# Una solución racional (teórico-práctica) de los dos problemas interdependientes que plantea la contabilización en un ejercicio económico de las primas provinentes como pendientes de los anteriores

Por Antonio LASHERAS-SANZ

*Teoría que no es práctica, es utopía, y práctica que no es teoría, es rutina.*

G. de Azcarate.

*... y la rutina, es la práctica de teorías superadas,* agregamos nosotros.

## I

## RAZON DEL PRESENTE ESTUDIO Y ENUNCIACION DEL TEMA

Si la Contabilidad da las normas para recoger y clasificar, conforme a ciertas razones de analogias, los elementos patrimoniales (derechos y obligaciones de todas clases) vinculados a una unidad económica, las corrientes de renta, positivas (ingresos) y negativas (egresos), sustantivas o adjetivas producidas directa o indirectamente por causa de la finalidad objetiva que persiga, así como sus aumentos o disminuciones de dichos elementos, producidos por causas endógenas y exógenas propias del funcionamiento de esa unidad económica, reducido todo al común denominador del valor expresado en unidades monetarias de cuenta, es indudable que la función de la Contabilidad coincide con el concepto que, siguiendo a Messadaglia y Rümelin, expuso el Profesor Carlos Ferraris para la Estadística, en su libro *Saggi di Economía, Statistica, ecc.* (Laescher, Turín, 1880), diciendo que es "*la observación metódica y más universal posible* (en nuestro caso se entiende esta universalidad en lo que se tome por unidad económica) *de los hechos enumerados en masa, reducidos a grupos homogéneos (las cuentas) e interpretados mediante la inducción matemática* (Balance y otros estudios económicos basados en él)".

Así, pues, la Contabilidad se nos ofrece, ni más ni menos, como "un método estadístico *suí generis* al servicio de la Economía de la Empresa, con sus actos de *recolección de datos* (escrituraciones elementales de los hechos contables), *escrutinio y agrupación* (cuentas correspondientes a cada clase de bienes), su sintetización en estados especiales (Balance y Cuenta de Pérdidas y Ganancias), etc., y aportación de los conceptos propios para la estructuración de la doctrina de la Economía de la Empresa y aplicación concreta al caso particular de que se trate; *crítica de los resultados, comparaciones,* etc., para aportar los elementos de juicio necesarios para la *Política* económica de la Empresa.

La Contabilidad debe recoger todos los hechos contabilizables; para permitir conocer la verdadera situación de la Empresa, en su más amplia visión, que es la del aspecto económico-jurídico en toda su extensión, ya que de él pueden desprenderse todas las demás consideraciones susceptibles de suscitar algún interés. Por tanto, no debe limitarse a recoger los hechos puramente cuantitativos (criterio "materialista"), sino también los cualitativo-cuantitativos que tanto pueden poner de relieve aspectos interesantes de la situación económico-jurídica de una Empresa. Así, el Balance y la Cuenta de Pérdidas y Ganancias (cuya conjunción da lugar al llamado "Balance dinámico" que en Seguros es indispensable) podrán cumplir bien sus respectivas misiones, respetando los requisitos que les son exigibles: síntesis, ordenación, precisión, claridad, sinceridad, exactitud, universalidad y constancia.

Ahora bien, de todos los hechos contables, en la *Empresa aseguradora*, las vicisitudes que ofrecen las primas son las que requieren preferente atención, por constituir la fuente fundamental de recursos de la economía del Seguro y por sus consiguientes repercusiones en ciertos aspectos jurídicos con respecto a los asegurados, de tesorería y en el establecimiento de las reservas técnicas derivadas de ellas.

Desde luego, y como cuestión previa, hay que resaltar que en la explotación industrial del Seguro (entendiendo por "industria", lo que genéricamente en Economía: "Conjunto de procedimientos ordenados metódicamente para la realización de un fin útil destinado a la satisfacción de un sector o parte de él, de las necesidades materiales del hombre"), en relación con las primas, cabe distinguir aquellas en las que la recaudación se hace mediante emisión de los consiguientes recibos, de las que no cabe tal emisión por la simultaneidad que se produce entre el surgimiento del derecho del asegurador al cobro de ellas y la percepción de las mismas, como sucede, por ejemplo, en el Seguro obligatorio de viajeros, ya que la prima se percibe conjuntamente, en el billete, con el precio del transporte; así como en el caso de aquellos "Diarios" para los que el hecho de estar en posesión de un ejemplar de la edición del día, caso de ser víctima de un accidente su poseedor, tiene reconocido derecho a una determinada indemnización por tal accidente, ya que el precio del ejemplar comprende la prima del correspondiente Seguro. Y, por último, en los Seguros Sociales obligatorios, en los que la movilidad de la cuantiosa masa de asegurados daría lugar, en cuanto a la previa emisión de recibos de primas, a imprecisiones respecto de los mismos y a la consiguiente complejidad y carestía administrativa que convertirían al seguro en antieconómico, por lo que lo práctico es seguir el criterio simple de contabilizar los cobros y pagos al realizarse éstos.

Dentro de estas perspectivas, en cuanto sigue se va a sustentar el criterio de una relativa máxima amplitud contable, porque, además de ser en él la cuestión más importante desde el punto de vista del problema a tratar, es el más complejo y el que permite las simplificaciones que se consideren convenientes desde el punto de vista de cada caso particular.

