces $\rho_X=\rho-\ln\delta=\rho$, con lo que

$$\overline{V}_0=\gamma\cdot\overline{a}_{\overline{t}|\rho_X}=\gamma\cdot\overline{a}_{\overline{t}|\rho}$$

$$\overline{V}_t=\gamma\cdot e^{\rho\cdot t}\cdot\overline{a}_{\overline{t}|\rho_X}=\gamma\cdot e^{\rho\cdot t}\cdot\overline{a}_{\overline{t}|\rho}=\gamma\cdot\overline{s}_{\overline{t}|\rho}$$

y, por último,

$$\overline{V}_0^{\infty}=\gamma\cdot\overline{a}_{\overline{\infty}|\rho_X}=\gamma\cdot\overline{a}_{\overline{\infty}|\rho}=\gamma\cdot\frac{1}{\rho}$$

3.5 OBTENCIÓN DEL VALOR ACTUAL Y FINAL DE LOS FLUJOS TEMPORALES VARIABLES EXPONENCIALMENTE, EN FUNCIÓN DE LAS CORRESPONDIENTES RENTAS ANUALES CONSTANTES

Si consideramos ahora que t es un número entero de años y tenemos en cuenta que al ser

$$\rho=\frac{1}{p}\cdot\ln(1+i\cdot p)=\ln(1+I_1) \quad \text{y} \quad e^{\rho}=1+I_1$$

podemos escribir que:

$$\bar{a}_{\overline{t}|\rho} = \frac{1-e^{-\rho\cdot t}}{\rho} = \frac{1-(1+I_1)^{-t}}{\ln(1+I_1)} = \frac{I_1}{\ln(1+I_1)} \cdot \frac{1-(1+I_1)^{-t}}{I_1} =$$

$$= \frac{I_1}{\ln(1+I_1)} \cdot a_{\overline{t}|I_1}$$

y de la misma forma también:

$$s_{\overline{t}|\rho} = \frac{I_1}{\ln(1+I_1)} \cdot s_{\overline{t}|I_1}$$

con lo que obtendremos:

$$\overline{V_0} = \begin{cases} \gamma \cdot \dfrac{X_1}{\ln(1+X_1)} \cdot a_{\overline{t}|X_1} & \text{con } X_1 = \dfrac{1+I_1-\delta}{\delta} \qquad \text{si } \delta < 1+I_1 \\ \gamma \cdot t & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \delta = 1+I_1 \\ \gamma \cdot \dfrac{Y_1}{\ln(1+Y_1)} \cdot s_{\overline{t}|Y_1} & \text{con } Y_1 = \dfrac{\delta-(1+I_1)}{1+I_1} \qquad \text{si } \delta > 1+I_1 \end{cases}$$

ya que

$$X_1 = e^{\rho_X} - 1 = e^{\rho - \ln\delta} - 1 = \frac{e^{\rho}}{\delta} - 1 = \frac{1+I_1}{\delta} - 1 = \frac{1+I_1-\delta}{\delta}$$

y también:

$$Y_1 = e^{\rho_Y} - I = e^{\ln\delta - \rho} - 1 = \frac{\delta}{e^{\rho}} - 1 = \frac{\delta}{1+I_1} - 1 = \frac{\delta-(1+I_1)}{1+I_1}$$

siendo $\rho = \ln(1+I_1)$ e $I_1 = e^{\rho} - 1$ el tanto efectivo anual equivalente al tanto instantáneo ρ.

De forma idéntica, para los valores finales de los flujos temporales con intensidad variable exponencialmente tendremos:

$$\overline{V_t} = \begin{cases} \gamma \cdot (1+I_1)^t \cdot \dfrac{X_1}{\ln(1+X_1)} \cdot a_{\overline{t}|X_1} & \text{con } X_1 = \dfrac{1+I_1-\delta}{\delta} \qquad \text{si } \delta < 1+I_1 \\ \gamma \cdot (1+I_1)^t \cdot t & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \delta = 1+I_1 \\ \gamma \cdot (1+I_1)^t \cdot \dfrac{Y_1}{\ln(1+X_1)} \cdot s_{\overline{t}|Y_1} & \text{con } Y_1 = \dfrac{\delta-(1+I_1)}{1+I_1} \qquad \text{si } \delta > 1+I_1 \end{cases}$$

Con estas últimas expresiones pueden calcularse los valoes de $\overline{V_0}$ y $\overline{V_t}$ sin más que recurrir a las tablas financieras usuales, que nos dan todos los elementos necesarios, o bien utilizar directamente las subrutinas financieras más simples incorporadas en máquinas de calcular de uso extendido en la actualidad, como ya hemos apuntado anteriormente.

Estos resultados son generalizables aun si t no es un número entero de años, siempre que exista, como es normal, un período P tal que $n \cdot P = t$, siendo n un número entero, o sea que tendremos $n = t \cdot \frac{1}{P} = t \cdot m$, ya que entonces podríamos hacer:

$$\rho = \frac{1}{P} \cdot \ln(1 + i \cdot p) = m \cdot \ln(1 + I_m)$$

siendo entonces $e^{\rho} = (1 + I_m)^m$, con lo que podremos escribir:

$$\bar{a}_{\overline{t}|\rho} = \frac{1 - e^{-\rho \cdot t}}{\rho} = \frac{1 - (1 + I_m)^{-m \cdot t}}{m \cdot \ln(1 + I_m)} = \frac{I_m}{m \cdot \ln(1 + I_m)}$$

$$\frac{1 - (1 + I_m)^{-n}}{I_m} = \frac{I_m}{m \cdot \ln(1 + I_m)} \cdot a_{\overline{n}|I_m} = \frac{I_m}{m \cdot \ln(1 + I_m)} \cdot a_{\overline{m \cdot t}|I_m}$$

y, de idéntica forma, obtenemos para el valor final:

$$s_{\overline{t}|\rho} = \frac{I_m}{m \cdot \ln(1 + I_m)} \cdot s_{\overline{m \cdot t}|I_m}$$

resultando entonces las expresiones siguientes, correspondientes al valor actual del flujo exponencial:

$$\overline{V}_0 = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{m} \cdot \dfrac{X_m}{\ln(1 + X_m)} \cdot a_{\overline{m \cdot t}|X_m} \text{ con } X_m = \dfrac{1 + I_m - \delta^{1/m}}{\delta^{1/m}} & \text{si } \delta^{1/m} < 1 + I_m \\ \gamma \cdot t & \text{si } \delta^{1/m} = 1 + I_m \\ \dfrac{\gamma}{m} \cdot \dfrac{X_m}{\ln(1 + X_m)} \cdot s_{\overline{m \cdot t}|Y_m} \text{ con } Y_m = \dfrac{\delta^{1/m} - (1 + I_m)}{1 + I_m} & \text{si } \delta^{1/m} > 1 + I_m \end{cases}$$

ya que:

$$X_m = (1 + X_1)^{1/m} - 1 = e^{\rho_X/m} - 1 = e^{(\rho - \ln \delta)/m} - 1 = \left[\frac{e^{\rho}}{\delta}\right]^{1/m} - 1 =$$

$$= \left[\frac{1 + I_m}{\delta}\right]^{1/m} - 1 = \frac{1 + I_m}{\delta^{1/m}} - 1 = \frac{1 + I_m - \delta^{1/m}}{\delta^{1/m}}$$

y también:

$$Y_m = (1 + Y_1)^{1/m} - 1 = e^{\rho_Y/m} - 1 = e^{(\ln \delta - \rho)/m} - 1 = \left[\frac{\delta}{e^{\rho}}\right]^{1/m} - 1 =$$

$$= \left[\frac{\delta}{1 + I_1}\right]^{1/m} - 1 = \frac{\delta^{1/m}}{1 + I_m} - 1 = \frac{\delta^{1/m} - (1 + I_m)}{1 + I_m}$$

de forma análoga podríamos hacer para el valor final $\overline{V}_t$.

3.6 FLUJOS DIFERIDOS

Aun en el caso en que el flujo fuese diferido, es normal que la función de intensidad del flujo $c(\tau)$ venga dada de forma que τ esté referido al diferimiento d, inicio del flujo, y no al momento cero desde el que se observa éste; entonces los valores actuales correspondientes al flujo inmediato valorado en d vendrán, en el caso de ley estacionaria, multiplicados por el factor de actualización dado por:

$$e(d, 0) = A^{-d} = (1 + i \cdot p)^{-d/p} = (1 + I_1)^{-d} = e^{-\rho \cdot d}$$

siendo invariante el valor final.

Esto es, tendríamos que:

$$d/\overline{V}_0 = \overline{V}_0 \cdot A^{-d} = \overline{V}_0 \cdot (1 + i \cdot p)^{-d/p} = \overline{V}_0 \cdot (1 + I_1)^{-d}$$

$$d/\overline{V}_0^{\infty} = \overline{V}_0^{\infty} \cdot A^{-d} = \overline{V}_0^{\infty} \cdot (1 + i \cdot p)^{-d/p} = \overline{V}_0^{\infty} \cdot (1 + I_1)^{-d}$$

y

$$d/\overline{V}_t = \overline{V}_t$$

En el caso en que $c(\tau)$ viniese dada de forma que τ se diese desde cero, cambiaríamos de variable haciendo $\tau = d + \tau'$, con lo que:

$$c(\tau) = \gamma \cdot \delta^{\tau} = \gamma \cdot \delta^{d+\tau'} = \gamma \cdot \delta^{d} \cdot \delta^{\tau'} = \gamma' \cdot \delta^{\tau'} = c_1(\tau') = \delta^{d} \cdot \gamma \cdot \delta^{\tau'} = \delta^{d} \cdot c(\tau')$$

De esta forma la función de intensidad referida a un τ' dado desde d sería la primitiva intensidad multiplicada por δ^d, por lo que los valores actuales del flujo diferido serán los correspondientes al flujo considerado inmediato multiplicados por el factor de actualización y además por δ^d, ya que:

$$d/\overline{V}_0 = \int_d^{d+t} \gamma \cdot \delta^{\tau} \cdot A^{-\tau} \cdot d\tau = \int_0^t \gamma \cdot \delta^{d} \cdot \delta^{\tau'} \cdot A^{-d} \cdot A^{-\tau'} \cdot d\tau' =$$
$$= \left[\int_0^t \gamma \cdot \delta^{\tau'} \cdot A^{-\tau'} \cdot d\tau'\right] \cdot A^{-d} \cdot \delta^{d} = \overline{V}_0 \cdot A^{-d} \cdot \delta^{d}$$

donde en la primera integral hemos hecho el cambio de variable expuesto anteriormente, o sea, $\tau = d + \tau'$. De forma idéntica, obtendríamos para el flujo perpetuo:

$$d/\overline{V}_0^{\infty} = \overline{V}_0^{\infty} \cdot A^{-d} \cdot \delta^{d}$$

Y, por último, el valor final del flujo diferido temporal será tal que, aun no viéndose afectado por el factor financiero, sí quedará afectado por el factor δ^d, como los valores actuales, ya que:

$$d/\overline{V}_t = \int_d^{d+t} \gamma \cdot \delta^{\tau} \cdot A^{d+t-\tau} \cdot d\tau = \int_0^t \gamma \cdot \delta^{d} \cdot \delta^{\tau'} \cdot A^{t-\tau'} \cdot d\tau' =$$
$$= \left[\int_0^t \gamma \cdot \delta^{\tau'} \cdot A^{t-\tau'} \cdot d\tau'\right] \cdot \delta^{d} = \overline{V}_t \cdot \delta^{d}$$

4. APLICACION A LA AMORTIZACION PERIODICA DE PRESTAMOS MEDIANTE RENTA DE TERMINOS VARIABLES EN PROGRESION GEOMETRICA

Como una aplicación de los resultados obtenidos en el estudio de la valoración de las rentas variables en progresión geométrica, al que hemos dedicado el epígrafe 2 de este trabajo, vamos a estudiar aquí las operaciones financieras de préstamo amortizable periódicamente, con interés constante y vencido, cuyos términos amortizativos son variables en progresión geométrica.

4.1 Ecuación de equilibrio financiero

Esta operación de préstamo lleva consigo la equivalencia entre la prestación única y el conjunto de contraprestaciones formadas por la renta amortizativa, según

$$\{(C\,,\,0)\} \underset{I_m}{\equiv} \{(\alpha_r\,,\,r\cdot P)\}_{r=1,2,\dots,n}$$

donde hemos considerado la prestación en el origen y la renta de las contraprestaciones como formada por n términos, inmediata y de periodicidad P, siendo I_m el tanto efectivo para dicho período, y

$$\alpha_r = \alpha_1 \cdot q^{r-1} \qquad \text{para } r = 1, 2, \dots, n$$

o sea que los términos amortizativos son variables en progresión geométrica. Esta equivalencia da lugar a la siguiente ecuación de equilibrio considerada en el origen, en función del primer término α_1:

$$C = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \cdot (1+I_m)^{-r} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_1 \cdot q^{r-1} \cdot (1+I_m)^{-r} =$$

$$= \alpha_1 \cdot (1+I_m)^{-1} \cdot \sum_{r=1}^{n} \left[q \cdot (1+I_m)^{-1}\right]^{r-1}$$

y haciendo el cambio de variable $q \cdot (1+I_m)^{-1} = s$, tendremos que llamando

$$\Phi(s) = \sum_{r=1}^{n} s^{r-1} = \sum_{r=0}^{n-1} s^r$$

la ecuación de equilibrio quedará como:

$$C = \alpha_1 \cdot (1+I_m)^{-1} \cdot \Phi(s)$$

donde, considerando α_1 como función de s, quedará explicitada mediante:

$$\alpha_1 = \frac{C \cdot (1+I_m)}{\Phi(s)} \quad \text{siendo } \Phi(s) = \sum_{r=0}^{n-1} s^r \quad \text{y} \quad s = \frac{q}{1+I_m}$$

de forma que tomando como datos de la operación la cuantía del préstamo C, la periodicidad en la amortización P, el número de períodos amortizativos n

y el tanto efectivo de interés I_m, queda definida la función α_1, primer término amortizativo, como función de la razón de variación geométrica q, o sea, $\alpha_1 = f(q)$, compuesta a través de la variable s y la transformación Φ.

De forma similar, la equivalencia da lugar a la siguiente ecuación de equilibrio considerada al final del n-ésimo período, en función del último término amortizativo α_n:

$$C \cdot (1+I_m)^n = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \cdot (1+I_m)^{n-r} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_n \cdot q^{-(n-r)} \cdot (1+I_m)^{n-r} =$$

$$= \alpha_n \cdot \sum_{r=1}^{n} \left[q^{-1} \cdot (1+I_m) \right]^{n-r}$$

y haciendo el cambio de variable $q^{-1} \cdot (1+I_m) = t = 1/s$, tendremos que:

$$\sum_{r=1}^{n} t^{n-r} = \sum_{r=0}^{n-1} t^r = \Phi(t)$$

y la ecuación de equilibrio quedará entonces como:

$$C \cdot (1+I_m)^n = \alpha_n \cdot \Phi(t)$$

donde, considerando α_n como función de t, quedará explicitada mediante:

$$\alpha_n = \frac{C \cdot (1+I_m)^n}{\Phi(t)} \quad \text{siendo} \quad \Phi(t) = \sum_{r=0}^{n-1} t^r \quad \text{y} \quad t = \frac{1+I_m}{q}$$

de forma que, igual que antes, queda definida la función α_n, último término amortizativo, como función compuesta de la razón q de variación geométrica, a través de la variable t y de la transformación Φ.