## II

## LOS DOS PROBLEMAS CONTABLES CONEXOS A TRATAR Y SUS RESPECTIVAS SOLUCIONES

Para el fin que se persigue, supóngase una hipotética Entidad aseguradora (cuya naturaleza jurídica no hace al caso) que en un ejercicio económico, que en lo sucesivo será denominado "ejercicio actual", tendrá que contabilizar:

a) Los recibos de primas que emita en él por pólizas vivas procedentes o concertadas en "ejercicios anteriores" (ya sean plurianuales, anuales renovables por la tácita, anuales con cláusula de renovación periódica o simplemente renovadas).

b) Los recibos de primas de seguros concertados en el "ejercicio actual", de las características antes indicadas y/o (según la rama de Seguro de que se trate) de coberturas de riesgo inferiores al año; y

c) Recibos de primas vencidas en ejercicios anteriores al "actual" y que han trascendido a éste como pendientes de cobro.

Unos y otros recibos podrán referirse a seguros de primas únicas, anuales y fraccionarias (semestrales, trimestrales, etc.).

Los recibos de las categorías que quedan especificadas, de los que los correspondientes a las a) y b) se designan por $E$ (inicial de emisiones) y los a la c) correlativamente por $e$, unos serán cobrados en el "ejercicio actual", que se expresarán en lo sucesivo por $K$, los de la emisión del propio "ejercicio actual", y por $k$, los de los pendientes procedentes de ejercicios anteriores; otros serán anulados, cuyas respectivas designaciones serán $A$, los de las emisiones del "ejercicio actual", y *a*, los de los pendientes de ejercicios anteriores; y otros, por fin, pasarán como pendientes de cobro al "ejercicio siguiente", que se designarán, también respectivamente por *P* y *p*, los cuales en dicho ejercicio siguiente serán designados conjuntamente por *e'*, pero que en este trabajo no será utilizada como tal.

El proceso contable aconsejable para las dos categorías de recibos de primas emitidas a) y b), si la Contabilidad de la Empresa ha de responder a los fines a perseguir expuestos en la Sección I de este estudio, es el siguiente:

Al ser emitidos los recibos, el asiento contable debe de ser el de

$$R = E + G \quad \textit{Recibos} \quad \text{A} \quad \begin{cases} \textit{Primas emitidas} & E \\ \textit{Accesorios de los recibos} & G \end{cases}$$

Como las cuestiones a tratar son solamente las de las primas, no se entra en su detalle.

Tampoco es cuestión a tratar en este momento la de la puesta de los recibos en circulación.

Tan pronto como la Empresa tenga noticia del cobro, procederá al asiento de

$$K \quad \textit{Primas emitidas} \quad \text{A} \quad \textit{Primas cobradas} \quad K$$

Por las primas de los recibos emitidos que se anulen, el asiento procedente será el de

$$\left.\begin{matrix} A & \textit{Primas anuladas} \\ g & \textit{Accesorios de recibos} \end{matrix}\right\} \quad \text{A} \quad \textit{Recibos} \quad A + g = Q$$

Tampoco es de esta ocasión la contabilización de los recibos devueltos para su remesa a otro Agente cobrador o para anular, sino, de éstos, al ser anulados como acaba de verse.

Quizá haya quien entienda que la anulación de los recibos debe hacerse mediante un asiento inverso al de su emisión, pero para los efectos contables expuestos en I y recordados ya antes en esta Sección, y para los fundamentales que inspira el presente trabajo, es conveniente esta contabilización que formaliza además lo que en tal aspecto conste en el *Registro de Recibos anulados* y consiguientemente sus primas, o registración equivalente que se observe. De todas formas, la cuenta de *Primas anuladas* deberá ser saldada a final del ejercicio por la de *Primas emitidas*, mediante el asiento de

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *A* | *Primas emitidas* | A | *Primas anuladas* | *A* |

El primer problema de los dos a que se hace indicación en el título general de este trabajo, y en el particular de esta Sección, es el de la contabilización de los cobros y anulaciones habidos de entre las primas de los recibos que vienen pendientes de cobro del Balance del ejercicio anterior. Este problema surge de que si bien lo correcto sería contabilizar las primas cobradas y las anuladas recordando que cuando fueron emitidos sus recibos se contabilizaron en sus respectivos ejercicios conforme a lo que se acaba de exponer para las primas de los recibos emitidos en el ejercicio actual, la contabilización correcta debería hacerse distinguiendo el ejercicio en que fueron emitidos unos y otros, tanto para los cobros como para las anulaciones, para que no ejercieran influencia en la partida de *Primas del ejercicio* de la Cuenta de *Pérdidas y Ganancias* del "ejercicio actual". Pero semejante forma de proceder complicaría y encarecería la administración de la Entidad.

Para salvar estas dificultades, es aconsejable que, por las primas de los recibos procedentes de "ejercicios anteriores" como pendientes de cobro, se haga el asiento de

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *e* | *Pérdidas y Ganancias* | A | *Primas emitidas* | *e* |

y luego contabilizar los cobros y las anulaciones, como si estos recibos (cobrados y anulados) hubiesen sido emitidos en el "ejercicio actual".

Por lo que se refiere al cobro y anulación de los recibos como tales, todo queda reducido a una permuta o disminución de bienes activos.

En consecuencia, de una contabilización como la que se propugna, al final del "ejercicio actual", las cuentas que han entrado en juego presentarían como sus respectivas situaciones siguientes:

*Recibos:* Cargada, de entrada en el ejercicio, por los recibos pendientes de cobro procedentes como tales del Balance del "ejercicio anterior", y por las nuevas emisiones, y abonada por los anulados, de cualquiera que sea el ejercicio de que procedan, y por los correlativos cobrados, el saldo podrá no existir, pero, si existe, será deudor y expresivo del importe total de los recibos que al final del "ejercicio actual" pasan al siguiente como pendientes. Y es de advertir que esta denominación genérica de Recibos comprende los que se hallen tanto en poder de la dependencia correspondiente de la Empresa como en poder de los Agentes cobradores, admitiendo que las cuentas particulares de éstos como la general de *Efectos* o *Recibos al cobro* están completamente limpias de recibos que figuren indebidamente como pendientes de cobro o anulación.