4.2 ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO QUE NOS DA α_1 EN FUNCIÓN DE q

Como hemos visto, α_1 viene expresada como una función compuesta de q, a través de la variable s y la transformación Φ, de modo que:

$$\alpha_1 = \frac{C \cdot (1+I_m)}{\Phi(s)} \quad \text{siendo} \quad \Phi(s) = \sum_{r=0}^{n-1} s^r \quad \text{y} \quad s = \frac{q}{1+I_m}$$

Pasaremos seguidamente a estudiar el comportamiento de la función $\alpha_1 = f(q)$, ya que en principio cada combinación de los parámetros α_1 y q, que satisfaga la ecuación de equilibrio, dará lugar a una posible estructura en la amortización del préstamo; no obstante, incorporaremos a estos parámetros unas restricciones de carácter financiero, con la finalidad de que los términos amortizativos reúnan una serie de propiedades. Con esta finalidad consideraremos como primera restricción el que todo término amortizativo α_r debe cubrir por lo menos el pago de los intereses devengados durante dicho período, para lo cual deberá ser:

$$\alpha_r \geq J_r \qquad \text{para } r = 1, 2, \ldots, n$$

y en particular para $r=1$ tendremos que $\alpha_1 \geq J_1 = C \cdot I_m$, con lo que obtenemos una cota inferior para la variación de α_1; la otra restricción que vamos a incorporar resulta de considerar a la razón q como positiva, para que de esta forma todos los términos amortizativos también sean positivos al serlo el primero de ellos y la razón de la progresión geométrica. Se descartará el que la razón pueda ser $q=0$, ya que entonces sólo existiría un término amortizativo propiamente dicho, quedando así amortizado el préstamo el primer período, y su duración no sería n, como en principio suponemos. Por todo ello limitaremos nuestro estudio de la función α_1 para los valores de la variable $q>0$.

4.2.1 *Determinación de las intersecciones con los ejes*

En primer lugar, si $q=0$, tendremos que:

$$s = \frac{q}{1+I_m} = 0 \quad \text{y} \quad \Phi(0) = 1$$

luego $\alpha_1 = C \cdot (1+I_m)$, con lo que podremos escribir que:

$$\alpha_1 (q=0) = C \cdot (1+I_m)$$

que nos da la intersección de la función α_1 con el eje de ordenadas.

Por otra parte, al ser α_1 un cociente de funciones con el numerador constante, no podrá nunca anularse y, por tanto, no existirá intersección con el eje de abscisas.

4.2.2 *Asíntota horizontal*

Como nos interesa analizar la función α_1 para valores de la variable $q>0$, calcularemos el límite de α_1 cuando $q \to +\infty$, observándose entonces que al ser $s=q/(1+I_m)$ también s tenderá a $+\infty$, con lo que tendremos:

$$\lim_{q \to +\infty} \alpha_1 = \lim_{s \to +\infty} \frac{C \cdot (1+I_m)}{\sum_{r=0}^{n-1} s^r} = 0$$

con lo que hemos obtenido $\alpha_1 = 0$ como una asíntota horizontal hacia $+\infty$ de la función $\alpha_1 = f(q)$.

4.2.3 *Análisis del crecimiento o decrecimiento de la función $\alpha_1 = f(q)$*

Para analizar el crecimiento de la función $\alpha_1 = f(q)$ calcularemos su primera derivada, teniendo en cuenta que se trata de una función compuesta dada por:

$$\alpha_1 = \frac{C \cdot (1+I_m)}{\Phi(s)} \quad \text{con} \quad \Phi(s) = \sum_{r=0}^{n-1} s^r \quad \text{y} \quad s = \frac{q}{1+I_m}$$

así quedará como derivada:

$$\frac{d\alpha_1}{dq}=\frac{d\alpha_1}{d\Phi(s)}\cdot\frac{d\Phi(s)}{ds}\cdot\frac{ds}{dq}=\frac{-C\cdot(1+I_m)}{\Phi(s)^2}\cdot\Phi'(s)\cdot\frac{1}{1+I_m}=$$

$$=-\frac{C\cdot\Phi'(s)}{\Phi(s)^2}=-\frac{C\cdot\sum_{r=1}^{n-1} r\cdot s^{r-1}}{\left[\sum_{r=0}^{n-1} s^r\right]^2}$$

con lo que para todo $s\geq 0$, o sea para todo $q\geq 0$, tendremos que:

$$\frac{d\alpha_1}{dq}<0$$

lo que nos indica que la función α_1 decrece monótonamente con la variable q, habiendo visto en el apartado anterior que este decrecimiento es asintótico hacia $\alpha_1=0$.

4.2.4 *Análisis de la concavidad y convexidad*

Para analizar la concavidad y convexidad de la función $\alpha_1=f(q)$, con $q\geq 0$, calcularemos su segunda derivada a partir del resultado obtenido para la primera:

$$\frac{d\alpha_1}{dq}=-\frac{C\cdot\Phi'(s)}{\Phi(s)^2}\qquad \text{con } s=\frac{q}{1+I_m}$$

a partir de lo cual se obtendrá:

$$\frac{d^2\alpha_1}{dq^2}=\frac{d\left[\frac{d\alpha_1}{dq}\right]}{ds}\cdot\frac{ds}{dq}=\frac{-C\cdot\Phi''(s)\cdot\Phi(s)^2+C\cdot\Phi'(s)\cdot 2\cdot\Phi(s)\cdot\Phi'(s)}{\Phi(s)^4}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{1+I_m}=\frac{C}{1+I_m}\cdot\frac{2\cdot\Phi'(s)^2-\Phi(s)\cdot\Phi''(s)}{\Phi(s)^3}=$$

$$=\frac{C}{1+I_m}\cdot\frac{2\cdot\left[\sum_{r=0}^{n-1} r\cdot s^{r-1}\right]^2-\left[\sum_{r=0}^{n-1} s^r\right]\cdot\left[\sum_{r=2}^{n-1} r\cdot(r-1)\cdot s^{r-2}\right]}{\left[\sum_{r=0}^{n-1} s^r\right]^3}$$

y para saber el signo de esta derivada, que será el que corresponda al numerador, nos veremos obligados a simplificarlo, teniendo en cuenta para ello que:

$$\Phi(s)=\sum_{r=0}^{n-1} s^r=\frac{1-s^n}{1-s}$$

resultado que se obtiene sin más que sumar los términos de la progresión geométrica, cuyo término general aparece en el sumatorio, y derivando entonces ambos miembros obtendremos:

$$\Phi'(s) = \sum_{r=0}^{n-1} r \cdot s^{r-1} = \frac{1 - n \cdot s^{n-1} + (n-1) \cdot s^n}{(1-s)^2}$$

y derivando de nuevo quedará:

$$\Phi''(s) = \sum_{r=2}^{n-1} r \cdot (r-1) \cdot s^{r-2} =$$

$$= \frac{2 - n \cdot (n-1) \cdot s^{n-2} + 2 \cdot n \cdot (n-2) \cdot s^{n-1} - (n-1) \cdot (n-2) \cdot s^n}{(1-s)^3}$$