*Primas emitidas:* Abonada, de entrada, por las primas de los recibos procedentes del Balance del "ejercicio anterior" como pendientes, y por las nuevas emisiones del "ejercicio actual", o sea por $e + E$, y cargada por las cobradas, $K + k$, y, al final del "ejercicio actual", mediante asiento de regularización, por las anuladas, $A + a$, en ambas clases tanto de las procedentes de las emisiones del propio ejercicio como de las de ejercicios anteriores, el saldo, si le hay, será acreedor y expresivo de las primas pendientes de cobro al final del ejercicio actual, tanto procedentes de las emitidas en él como de las de ejercicios anteriores: $P + p$. Es decir, que

$$(E + e) - (K + k) - (A + a) = P + p$$

*Primas cobradas:* Abonada por las cobradas procedentes de las emitidas en el ejercicio actual: $K$, y de las procedentes como pendientes de ejercicios anteriores: $k$, su saldo será acreedor y expresivo de las primas correspondientes a los recibos de primas cobradas en el ejercicio, en total: $K + k$.

*Primas anuladas:* Cargada por las primas correspondientes a todos los recibos anulados en el ejercicio, cualquiera que sea el de su emisión, y abonada por el saldo deudor, que será el total de sus cargas: $A + a$, al final del ejercicio, por pase del mismo a la Cuenta de *Primas emitidas*, se ofrece como una cuenta de orden puramente estadístico.

Al final del ejercicio actual, los saldos de las cuentas de *Primas emitidas* y *Primas cobradas* deben ser pasados a la Cuenta de *Pérdidas y Ganancias*, para integrar la partida acreedora de ella, de *Primas del ejercicio, netas de anulaciones*, mediante el asiento de

$$\left.\begin{array}{ll} P + p & \textit{Primas emitidas} \\ K + k & \textit{Primas cobradas} \end{array}\right\} \text{A} \quad \begin{array}{c} \textit{Pérdidas y Ganancias} \\ (K + k) + (P + p) \end{array}$$

Ahora bien (K + k) + (P + p) son las primas cobradas y no anuladas aún *en el* ejercicio, pero no las *Primas del ejercicio, netas de anulaciones*. Cierto que, por un asiento de regularización inicial, se ha cargado a *Pérdidas y Ganancias* con la cifra de primas procedentes de ejercicios anteriores como pendientes: $e$, por tanto, en sí, en esta Cuenta se tendrá:

$$(K + k) + (P + p) - e = K + k + P + p - k - a - p =$$
$$= K + P - a$$

que tampoco constituye la cifra de *Primas del ejercicio netas de anulaciones*, sino menor en la cantidad $a$. Y esto es lo que produce el segundo problema a resolver y al que antes se ha hecho reiterada referencia, que consiste en ver cómo se determinará, lo más aproximadamente posible, el valor de $a$

para aislarlo del cargo de regularización hecho por la cifra $e (= k + p + a)$, para separarla del saldo de la Cuenta de *Primas anuladas* y poder dejar en el Haber de la de *Pérdidas y Ganancias* solamente la que corresponde al concepto de su partida *Primas del* (imputables al) *ejercicio, netas de anulaciones,* haciéndola figurar en el Debe de esta misma Cuenta como *Primas pendientes de ejercicios anteriores anuladas* en el actual, pues aunque se dieran como partida de beneficio en los respectivos ejercicios en que fueron emitidas, la pérdida que su anulación significa para la Empresa, no queda más recurso que recogerla en el que se producen las correspondientes anulaciones, por la razón natural de que los ejercicios económicos no son intrínsecamente independientes en el orden económico, aunque a efectos fiscales se les considere como si lo fueran. La única posibilidad de evitar que estas anulaciones influyan como pérdida, en términos absolutos, en el ejercicio en que se produzcan, apareciendo como beneficio en el en que se emitieron las respectivas primas de estas anulaciones, estriba en establecer una cuenta de *Provisión para posibles futuras anulaciones de primas pendientes de cobro.* Esta cuenta se abonará cada ejercicio por la cifra que se aplique a tal provisión y se cargará por el montante de las primas anuladas en él dependientes de cobro procedentes de emisiones de ejercicios anteriores, con respectivos cargo y abono a la de *Pérdidas y Ganancias.* Y el saldo que presentará en cada ejercicio, antes del abono de la provisión correspondiente a él, podrá ser deudor, acreedor o nulo; significando el primero el exceso de las anulaciones habidas, sobre las provisiones hechas, que habrá que saldar como pérdida del ejercicio actual, y el segundo, un excedente de provisión que podrá ser saldado como beneficio o enjugado con una menor cifra de provisión o efectuar en él, lo que es equivalente.

Pero la determinación del valor de *a* no es cosa fácil de hacer en el orden racional estrictamente contable, pues dada la indiscriminación con que se ha procedido en cuanto queda dicho en relación con el criterio de contabilización propugnado para los cobros y anulaciones de primas, así como de la nueva cifra de primas pendientes de cobro de las emitidas en el ejercicio actual, para el siguiente, no resulta conocida más que la cifra total de todas las primas anuladas en el actual: $S = A + a$, procedente, una parte ,de las emisiones del propio ejercicio: $A$, y otra, de las ingresadas en él como pendientes procedentes de ejercicios anteriores: $a$.

La determinación de $a$ puede lograrse mediante la revisión de los recibos anulados durante el ejercicio contemplado, bien por el medio natural de "a mano" o mecánicamente, tanto más hoy por los procedimientos mecánicos electrónicos. Pero el procedimiento primitivo de "a mano" es lento y, para reducir su coste administrativo, entregado a empleados secundarios, con la natural exposición a errores; y los medios electrónicos significan —valga la semejanza— "matar moscas a cañonazos", lo que, por rápido que sea, es costoso, sobre todo cuando se puede acudir a otros medios sencillos de ejecución práctica y no costosos ni en tiempo ni en dinero.

Sin embargo, el procedimiento que se va a exponer, si bien rápido y simple de ejecución, implica la solución de un problema matemático complejo para llegar a justificar la realidad de la fórmula de aplicación que, una vez obtenida, tiene carácter general y es cómoda y rápida. Ahora bien, para no desorientar al lector en cuanto a la aplicación de la fórmula obtenida como más conveniente, se va a exponer ahora tal fórmula y su utilización, dejando el análisis matemático del problema que se plantea y la justificación de la fórmula de aplicación para la siguiente Sección de este trabajo.

Para ello, volviendo a las fórmulas de origen:

$$t = \frac{S}{E + e} = \frac{Er_1 + er_2}{E + e} \qquad [1]$$

donde

$$A = Er_1$$

y

$$a = er_2$$

y aplicando los siguientes valores:

$$r_1 = t\left(1 - t\,\frac{e}{E}\right)$$

y

$$r_2 = t(t + 1)$$

se puede obtener, con una muy suficiente aproximación el de

$$a = er_2 = et(t + 1)$$

Véase, ahora, la aplicación numérica al siguiente ejemplo:

Sean los siguientes valores numéricos asignados a los simbolos numéricos de carácter general establecidos anteriormente:

$$E = 18.000.000$$
$$e = 2.499.000$$
$$A = 3.000.000$$
$$a = 499.000$$

Los valores numéricos de $A$ y $a$ se dan ahora para comprobación de la bondad de la solución, pero como antes se ha dicho, con el criterio de contabilización propugnado no se conocen explícitamente, sino en su suma $S = A + a = 3.499.000$, pero ignorando su descomposición.

En consecuecia se tienen: $r_1 = 0'166.667$ y $r_2 = 0'199.080$, que lógicamente tampoco se conocen, porque, como se ha visto, resultan de las relaciones $A : E = r_1$ y $a : e = r_2$. Y lo que sí es determinable es $t = S : (E + e) = (Er_1 + er_2) : (E + e) = 0'170.691$.

Aplicando a estos datos la fórmula que acaba de quedar expuesta, se tiene

$$a = er_2 = e(t^2 + t) = e(0'029.135 + 0'170.691) = \\ = e \cdot 0'199.826 = 499.365$$

superior al obtenido directamente, en un 73,15 por cien mil, que constituye una diferencia prácticamente despreciable.

Queda, pues, confirmada la afirmación anterior de la sencillez, rapidez y precisión, y economía de tiempo y coste que supone el procedimiento propugnado en cuanto antecede.

## III

## ANALISIS DEL ASPECTO MATEMATICO DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA

La relación natural, de principio, entre los datos del problema es, por lo que se acaba de ver, la siguiente:

$$S = [A + a] = t(E + e) = Er_1 + er_2 \qquad [1']$$

Pero, volviendo a la expresión [1] que ya se ha visto al final de la Sección precedente inmediata, se observa que $\frac{A + a}{E + e}$ es la suma, término a término, de las fracciones $\frac{A}{E}$ y $\frac{a}{e}$, o lo que es igual, de $r_1$ y $r_2$.

Ahora bien, es de resaltar que, de ordinario, la relación entre las primas anuladas en un ejercicio respecto de las en vigor de que provienen (de las emitidas en él o de las emitidas en ejercicios anteriores entradas en el que se contempla como pendientes de cobro), suele resultar de mayor valor para las anuladas de las pendientes procedentes de ejercicios anteriores, que para las anulaciones de entre las emitidas en el ejercicio contemplado, pues las que de éstas se anularán en ejercicios posteriores al actual, de su emisión, al final de él figurarán como pendientes (de cobro o anulación). Y no se puede negar ni olvidar que, salvo los recibos de primas emitidos en el último trimestre del año, todos los que lleven más tiempo emitidos están ya amenazados de anulación, tanto más cuanto más atrasada sea la fecha de su emisión, por lo que es lógica la afirmación que acaba de quedar hecha. Sin embargo, no se puede descartar que por excepcionales circunstancias, generalmente poco corrientes, ocurra que a dichas relaciones correspondan valoraciones contrarias a las acabadas de citar, o raramente iguales; pero de lo que sigue a continuación se desprenderá la repercusión de esta contrariedad. Por ello, se considerará como de referencia básica el caso antedicho de que sean

$$r_1 = \frac{A}{E} < r_2 = \frac{a}{e}.$$

Comparando, ahora, en tal supuesto, $\frac{A}{E}$ y $\frac{a}{e}$ con $\frac{A+a}{E+e}$, dado que esta última fracción, según ya se ha resaltado, es la suma, término a término, de los homólogos entre sí, de las otras dos fracciones singulares que la forman, resalta el recuerdo del teorema de "Aritmética elemental" según el cual *cuando se suman término a término (los homólogos) de dos fracciones de distintos valores entre sí, el valor de la fracción resultante de esa suma queda comprendido entre los respectivos de las dos sumadas* (véase cualquier aritmética elemental, pero suficientemente razonada). Así, pues, se tiene que