A partir de estas expresiones para $\Phi(s)$ y sus dos primeras derivadas, sustituyendo el numerador a analizar, quedará después de efectuar las oportunas simplificaciones:

$$2 \cdot \Phi'(s)^2 - \Phi(s) \cdot \Phi''(s) = \frac{n \cdot s^{n-2}}{(1-s)^4}$$

$$\left[(n-1) - 2 \cdot n \cdot s + (n+1) \cdot s^2 + (n+1) \cdot s^n - 2 \cdot n \cdot s^{n+1} + (n-1) \cdot s^{n+2}\right]$$

donde el polinomio de grado $n+2$, que figura entre corchetes, es tal que por ser cero la suma de sus coeficientes admite a $s = 1$ como raíz, y, por tanto, aplicando la regla de Ruffini, podemos ver que es igual a:

$$(s-1) \cdot \left[-(n-1) + (n+1) \cdot s - (n+1) \cdot s^n + (n-1) \cdot s^{n+1}\right]$$

por la misma razón que antes también el nuevo polinomio cociente de grado $n+1$ admite a $s = 1$ como raíz, obteniéndose:

$$(s-1)^2 \cdot \left[(n-1) - 2 \cdot \sum_{r=1}^{n-1} s^r + (n-1) \cdot s^n\right]$$

y de nuevo tendremos que será igual a:

$$(s-1)^3 \cdot \left[-(n-1) + \sum_{r=1}^{n-1} [n - 1 - 2 \cdot (r-1)] \cdot s^r\right]$$

y, por último, tendremos que dividiendo de nuevo el polinomio de grado $n-1$ por $s-1$ nos dará:

$$(s-1)^4 \cdot \sum_{j=0}^{n-2} \left[\sum_{i=0}^{j} (n - 1 - 2 \cdot i) \cdot s^{n-2-j}\right]$$

y haciendo el cambio de índice $j = n - 2 - k$, con lo que $k = n - 1 - j$, queda:

$$(s-1)^4 \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \left[\sum_{i=0}^{n-2-k} (n - 1 - 2 \cdot i)\right] \cdot s^k$$

y efectuando la suma anterior, que nos da:

$$\sum_{i=0}^{n-2-k} (n-1-2\cdot i)=[n-(k+1)]\cdot(k+1)$$

haciendo por último el cambio de índice $k+1=r$, tendremos que:

$$(s-1)^4\cdot\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\cdot r\cdot s^{r-1}$$

con lo que el numerador de la segunda derivada de α_1 respecto a q quedará igual a:

$$n\cdot s^{n-2}\cdot\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\cdot r\cdot s^{r-1}$$

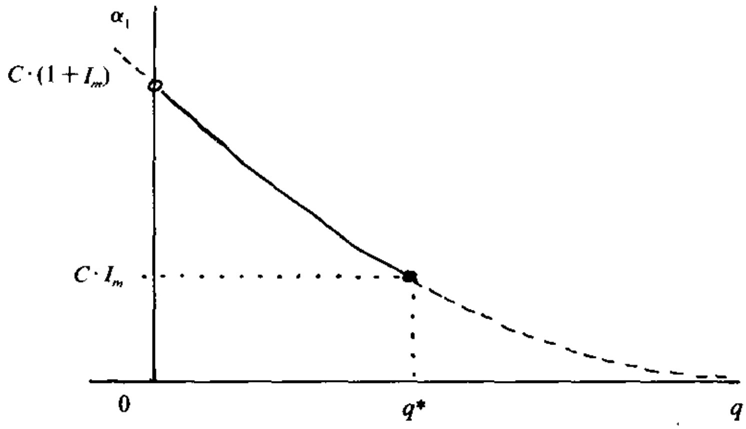
y, por tanto, dicha derivada será:

$$\frac{d^2\alpha_1}{dq^2}=\frac{C}{1+I_m}\cdot\frac{n\cdot s^{n-2}\cdot\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\cdot r\cdot s^{r-1}}{\left[\sum_{r=0}^{n-1}s^r\right]^3}$$

con lo que podemos observar que dicha derivada será mayor que cero para todo $q\geq 0$. Este resultado nos dice que la función $\alpha_1=f(q)$ es cóncava respecto a la parte positiva del eje de ordenadas o convexa desde el origen.

4.2.5 *Representación gráfica*

Por todo el análisis anterior podemos concluir que la representación gráfica de $\alpha_1=f(q)$ vendrá dada por la gráfica siguiente, en la que con traza continua hemos representado los pares de valores de α_1 y q que, cumpliendo las condiciones de la ecuación de equilibrio, satisfacen asimismo las condiciones específicas de tipo financiero, a las que nos hemos referido ya al comienzo del epígrafe 4.2, la parte representada por traza discontinua da las combinaciones aceptables matemáticamente, pero sin sentido financiero.



Con todo lo anterior hemos acotado la posible variación tanto en el primer término amortizativo α_1 como en la razón q; así, respecto a α_1 deberá ser, según puede observarse por proyección en el eje de ordenadas, tal que:

$$C \cdot I_m \leq \alpha_1 < C \cdot (1 + I_m)$$

y en cuanto a la razón q, por proyección en el eje de abscisas, se obtiene que:

$$0 < q \leq q^*$$

donde con q^* hemos representado el máximo valor posible para la razón q, correspondiendo éste al mínimo valor del primer término amortizativo, o sea, $\alpha_1 = C \cdot I_m$, cuya determinación trataremos como caso particular en los epígrafes siguientes.

4.3 OBTENCIÓN DEL PRIMER TÉRMINO AMORTIZATIVO CONOCIDA LA RAZON q DE VARIACIÓN EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Una vez estudiada la función $\alpha_1 = f(q)$, hemos visto que es unívoca y estrictamente decreciente para $q \geq 0$, quedando explicitada α_1 mediante la siguiente expresión:

$$\alpha_1 = f(q) = \begin{cases} \dfrac{C \cdot (1 + I_m)}{n} & \text{si } q = 1 + I_m \\[2ex] C \cdot \dfrac{(1 + I_m) - q}{1 - q^n \cdot (1 + I_m)^{-n}} & \text{si } q \neq 1 + I_m \end{cases}$$

Ahora bien, para la determinación del primer término amortizativo α_1, dada la razón q de variación en progresión geométrica, podemos recurrir también a la relación obtenida entre el valor actual de una renta variable en progresión geométrica y la valoración de rentas unitarias constantes, estudiada en el epígrafe 2.4, con lo que:

$$\alpha_1 = f(q) = \begin{cases} C \cdot (1 + I_m) \cdot \dfrac{1}{1 + a_{\overline{n-1}|X_m}} & \text{con } X_m = \dfrac{1 + I_m - q}{q} \\ & \text{si } q < 1 + I_m \\[1ex] \dfrac{C \cdot (1 + I_m)}{n} & \text{si } q = 1 + I_m \\[1ex] C \cdot (1 + I_m) \cdot \dfrac{1}{s_{\overline{n}|Y_m}} & \text{con } Y_m = \dfrac{q - (1 + I_m)}{1 + I_m} \\ & \text{si } q > 1 + I_m \end{cases}$$

mediante esta última expresión de la función $\alpha_1 = f(q)$ podrán utilizarse las tablas financieras y máquinas de calcular que incorporan subrutinas con los valores actuales y finales de las rentas unitarias constantes, con la consiguiente ventaja operativa.

4.4 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN INVERSA $q=f^{-1}(\alpha_1)$

Como hemos visto en el epígrafe 4.2, la función $\alpha_1=f(q)$ viene dada como función compuesta mediante la siguiente expresión:

$$\alpha_1=\frac{C\cdot(1+I_m)}{\Phi(s)} \quad \text{con } \Phi(s)=\sum_{r=0}^{n-1} s^r \quad \text{siendo } s=\frac{q}{1+I_m}$$

Con todo ello, si tratásemos ahora de obtener la función inversa $q=f^{-1}(\alpha_1)$, que existe para $0\leq\alpha_1<C\cdot(1+I_m)$, por ser $\alpha_1=f(q)$ biunívoca para $q>0$, como hemos comprobado al ser monótona decreciente, tendríamos que:

$$\Phi(s)=\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1} \quad \text{con } \Phi(s)=\sum_{r=0}^{n-1} s^r \quad \text{y} \quad s=\frac{q}{1+I_m}$$

por lo que quedaría:

$$\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(1+I_m)^r}\cdot q^r=\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}$$

cuyo primer miembro es un polinomio en q de grado $n-1$, con lo que se hace imposible obtener una expresión que dé la razón q en función del primer término α_1 de forma explícita; esto significa que no puede determinarse la característica funcional f^{-1}.