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}} = \mathrm{r}_1 < \frac{\mathrm{A} + \mathrm{a}}{\mathrm{E} + \mathrm{e}} = \mathrm{t} < \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{e}} = \mathrm{r}_2 \qquad [1"]$$

Después de todo esto, se pueden formar las siguentes diferencias:

$$\mathrm{t} - \mathrm{r}_1 = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{a}}{\mathrm{E} + \mathrm{e}} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{aE} - \mathrm{Ae}}{\mathrm{E(E + e)}} =$$

$$= \frac{\mathrm{r_2Ee} - \mathrm{r_1Ee}}{\mathrm{E(E + e)}} = \mathrm{e}\,\frac{\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1}{\mathrm{E} + \mathrm{e}}$$

y

$$r_2 - t = \frac{a}{e} - \frac{A + a}{E + e} = \frac{aE - Ae}{e(E + e)} =$$

$$= \frac{r_2Ee - r_1Ee}{e(E + e)} = E\,\frac{r_2 - r_1}{E + e}$$

de donde:

$$\frac{t - r_1}{r_2 - t} = \frac{e}{E} \qquad [2]$$

y

$$E(t - r_1) = e(r_2 - t)$$

así como también:

$$t - r_1 = \frac{e}{E}\,(r_2 - t) \qquad [3]$$

y

$$r_2 - t = \frac{E}{e}\,(t - r_1) \qquad [4]$$

que desempeñan misión muy significativa en las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} S = [A + a] &= t(E + e) = Er_1 + er_2 = \\ &= E[t - (t - r_1)] + e[t + (r_2 - t)] = \\ &= t(E + e) - [E(t - r_1) - e(r_2 - t)] \qquad [5] \end{aligned}$$

con las que queda evidenciado que es

$$E(t - r_1) - e(r_2 - t) = 0 \qquad [5']$$

ecuación que por indeterminada admite infinitas soluciones.

La solución del problema, dados los términos en que queda planteada, sería fácil si, así como se conoce la suma $S$, pudiese ser conocida la diferencia $D = A - a$, pero por lo que queda dicho en la Sección II de este trabajo, la Contabilidad sólo proporciona la suma, y ésta sin discriminación de los valores particulares de $A$ y $a$. No obstante, el planteamiento de tal diferencia puede ser útil para obtener alguna nueva información. En efecto,

$$¿D? = A - a = Er_1 - er_2 = E[t - (t - r_1)] - e[t + (r_2 - t)]$$
$$= t(E - e) - [E(t - r_1) + e(r_2 - t)] \qquad [6]$$

que, por lo ya visto antes, en [3] y [4], puede seguir escribiéndose:

$$= t(E - e) - [E(t - r_1) + \frac{E}{e}\, e(t - r_1)]$$
$$= t(E - e) - 2E(t - r_1) \qquad [5'']$$

o también:

$$= t(E - e) - [E\frac{e}{E}(r_2 - t) + e(r_2 - t)]$$
$$= t(E - e) - 2e(r_2 - t) \qquad [5''']$$

relaciones que, aunque presuponen que $2E(t - r_1) = 0$ y $2e(r_2 - t) = 0$ y, por tanto, que son $r_1 = r_2 = t$, no aporta solución válida para el problema que se estudia, pero serán útiles como auxiliares para posteriores pasajes, como luego se verá.

Racionalmente, conforme a la lógica elemental matemática, la expresión [2] apunta otra solución, cual es la que resulta de hacer $t - r_1 = e$ y $r_2 - t = E$, que tampoco conviene al caso que se viene estudiando.

Ahora bien, no debe despreciarse, para lo que luego se verá, que $\frac{t - r_1}{r_2 - t}$ es una fracción cuyos términos son el resultado de restar entre sí los términos homólogos de las otras dos: $\frac{t}{r_2}$ y $\frac{r_1}{t}$ lo que hace recordar otro teorema de la "Aritmética elemental", que, a su vez, es corolario del antes recordado, y que dice que *si se restan término a término* (los homólogos se entiende) *dos fracciones de valores desiguales, el valor de la fracción cuyos términos se han tomado como minuendos, queda comprendido entre el de la resultante de la resta y el de la que sus términos se han tomado como sustraendos*, o sea que, en este caso:

$$\frac{t - r_1}{r_2 - t} > \frac{t}{r_2} > \frac{r_1}{t}$$

siendo, a su vez, corolario inmediato de este teorema acabado de citar, y mediato del anterior, el que afirma que *cuando los valores de las fracciones minuendo y sustraendo son iguales entre sí, también lo es, a ellos, el de la fracción resta.*

Pero la fracción [2] no puede continuar siendo utilizada, por comprender en sus términos a $r_1$ y $r_2$, que son, respectivamente, las incógnitas cuyos valores hay que hallar, por lo que la lógica matemática estricta parece aconsejar, por su equivalente, dado que el valor de ésta es perfectamente cognoscible por datos de la Contabilidad, con lo cual se resalta que son:

$$\frac{e}{E} > \frac{t}{r_2} > \frac{r_1}{t}$$

de lo cual se desprende que, al ser

$$\frac{e}{E} > \frac{r_1}{t}$$

resulta

$$r_1 < \frac{e}{E}\, t$$

y que para

$$\frac{e}{E} > \frac{t}{r_2}$$

es

$$r_2 > \frac{E}{e} t$$

Otras muchas orientaciones basadas en el hecho ya visto en lo que antecede, de que son $Et = A + E(t - r_1) = A + k$ y $et = a - e(r_2 - t) = a - k$; en las potencias de segundo o aun superior grado de $t(E + e) = (A + k) + (e - k)$ y de $t(E - e) = (A + k) - (a - k) = (A - a) + 2k = [(A + a) - 2a] + 2k$, etc., se han ensayado, pero ninguna de ellas ha conducido a felices resultados, ni aun con las orientaciones propuestas por los más significados tratadistas de las formas de resolver lo más rigurosamente posible en el orden matemático las ecuaciones indeterminadas de primer grado, sobre todo para el caso que se viene contemplando en el presente trabajo. Sin embargo, se considera interesante prestar atención a un método que ofrece grandes apariencias de ofrecer solución adecuada, aunque luego no resulte ser la conveniente al caso de que se trata.

Pártase, para ello, de las igualdades [3], [4] y [5'], de las que se desprende que son:

$$r_1 = \frac{E + e}{E} t - \frac{e}{E} r_2$$

y

$$r_2 = \frac{E + e}{e} t - \frac{E}{e} r_1$$

igualdades, éstas, con las que se puede hacer:

$$r_1 + r_2 = \left[\frac{E + e}{E} t - \frac{e}{E} r_2\right] + \left[\frac{E + e}{e} t - \frac{E}{e} r_1\right] =$$

$$= \frac{(E + e)^2}{Ee} t - \frac{E^2 r_1 + e^2 r_2}{Ee}$$

Ahora bien; así como se ha visto en [1] y [1'] cuál es el valor cognoscible de $Er_1 + er_2$, no lo es directamente el de $E^2r_1 + e^2r_2$, pero multiplicando a $(Er_1 - er_2)$, aunque, de momento, tampoco sea cognoscible, y menos directamente, por $(E - e)$, se obtiene que es:

$$r_1 + r_2 = \frac{(E + e)^2}{Ee} t - \frac{(Er_1 - er_2)(E - e)}{Ee} - (r_1 + r_2)$$

$$= \frac{(E + e)^2}{2Ee} t - \frac{(Er_1 - er_2)(E - e)}{2Ee}$$

Por análogo adecuado tratamiento, se tiene que es:

$$r_2 - r_1 = \frac{E^2 - e^2}{2Ee} t - \frac{(Er_1 - er_2)(E + e)}{2Ee}$$

Sumando y restando, ahora, $(r_1 + r_2)$ y $(r_2 - r_1)$, se obtienen, respectivamente, sendas expresiones de valor para $r_1$ y $r_2$, que son:

$$r_2 = \frac{E + e}{2e} t - \frac{Er_1 - er_2}{2e}$$

y

$$r_1 = \frac{E + e}{2E} t + \frac{Er_1 - er_2}{2E}$$

Y como ya se ha resaltado que $Er_1 - er_2$ no puede ser calculado inmediata y directamente, es preciso recurrir a sendos artificios apropiados respectivamente a las incógnitas $r_1$ y $r_2$, teniendo, en consecuencia, que son:

$$Er_1 - er_2 = (Er_1 + er_2) - 2er_2$$

y

$$Er_1 - er_2 = 2Er_1 - (Er_1 + er_2)$$

de lo que resultan:

$$r_2 = \frac{E + e}{2e} t - \frac{Er_1 + er_2}{2e} + r_2 \qquad [7]$$

y

$$r_1 = \frac{E + e}{2E} t + \frac{Er_1 + er_2}{2E} - r_1 \qquad [7']$$

La interpretación racional que es consecuente a estos últimos resultados es la de que son:

$$r_1 = \frac{E + e}{2E} t \qquad [8]$$

$$r_2 = \frac{E + e}{2e} t \qquad [8'],$$

por ser, según [1'],

$$Er_1 + er_2 = (E + e)\ t$$

Estas dos expresiones de respectivos valores satisfacen las propiedades generales siguientes que poseen $r_1$ y $r_2$:

$$\left.\begin{aligned} t(E + e) &= Er_1 + er_2 \\ &= E \frac{E + e}{2E} t + e \frac{E + e}{2e} t = \\ &= (E + e)\ t \end{aligned}\right\} \qquad [1']$$

$$\left.\begin{array}{l} r_1 < t < r_2 \\[2mm] \dfrac{E+e}{2E} < 1 \\[2mm] \dfrac{E+e}{2e} > 1 \\[2mm] 2E > E + e > 2e \end{array}\right\} \qquad [1'']$$

$$\left.\begin{array}{l} t - r_1 = t\left(1 - \dfrac{E+e}{2E}\right) = \dfrac{E-e}{2E}\,t \\[2mm] r_2 - t = t\left(\dfrac{E+e}{2e} - 1\right) = \dfrac{E-e}{2e}\,t \\[2mm] \dfrac{t-r_1}{r_2-t} = \dfrac{e}{E} \end{array}\right\} \qquad [2]$$

$$\left.\begin{array}{l} E(t-r_1) - e(r_2-t) = \\[1mm] = E\left(1 - \dfrac{E+e}{2E}\right)t - e\left(\dfrac{E-e}{2e} - 1\right)t = \\[2mm] = \dfrac{1}{2}(E+e)t - \dfrac{1}{2}(E+e)t = 0 \end{array}\right\} \qquad [5]$$

Pero hay una excepción de muy singular importancia, que reside en la relación $Er_1 - er_2$, cuyo verdadero valor no puede ser determinado de manera directa e inmediata, como ya se ha visto en [6]. Sin embargo, admitiendo como buenas las expresiones de valor [8] y [8'], se tiene:

$$\left.\begin{array}{rl} Er_1 - er_2 = & E(t + r_1 - t) - e(t + r_2 - t) = \\ = & [Et - E(t - r_1)] - [et + e(r_2 - t)] = \\ = & (Et - et) - [E(t - r_1) + e(r_2 - t)] = \\ = & (Et - et) - 2E(t - r_1) = \\ = & (Et - et) - 2e(r_2 - t) \end{array}\right\} \qquad [9]$$

por lo que queda expuesto en [5'], [5''] y [5'''].