Las obras clásicas de Matemática Financiera han considerado el problema de la obtención de q dado α_1 como complejo y resoluble tan sólo por tanteo de una forma muy penosa; nosotros daremos a este problema una resolución sencilla, basada en las relaciones existentes con la valoración de rentas constantes y la posibilidad de obtener cualquiera de los parámetros que intervienen en la definición de dichos valores, conocidos los restantes; aquí el problema se reducirá a la deteminación del tanto de interés correspondiente a la valoración de una cierta renta unitaria constante.

Este tema de la determinación del tanto de interés correspondiente a una renta unitaria ha sido tratado con profusión y de una forma exhaustiva por la mayoría de los autores de temas de Matemática Financiera, obteniendo una serie de acotaciones y fórmulas aproximadas que resolvían el problema, aunque de forma algo incómoda y con una aproximación relativa.

Este problema ha quedado superado con la aparición de las modernas máquinas de calcular, algunas de las cuales están preparadas especialmente para usos financieros, incorporando subrutinas de cálculo para la obtención tanto de los factores de capitalización y descuento como de los valores actuales y finales de las rentas unitarias, e incluso sus recíprocos, términos unitarios de amortización e imposición, respectivamente. Mediante estas subrutinas, si damos el valor actual o final y el número de términos, se obtiene instantáneamente el correspondiente tanto de interés sin más que pulsar la adecuada instrucción.

De este modo, a partir de la expresión obtenida en el epígrafe 2.4 para el valor actual de las rentas variables en progresión geométrica, en función de los valores actual y final de las rentas unitarias constantes, podemos escribir:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}=\begin{cases} 1+a_{\overline{n-1}|X_m}<n & \text{con } X_m=\dfrac{1+I_m-q}{q} \quad \text{si } q<1+I_m \\ n & \text{si } q=1+I_m \\ s_{\overline{n}|Y_m}>n & \text{con } Y_m=\dfrac{q-(1+I_m)}{1+I_m} \quad \text{si } q>1+I_m \end{cases}$$

A partir de aquí, la determinación de q se efectuará de la siguiente forma:

1. En primer lugar determinaremos el cociente

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}$$

comparando seguidamente si éste es menor, igual o mayor que n.

2. Una vez efectuada la comparación

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}\lesseqgtr n$$

se presentará uno de los tres casos siguientes:

a) Supongamos que $C\cdot(1+I_m)/\alpha_1<n$; entonces tendremos que:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}=1+a_{\overline{n-1}|X_m} \quad \text{o sea que } a_{\overline{n-1}|X_m}=\frac{C\cdot(1+I_m)-\alpha_1}{\alpha_1}$$

expresión en la que nuestra incógnita será el tanto X_m y, una vez obtenido éste, tendremos que:

$$q=\frac{1+I_m}{1+X_m}$$

b) Si fuese $C\cdot(1+I_m)/\alpha_1=n$, el problema sería inmediato, ya que entonces $q=1+I_m$.

c) Por último, en el caso en que $C\cdot(1+I_m)/\alpha_1>n$, tendremos que:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}=s_{\overline{n}|Y_m}$$

expresión de la que se obtendría el valor de la incógnita, o sea, el tanto Y_m, y una vez conocido éste, tendríamos que:

$$q=(1+I_m)\cdot(1+Y_m)$$

De este modo, a partir de la expresión obtenida en el epígrafe 2.4 para el valor actual de las rentas variables en progresión geométrica, en función de los valores actual y final de las rentas unitarias constantes, podemos escribir:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}=\begin{cases} 1+a_{\overline{n-1}|X_m}<n & \text{con } X_m=\dfrac{1+I_m-q}{q} \quad \text{si } q<1+I_m \\ n & \text{si } q=1+I_m \\ s_{\overline{n}|Y_m}>n & \text{con } Y_m=\dfrac{q-(1+I_m)}{1+I_m} \quad \text{si } q>1+I_m \end{cases}$$

A partir de aquí, la determinación de q se efectuará de la siguiente forma:

1. En primer lugar determinaremos el cociente

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}$$

comparando seguidamente si éste es menor, igual o mayor que n.

2. Una vez efectuada la comparación

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}\lesseqgtr n$$

se presentará uno de los tres casos siguientes:

a) Supongamos que $C\cdot(1+I_m)/\alpha_1<n$; entonces tendremos que:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}=1+a_{\overline{n-1}|X_m} \qquad \text{o sea que } a_{\overline{n-1}|X_m}=\frac{C\cdot(1+I_m)-\alpha_1}{\alpha_1}$$

expresión en la que nuestra incógnita será el tanto X_m y, una vez obtenido éste, tendremos que:

$$q=\frac{1+I_m}{1+X_m}$$

b) Si fuese $C\cdot(1+I_m)/\alpha_1=n$, el problema sería inmediato, ya que entonces $q=1+I_m$.

c) Por último, en el caso en que $C\cdot(1+I_m)/\alpha_1>n$, tendremos que:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}=s_{\overline{n}|Y_m}$$

expresión de la que se obtendría el valor de la incógnita, o sea, el tanto Y_m, y, una vez conocido éste, tendríamos que:

$$q=(1+I_m)\cdot(1+Y_m)$$

Resumiendo estos tres casos tendremos que para determinar la razón q de variación en progresión geométrica, conocido el primer término amortizativo α_1, haremos:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1} \lesseqgtr n, \ y \begin{cases} <: a_{\overline{n-1}|X_m} = \dfrac{C\cdot(1+I_m)-\alpha_1}{\alpha_1} \rightarrow X_m \rightarrow q=\dfrac{1+I_m}{1+X_m} \\ =: \qquad q=1+I_m \\ >: s_{\overline{n}|Y_m} = \dfrac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1} \rightarrow Y_m \rightarrow q=(1+I_m)\cdot(1+Y_m) \end{cases}$$

con lo que la función inversa $q=f^{-1}(\alpha_1)$ podría escribirse como:

$$q=f^{-1}(\alpha_1)=\begin{cases} (1+I_m)\cdot(1+Y_m) \quad \text{con } s_{\overline{n}|Y_m}=\dfrac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1} & \text{si } \alpha_1<\dfrac{C\cdot(1+I_m)}{n} \\ 1+I_m & \text{si } \alpha_1=\dfrac{C\cdot(1+I_m)}{n} \\ \dfrac{1+I_m}{1+X_m} \quad \text{con } a_{\overline{n-1}|X_m}=\dfrac{C\cdot(1+I_m)-\alpha_1}{\alpha_1} & \text{si } \alpha_1>\dfrac{C\cdot(1+I_m)}{n} \end{cases}$$

En particular, a partir de esta expresión puede calcularse el valor q^*, que, como hemos visto, es el máximo valor admisible para la razón de la progresión geométrica y que corresponde al menor valor del primer término amortizativo $\alpha_1=C\cdot I_m$, con lo que:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}=\frac{C\cdot(1+I_m)}{C\cdot I_m}=\frac{1+I_m}{I_m} \quad \text{y} \quad \frac{C\cdot(1+I_m)}{\alpha_1}-1= =\frac{1+I_m}{I_m}-1=\frac{1}{I_m}$$

y quedará:

$$q^*=f^{-1}(C\cdot I_m)=\begin{cases} \dfrac{1+I_m}{1+X^*_m} \quad \text{con } a_{\overline{n-1}|X^*_m}=\dfrac{1}{I_m} & \text{si } \dfrac{1+I_m}{I_m}< <n \text{ o } 1<(n-1)\cdot I_m \\ 1+I_m & \text{si } \dfrac{1+I_m}{I_m}= =n \text{ o } 1=(n-1)\cdot I_m \\ (1+I_m)\cdot(1+Y^*_m) \quad \text{con } s_{\overline{n}|Y^*_m}=\dfrac{1+I_m}{I_m} & \text{si } \dfrac{1+I_m}{I_m}> >n \text{ o } 1>(n-1)\cdot I_m \end{cases}$$

4.5 ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO QUE NOS DA α_n EN FUNCIÓN DE q

Como hemos obtenido el epígrafe 4.1, la ecuación de equilibrio del préstamo puede expresarse alternativamente, a través del último término amortizativo α_n, como una función de q, $\alpha_n = g(q)$, compuesta a través de la variable t y la transformación Φ, mediante las relaciones siguientes:

$$\alpha_n = \frac{C\cdot(1+I_m)^n}{\Phi(t)} \qquad \text{siendo } \Phi(t) = \sum_{r=0}^{n-1} t^r \qquad \text{y} \qquad t = \frac{1+I_m}{q}$$

Estudiaremos ahora el comportamiento de esta función para valores de la variable $q>0$, pues, como hemos visto, nos interesarán las posibles estructuras amortizativas tales que la razón q de variación en progresión geométrica de los términos amortizativos se encuentre entre

$$0 < q \leq q^*$$

Para efectuar este estudio seguiremos pasos análogos a los efectuados en el epígrafe 4.2.

4.5.1 *Intersecciones con los ejes*

Podemos ver que en principio no existen intersecciones con los ejes, ya que la función no está definida para $q=0$, aunque sí que tiene sentido calcular su límite por la derecha, obteniéndose que para $q \to 0^+$ tenemos que $t \to +\infty$, y entonces:

$$\lim_{q\to 0^+} \alpha_n = \lim_{t\to +\infty} \frac{C\cdot(1+I_m)^n}{\sum_{r=0}^{n-1} t^r} = 0$$

resultado que, por otro lado, tiene un perfecto sentido financiero si consideramos que con $\alpha_1 = C\cdot(1+I_m)$ hemos obtenido que $q=0$, con lo que $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Por otra parte, como α_n no puede anularse por ser un cociente con el numerador constante, tampoco podrán existir intersecciones con el eje de abscisas, con lo que podemos concluir diciendo que la función está tan cerca como queramos del origen de coordenadas, pero no corta a ninguno de los dos ejes.

4.5.2 *Asíntota horizontal*

Como nos interesa analizar la función para $q>0$, calcularemos el límite de α_n cuando $q \to +\infty$; ahora bien, si $q \to +\infty$, esto hace que $t \to 0^+$, con lo que tendremos:

$$\lim_{q\to +\infty} \alpha_n = \lim_{t\to 0^+} \frac{C\cdot(1+I_m)^n}{\sum_{r=0}^{n-1} t^r} = C\cdot(1+I_m)^n$$

con lo que hemos obtenido $\alpha_n = C \cdot (1 + I_m)^n$ como una asíntota horizontal hacia el $+\infty$ de la función $\alpha_n = g(q)$.

De fácil interpretación financiera, ya que, como sabemos, si $q \rightarrow +\infty$, entonces $\alpha_1 \rightarrow 0$, con lo que el único término amortizativo distinto de cero sería el n-ésimo y último α_n, habiéndose convertido el préstamo en uno con reembolso único comprensivo de capital e intereses por la cuantía del montante acumulado, o sea, $\alpha_n = C \cdot (1 + I_m)^n$.

4.5.3 *Análisis del crecimiento y decrecimiento*

Para analizar el crecimiento o decrecimiento de la función $\alpha_n = g(q)$ para $q > 0$, calcularemos su primera derivada, teniendo en cuenta que se trata de una función compuesta dada por:

$$\alpha_n = \frac{C \cdot (1 + I_m)^n}{\Phi(t)} \qquad \text{con } \Phi(t) = \sum_{r=0}^{n-1} t^r \qquad \text{y} \qquad t = \frac{1 + I_m}{q}$$

de esta forma quedará:

$$\frac{d\alpha_n}{dq} = \frac{d\alpha_n}{d\Phi} \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{dt}{dq} = - \frac{C \cdot (1 + I_m)^n}{\Phi(2)^2} \cdot \Phi'(t) \cdot \frac{-(1 + I_m)}{q^2} =$$

$$= C \cdot (1 + I_m)^{n-1} \cdot \frac{t^2 \cdot \Phi'(t)}{\Phi(t)^2} = C \cdot (1 + I_m)^{n-1} \frac{t^2 \cdot \sum_{r=0}^{n-1} r \cdot t^{r-1}}{\left[\sum_{r=0}^{n-1} t^r\right]^2}$$

con lo que para todo $t > 0$ o, lo que es lo mismo, para todo $q > 0$, tendremos que:

$$\frac{d\alpha_n}{dq} > 0$$

lo que nos indica que α_n crece monótonamente con q, habiendo visto en el apartado anterior que este crecimiento es asintótico hacia $\alpha_n = C \cdot (1 + I_m)^n$.

4.5.4 *Análisis de la concavidad y convexidad*

Para analizar la concavidad y convexidad de la función $\alpha_n = g(q)$ con $q > 0$ calcularemos su segunda derivada a partir del resultado obtenido para la primera:

$$\frac{d\alpha_n}{dq} = C \cdot (1 + I_m)^{n-1} \cdot \frac{t^2 \cdot \Phi'(t)}{\Phi(t)^2}$$

y teniendo en cuenta $t=(1+I_m)/q$, con lo que entonces será:

$$\frac{d^2\alpha_n}{dq^2}=\frac{d\left[\frac{d\alpha_n}{dq}\right]}{dt}\cdot\frac{dt}{dq}=C\cdot(1+I_m)^{n-1}\cdot$$

$$\frac{[2\cdot t\cdot\Phi'(t)+t^2\cdot\Phi''(t)]\cdot\Phi(t)^2-t^2\cdot\Phi'(t)\cdot 2\cdot\Phi(t)\cdot\Phi'(t)}{\Phi(t)^4}\cdot\frac{-(1+I_m)}{q^2}=$$

$$=\frac{C\cdot(1+I_m)^{n-2}\cdot t^2}{\Phi(t)^3}\cdot\left[t^2\cdot[2\cdot\Phi'(t)^2-\Phi(t)\cdot\Phi''(t)]-2\cdot t\cdot\Phi(t)\cdot\Phi'(t)\right]$$

El signo de esta derivada dependerá del factor que aparece entre corchetes, y para su análisis utilizaremos los resultados que sobre la transformación Φ hemos obtenido en el epígrafe 4.2.4. Así, para el minuendo de este término se tiene que:

$$t^2\cdot[2\cdot\Phi'(t)^2-\Phi(t)\cdot\Phi''(t)]=t^2\cdot\frac{n\cdot t^{n-2}}{(1-t)^4}\cdot(t-1)\cdot$$

$$\cdot[-(n-1)+(n+1)\cdot t-(n+1)\cdot t^n+(n-1)\cdot t^{n+1}]=$$

$$=\frac{n\cdot t^n}{(1-t)^3}\cdot[(n-1)-(n+1)\cdot t+(n+1)\cdot t^n-(n-1)\cdot t^{n+1}]=$$

$$=\frac{1}{(1-t)^3}\cdot[(n-1)\cdot n\cdot t^n-n\cdot(n+1)\cdot t^{n+1}+n\cdot(n+1)\cdot t^{2n}-(n-1)\cdot n\cdot t^{2n+1}]$$

y para el sustraendo tendremos que:

$$2\cdot t\cdot\Phi(t)\cdot\Phi'(t)=2\cdot t\cdot\frac{1-t^n}{1-t}\cdot\frac{1-n\cdot t^{n-1}+(n-1)\cdot t^n}{(1-t)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot t}{(1-t)^3}\cdot[1-n\cdot t^{n-1}+(n-2)\cdot t^n+n\cdot t^{2n-1}-(n-1)\cdot t^{2n}]=$$