Aplicando, ahora, a $r_1$ y $r_2$ las respectivas expresiones de valor [8] y [8'], se tiene:

$$\mathrm{Er}_1 - \mathrm{er}_2 = \mathrm{E}\,\frac{\mathrm{E} + \mathrm{e}}{2\mathrm{E}}\,\mathrm{t} - \mathrm{e}\,\frac{\mathrm{E} + \mathrm{e}}{2\mathrm{e}}\,\mathrm{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\mathrm{E} + \mathrm{e})\mathrm{t} - \frac{1}{2}\,(\mathrm{E} + \mathrm{e})\mathrm{t} = 0 \qquad [10]$$

resultado bastante distinto al racional [9].

La diferencia entre las dos expresiones [9] y [10] es la siguiente:

$$\{(\mathrm{Et} - \mathrm{et}) - [\mathrm{E}(\mathrm{t} - \mathrm{r}_1) + \mathrm{e}(\mathrm{r}_2 - \mathrm{t}]\} -$$

$$- \left\{\mathrm{E}\,\frac{\mathrm{E} + \mathrm{e}}{2\mathrm{E}}\,\mathrm{t} - \mathrm{e}\,\frac{\mathrm{E} + \mathrm{e}}{2\mathrm{e}}\,\mathrm{t}\right\} =$$

$$= (\mathrm{Et} - \mathrm{et}) - [\mathrm{E}(\mathrm{t} - \mathrm{r}_1) + \mathrm{e}(\mathrm{r}_2 - \mathrm{t})] =$$

$$= (\mathrm{Et} - \mathrm{et}) - 2\mathrm{E}(\mathrm{t} - \mathrm{r}_1) =$$

$$= (\mathrm{Et} - \mathrm{et}) - 2\mathrm{e}(\mathrm{r}_2 - \mathrm{t}) > 0 \qquad [11]$$

por lo visto en [10].

No obstante, este resultado ofrece su importancia. En efecto, si bien las expresiones de valor [8] y [8'] no pueden ser aceptadas como las verdaderamente interpretativas respectivamente de $r_1$ y $r_2$, comparando el resultado [10] con el de [5'], parece que puede admitirse que sean

$$\mathrm{t} - \mathrm{r}_1 = \frac{\mathrm{E} + \mathrm{e}}{2\mathrm{E}}\,\mathrm{t} \qquad [12]$$

y

$$\mathrm{r}_2 - \mathrm{t} = \frac{\mathrm{E} + \mathrm{e}}{2\mathrm{e}}\,\mathrm{t} \qquad [12']$$

Mas estas dos últimas expresiones, que satisfacen plenamente la igualdad [5], permiten obtener para $r_1$ y $r_2$ las dos respectivas expresiones de valor siguientes:

$$r_1 = t\left(1 - \frac{E + e}{2E}\right) = \frac{E - e}{2E}\, t \qquad [13]$$

$$r_2 = t\left(1 + \frac{E + e}{2e}\right) = \frac{E + 3e}{2e}\, t \qquad [13']$$

que tampoco resuelven el problema a plena satisfacción, pese a que satisfacen a la ecuación [5] como es fácil comprobar.

Por todo lo visto hasta aquí *se hace necesario abandonar la estricta lógica puramente matemática* para acudir al mejor buen sentido posible, fuente, las más de las veces, de los rasgos de ingenio, y *atenerse a la lógica de la técnica adecuada al caso de que se trate,* apoyado, su empleo, eso sí, en el tratamiento matemático más indicado.

Para ello, comiéncese por observar que la ecuación [5'] permite el subterfugio de considerar que $t$, según [1], constituye un promedio aritmético ponderado de $E$ casos que se presentan con un valor $r_1$, y de otros $e$ que se presentan con el valor $r_2$, y que, en consecuencia, la ecuación $E(t - r_1) + e(t - r_2) = 0$ es la suma de todas las desviaciones de las formas $t - r_1$ y $t - r_2 = -(r_2 - t)$, que, por un teorema de la estadística, se sabe que es nulo, como se ha visto además en [5'].

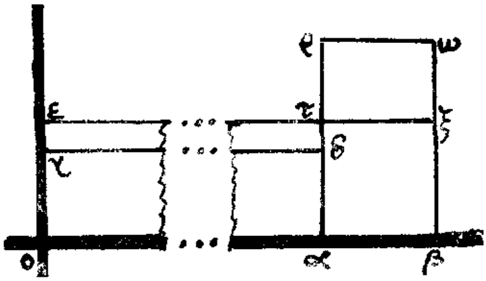
Este planteamiento constituye un aspecto de la *media aritmética,* consistente en que, *si todas las cantidades de que se toma esa media son iguales entre sí, esa media resulta igual al valor común de las cantidades que la proporcionan.* El caso contemplado en este estudio se presenta como particular de la propiedad acabada de recordar, puesto que en lugar de ser iguales todos los valores que proporcionan la media aritmética, son dos grupos de valores respectivamente iguales: $E$ de $r_1$ y $e$ de $r_2$, cada uno en su sector.