$$=\frac{1}{(1-t)^3}\cdot[2\cdot t-2\cdot n\cdot t^n+2\cdot(n-2)\cdot t^{n+1}+2\cdot n\cdot t^{2n}-2\cdot(n-1)\cdot t^{2n+1}]$$

con lo que el término a analizar vendrá dado por la expresión siguiente:

$$\frac{1}{(1-t)^3}\left[-2\cdot t+[(n-1)\cdot n+2\cdot n]\cdot t^n-[n\cdot(n+1)+2\cdot(n-2)]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot t^{n+1}+[n\cdot(n+1)-2\cdot n]\cdot t^{2n}-[(n-1)\cdot n-2\cdot(n-1)]\cdot t^{2n+1}\right]=$$

$$=\frac{t}{(1-t)^3}\cdot\left[-2+n\cdot(n+1)\cdot t^{n-1}-(n-1)\cdot(n+4)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot t^n+(n-1)\cdot n\cdot t^{2n-1}-(n-2)\cdot(n-1)\cdot t^{2n}\right]$$

Como el factor que está entre corchetes tiene a $t=1$ como raíz, al sumar cero sus coeficientes, dividiendo el polinomio por $t-1$, utilizando la regla de Ruffini, obtendremos:

$$\frac{t\cdot(t-1)}{(1-t)^3}\cdot\left[2\cdot\sum_{r=0}^{n-2}t^r-(n-1)\cdot(n+2)\cdot t^{n-1}+2\cdot(n-1)\cdot\sum_{r=n}^{2n-2}t^r-(n-2)\cdot(n-1)\cdot t^{2n-1}\right]$$

por el mismo motivo que antes, el polinomio cociente tiene a $t=1$ como raíz, y dividiendo de nuevo por $t-1$ queda:

$$\frac{t\cdot(t-1)^2}{(1-t)^3}\cdot\left[-2\cdot\sum_{r=0}^{n-2}(r+1)\cdot t^r+(n-1)\cdot\sum_{r=0}^{n-1}(n-2\cdot r)\cdot t^{n-1+r}\right]$$

y de nuevo por el mismo procedimiento, nos quedará:

$$\frac{t\cdot(t-1)^3}{(1-t)^3}\left[\sum_{r=0}^{n-2}(r+1)\cdot(r+2)\cdot t^r-(n-1)\cdot\sum_{r=2}^{n-1}(r-1)\cdot(n-r)\cdot t^{n-2+r}\right]=$$

$$=t\cdot\left[-\sum_{r=0}^{n-2}(r+1)\cdot(r+2)\cdot t^r+(n-1)\cdot\sum_{r=2}^{n-1}(r-1)\cdot(n-r)\cdot t^{n-2+r}\right]$$

.con lo que tendremos:

$$\frac{d^2\alpha_n}{dq}=\frac{C\cdot(1+I_m)^{n-2}\cdot t^3}{\Phi(t)^3}\cdot\left[-\sum_{r=0}^{n-2}(r+1)\cdot(r+2)\cdot t^r+(n-1)\cdot\sum_{r=2}^{n-1}(r-1)\cdot(n-r)\cdot t^{n-2+r}\right]$$

cuyo signo dependerá del polinomio que aparece entre corchetes; dicho polinomio es de grado $2n-3$ y sus términos hasta el de grado n tienen coeficientes positivos, siendo cero el que corresponde al término de grado $n-1$ y negativos todos los restantes hasta el término independiente; además, la suma de los coeficientes positivos es $(n-2)\cdot(n-1)^2\cdot n/6$ y la de los negativos $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)/3$, siendo la diferencia entre los positivos y los negativos igual a $(n-5)\cdot(n-1)\cdot n^2/6$. Al existir una sola inversión en la sucesión de signos de los coeficientes, existirá una única raíz real positiva, que llamaremos t_0; entonces tendremos los casos siguientes:

a) $\dfrac{d^2\alpha_n}{dq^2}>0$ para $t>t_0$, o sea, para $\dfrac{1+I_m}{q}>t_0$, o, lo que es lo mismo, para $q<\dfrac{1+I_m}{t_0}=q_0$, donde la función será cóncava respecto a la parte positiva del eje de ordenadas.

b) $\dfrac{d^2\alpha_n}{dq^2}=0$ para $t=t_0$, o sea, para $\dfrac{1+I_m}{q}=t_0$, o, lo que es lo mismo, para $q=q_0=\dfrac{1+I_m}{t_0}$, en cuyo punto existirá una inflexión en la curvatura.

c) $\frac{d^2\alpha_n}{dq^2} < 0$ para $t < t_0$, o sea, para $\frac{1+I_m}{q} < t_0$, o, lo que es lo mismo, para $q > \frac{1+I_m}{t_0} = q_0$, donde, por tanto, la función será convexa respecto a la parte positiva del eje de ordenadas.

La posición del punto t_0 y, en consecuencia, de q_0 dependen del número de términos amortizativos n, dándose los siguientes casos:

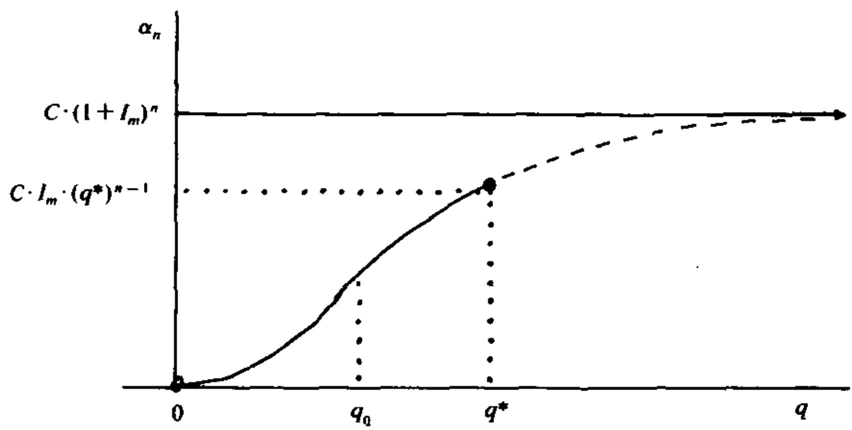
a) Si $1 < n < 5$, entonces la diferencia entre los coeficientes positivos y los negativos es negativa, siendo entonces $t_0 > 1$, con lo que $q_0 = (1+I_m)/t_0 < 1 + I_m$.

b) Si $n = 5$, entonces la diferencia entre coeficientes positivos y negativos es cero, con lo que $t_0 = 1$, y entonces $q_0 = 1 + I_m$.

c) Si, por último, fuese $n > 5$, entonces la diferencia entre los coeficientes positivos y los negativos es positiva, con lo que $t_0 < 1$ y, por tanto, $q_0 = (1+I_m)/t_0 > 1 + I_m$.

4.5.5 *Representación gráfica*

Por el análisis que hemos efectuado de los epígrafes anteriores, dentro del 4.5, podemos concluir que la representación gráfica de $\alpha_n = g(q)$ vendrá dada por:



En la que con la traza continua hemos representado los pares de valores de α_n y q, que, cumpliendo las condiciones de la ecuación de equilibrio, satisfacen también las condiciones específicas de tipo financiero, a las que nos hemos referido en el epígrafe 4.2, y que para q hacen que deba estar comprendida en:

$$0 < q \leq q^*$$

con q^* la máxima razón de la progresión geométrica en que pueden variar los términos amortizativos, ya determinada al final del epígrafe 4.4.