Desde luego, conviene no silenciar que no se puede utilizar la propiedad del teorema que dice que *la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los datos observados, con relación a la propia media aritmética de ellos, es cero,* lo que en este caso es:

$$\frac{E(t - r_1)^2 + e(r_2 - t)^2}{E + e} = \frac{Er_1^2 + er_2^2}{Ee} = 0$$

porque se desconocen los valores de $r_1$ y $r_2$. Y, por ello, todo lo basado en esta propiedad es inaplicable.

Es obvio que como indeterminada que es la ecuación básica (1'), las soluciones puramente matemáticas pueden ser infinitas, pero sólo interesa la que responde a la solución técnica que requiere el problema asimismo técnico que viene estudiándose, y para ello puede servir de buen apoyo la interpretación de la representación geométrica de la primera de estas dos últimas propiedades recordadas, para lo cual trácese dicha representación, que es la de la siguiente figura:




en la que el segmento $0\alpha$ representa a $E$; el $\alpha\beta$, a $e$; el $0\beta$, a $E + e$; el $\alpha\delta$, a $r_1$; el $\gamma\delta$, la sucesión de las $r_1$; el $\omega$, a $r_2$; el $\rho\omega$, a la sucesión de las $r_2$; el $\alpha\tau$, a $t$; y el $\varepsilon\xi$, a la sucesión de las $t$. El producto $Er_1$ queda representado por el área $0\alpha\delta\gamma$; el producto $er_2$, por el área $0\beta\omega\rho$, y el $t(E + e)$, por la $0\beta\xi\varepsilon$.

Esto ayuda a razonar para expresar $r_1$ y $r_2$ en función de $t$, $E$ y $e$ en los siguientes términos: Supóngase por un momento que la relación entre $r_1$ y $t$ está basada en la que existe entre $e$ y $E$, así como la existente entre $r_2$ y $t$ sea la inversa de la anterior, y que, como se ha dicho en [1'], sean $r_1 < t < r_2$.

Con base en todas estas premisas y tomando a $t$ como unidad de comparación se puede considerar que la superficie en que hay que disminuir a la del rectángulo $Et(0\alpha\tau\varepsilon)$ para obtener la de $Er_1(0\alpha\delta\gamma)$ es la del rectángulo $(\gamma\delta\tau\varepsilon)$, cuya interpretación puede ser $\frac{e}{E}t^2$, lo cual permite establecer la siguiente proporción:

$$1 : t :: \left(1 - \frac{e}{E}t\right) : r_1$$

de donde

$$r_1 = t\left(1 - \frac{e}{E}t\right) = t - \frac{e}{E}t^2$$

Análogamente, para $r_2$, por ser mayor que $t$, se puede escribir:

$$1 : t :: \left(1 + \frac{E}{e}t\right) : r_2$$

de donde

$$r_2 = t\left(1 + \frac{E}{e}t\right) = t + \frac{E}{e}t^2$$

Sentado esto, hay que controlar la efectividad de las hipótesis contenidas en lo que se acaba de establecer, y para ello, volviendo sobre la ecuación (5'), se tiene:

$$E(t - r_1) - e(r_2 - t) =$$
$$= E\left[t - t\left(1 - \frac{e}{E}t\right)\right] - e\left[t\left(1 + \frac{E}{e}t\right) - t\right] =$$
$$= -(E - e)t^2 \neq 0$$

lo que manifiesta que el sustraendo $e\left[t\left(1 + \frac{E}{e} t\right) - t\right]$ es mayor en $(E - e)t^2$ que el minuendo de la diferencia de que forma parte. Por consiguiente como tiene que producirse que sea $E(t - r_1) - e(r_2 - t) = 0$, bastará disminuir este sustraendo en $(E - e)t^2$, como demuestra la igualdad siguiente, consecuencia de la anterior:

$$E\left[t - t\left(1 - \frac{e}{E} t\right)\right] = e\left[t\left(1 + \frac{E}{e} t\right) - t\right] - (E - e)t^2$$
$$= e[t(t + 1) - t]$$

que deja como verdadera expresión del valor de $r_2$ a $t(t + 1) = t + t^2$. Ambas expresiones, estas últimas, de valores respectivos

$$r_1 = t - \frac{e}{E} t^2$$

y

$$r_2 = t^2 + t$$

son las aplicadas al caso numérico tratado al final de la Sección II del presente trabajo, que tan satisfactorio resultado ha proporcionado.

El mismo resultado se obtiene, más directamente, si aceptada la expresión del valor establecida para $r_1$, tratamos a $r_2$ como incógnita en la ecuación

$$E\left[t - t\left(1 - \frac{e}{E} t\right)\right] - e(r_2 - t) = 0$$

Llegados a lo que acaba de quedar expuesto, sólo falta insistir en el caso de que sean $r_2 < t < r_1$, poco posible, no ya poco probable, recordando lo ya dicho al principio de esta Sección III. De todas formas, procediendo como si fuesen $r_1 < t < r_2$, al aplicar a $E$ y $e$, respectivamente, los valores numéricos que resulten para $r_1$ y $r_2$ sucederá en relación con (1') una de estas dos cosas:

$$Er_1 + er_2 = (E + e)t = S$$

o

$$Er_1 + er_2 \neq (E + e)t = S$$

y si ocurre la segunda, posiblemente quede resuelto el problema tomando

$$Er_2 + er_1$$

pero, sobre todo, bastará hallar las diferencias $r_2 - r_1$ y $r_1 - r_2$ y la que resulte positiva marcará la decisión a adoptar.