Esta acotación en la razón q de variación lleva consigo la acotación del n-ésimo término amortizativo, que por ello deberá estar comprendido entre:

$$0 < \alpha_n \leq C \cdot I_m \cdot (q^*)^{n-1}$$

siendo la cota superior la que corresponde a la razón q^*, que da lugar, como ya sabemos, a un primer término amortizativo $\alpha_1 = C \cdot I_m$, con lo que el último de dichos términos será: $\alpha_n = C \cdot I_m \cdot (q^*)^{n-1}$.

4.6 Obtención del último término amortizativo α_n, conocida la razon q de variación en progresión geométrica

La obtención de α_n conocida q es inmediata, ya que partiendo de que:

$$\alpha_n = g(q) = \alpha_1 \cdot q^{n-1} = f(q) \cdot q^{n-1}$$

tendríamos que mediante las expresiones dadas en el epígrafe 4.3 para $f(q)$ llegaríamos a:

$$\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{C \cdot (1 + I_m)^n}{n} & \text{si } q = 1 + I_m \\[2ex] C \cdot q^{n-1} \cdot \dfrac{(1 + I_m) - q}{1 - q^n \cdot (1 + I_m)^{-n}} & \text{si } q \neq 1 + I_m \end{cases}$$

Ahora bien, de forma similar a lo que hicimos en el epígrafe 4.3, para la determinación de α_1 podemos recurrir también a la relación obtenida en el epígrafe 2.4 entre el valor final de una renta variable en progresión geométrica y las rentas unitarias, con lo que:

$$\alpha_n = g(q) = \begin{cases} C \cdot (1 + I_m)^n \cdot \dfrac{1}{s_{\overline{n}|X_m}} & \text{con } X_m = \dfrac{1 + I_m - q}{q} \quad \text{si } q < 1 + I_m \\[2ex] \dfrac{C \cdot (1 + I_m)}{n} & \text{si } q = 1 + I_m \\[2ex] C \cdot (1 + I_m)^n \cdot \dfrac{1}{1 + a_{\overline{n-1}|Y_m}} & \text{con } Y_m = \dfrac{q - (1 + I_m)}{1 + I_m} \quad \text{si } q > 1 + I_m \end{cases}$$

expresión que nos da el último término amortizativo, en función de los valores actual y final de las oportunas rentas unitarias, valoradas al tanto Y_m o X_m, respectivamente.

4.7 Análisis de la función inversa $q=g^{-1}(\alpha_n)$

Al igual que hemos dicho para la función inversa $q=f^{-1}(\alpha_1)$, en este caso la existencia de $q=g^{-1}(\alpha_n)$ también está asegurada para $0<\alpha_n\leq C\cdot(1+I_m)^n$, pues, como hemos visto, $\alpha_n=g(q)$ es biunívoca en dicho intervalo al ser monótona creciente y tomar dichos valores para $q>0$. No obstante su existencia, esta función inversa no puede determinarse explícitamente de una forma analítica sencilla, pues también queda determinada a través de un polinomio en q de grado $n-1$; ahora bien, nosotros obtendremos la razón que corresponde a un último término amortizativo α_n dado, utilizando como en el caso de la función f^{-1}, su relación con las rentas unitarias, a través de la cual podemos escribir:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)^n}{\alpha_n}=\begin{cases} s_{\overline{n}|X_m}>n & \text{con } X_m=\dfrac{1+I_m-q}{q} \quad \text{si } q<1+I_m \\ n & \text{si } q=1+I_m \\ 1+a_{\overline{n-1}|Y_m}<n & \text{con } Y_m=\dfrac{q-(1+I_m)}{1+I_m} \quad \text{si } q>1+I_m \end{cases}$$

A partir de aquí, la determinación de q, conocido el último término amortizativo α_n, se efectuará de la forma siguiente:

1. En primer lugar determinaremos el cociente:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)^n}{\alpha_n}$$

comparando si éste es mayor, igual o menor que n.

2. Una vez efectuada la comparación

$$\frac{C\cdot(1+I_m)^n}{\alpha_n}\gtreqless n$$

se presentará uno de los tres casos siguientes:

a) Supongamos que $C\cdot(1+I_m)^n/\alpha_n>n$; entonces tendremos que:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)^n}{\alpha_n}=s_{\overline{n}|X_m}$$

expresión en la que nuestra incógnita será el tanto X_m, y, una vez obtenido éste, tendremos que:

$$q=\frac{1+I_m}{1+X_m}$$

b) Si fuese $C\cdot(1+I_m)^n/\alpha_n = n$, el problema estaría resuelto, puesto que entonces $q = 1 + I_m$.

c) Y, por último, en el caso en que $C\cdot(1+I_m)^n/\alpha_n < n$, tendremos que:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)^n}{\alpha_n} = 1 + a_{\overline{n-1}|Y_m}$$

o sea que se obtendrá:

$$a_{\overline{n-1}|Y_m} = \frac{C\cdot(1+I_m)^n - \alpha_n}{\alpha_n}$$

de la que obteniendo el valor de la incógnita Y_m, tanto de valoración, tendremos que:

$$q = (1+I_m)\cdot(1+Y_m)$$

Resumiendo estos tres casos tendremos que para determinar la razón q de variación en progresión geométrica, en función del último término amortizativo α_n, haremos:

$$\frac{C\cdot(1+I_m)^n}{\alpha_n} \gtreqless n, \ y \left\{\begin{array}{ll} >: & s_{\overline{n}|X_m} = \dfrac{C\cdot(1+I_m)^n}{\alpha_n} \rightarrow X_m \rightarrow \\ & \rightarrow q = \dfrac{1+I_m}{1+X_m} \\ =: & \rightarrow q = 1 + I_m \\ <: & a_{\overline{n-1}|Y_m} = \dfrac{C\cdot(1+I_m)^n - \alpha_n}{\alpha_n} \rightarrow Y_m \rightarrow \\ & \rightarrow q = (1+I_m)\cdot(1+Y_m) \end{array}\right.$$

con lo que la función inversa $q = g^{-1}(\alpha_n)$ podría escribirse como:

$$q = g^{-1}(\alpha_n) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1+I_m}{1+X_m} & \text{con } s_{\overline{n}|X_m} = \dfrac{C\cdot(1+I_m)^n}{\alpha_n} \\ & \text{si } \alpha_n < \dfrac{C\cdot(1+I_m)^n}{n} \\ 1 + I_m & \text{si } \alpha_n = \dfrac{C\cdot(1+I_m)^n}{n} \\ (1+I_m)\cdot(1+Y_m) & \text{con } a_{\overline{n-1}|Y_m} = \dfrac{C\cdot(1+I_m)^n - \alpha_n}{\alpha_n} \\ & \text{si } \alpha_n > \dfrac{C\cdot(1+I_m)^n}{n} \end{array}\right.$$

Con esto queda terminado nuestro análisis de la amortización periódica de un préstamo a interés vencido, cuyos términos amortizativos son variables en progresión geométrica.

5. BIBLIOGRAFIA

FERRER JAUME, Luis: *Cálculo Financiero*. Ed. Labor, S. A., Barcelona, 1947, páginas 136-149, 153-155 y 277-279.

GIL PELÁEZ, Lorenzo: *Matemática de las Operaciones Financieras*, fascículo 2. Edición del autor, Madrid, 1969, págs. 27-30, 71-73 y 125-126.

INSOLERA, Filadelfo: *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*. Ed. Aguilar, Madrid, 1950, págs. 254-255 y 314-319.

LEVI, Eugenio: *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*, vol. I. Ed. Bosch, Barcelona, 1973, págs. 152-156, 222 y 403-418.

LOBEZ URQUÍA, José: *Matemática Financiera con nociones de Cálculo Actuarial*. Edición del autor, Zaragoza, 1966, págs. 122-137, 162-163 y 242-247.

RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, Alfonso M.: *Matemática de la Financiación*. Ed. Universidad de Barcelona, Barcelona, 1974, págs. 305-310 y 363-367.