Estudio relativo al ajuste de tablas de supervivencia general, y de válidos e inválidos especialmente [1]

Por D. **Antonio Lasheras-Sanz,**
Actuario —Abogado.—Intendente Mercantil.—Catedrático.

Cuando hay necesidad de enlazar, o combinar, mejor dicho, las tablas de supervivencia y mortalidad generales con las de sobrevivencia y mortalidad de válidos e inválidos, se presenta el no pequeño inconveniente de que, hasta hoy, unas y otras son de orígenes diversos, constituyendo un obstáculo para la precisión matemática que requiere la organización técnica actuarial de la entidad que haya de servirse de ellas, siendo evidente que la idealidad consiste en la existencia de una tabla de sobrevivencia general de la que se desprendan las de válidos e inválidos. De ellas, hoy no se puede disponer de otras que de las de la Oficina Imperial de Estadística Alemana, que además de datar del año 1882, ni están basadas sobre un número suficientemente grande de cabezas, ni la relación existente entre ellas está basada en el razonamiento matemático de ajuste armónico y simultáneo que se precisa. El resultado de mis estudios sobre esta finalidad es lo que hoy presento a la consideración de la Asamblea.

Para llegar a los resultados que me proponía, por ser necesarios, me ha sido preciso introducir una ligera modificación en los elementos, no en el método, a la teoría explanada por M. Quiquet en el capítulo II de su tesis *Representation algebrique des tables de survie,* que

(1) Aportación presentada al Congreso Internacional de Ciencias de Coimbra (Portugal) del año 1925, sesión del 17 de junio, y sometido nuevamente a conocimiento específico de los Actuarios españoles con algunas ligeras modificaciones.

trata de la interpolación de las mismas e investigación de la ley que siguen los datos observados, modificación de la que me ocupo en el capítulo I.

En el II, trato el problema planteado por M. Poterin du Motel en su *Theorie des Assurances sur la vie,* demostrando que la serie que debe ajustarse es la de tantos de mortalidad y no la de números de sobrevivientes, y basándome en un razonamiento del Sr. Broggi, expuesto en su *Matematica attuariale,* doy la correspondiente solución en el capítulo III, solución que va armonizada con la teoría de M. Quiquet, ya rectificada en el sentido expuesto.

Una vez solucionado el problema de M. Poterin du Motel en forma tan absolutamente general, paso a dar en el capítulo IV la norma y razonamientos para la descomposición de la tabla general de supervivencia en tablas de válidos e inválidos y, por tanto, para su construcción y ajuste en la correspondencia armónica que deseaba, haciendo resaltar los puntos fundamentales en que se establece la correspondiente relación que debe existir.

Y, finalmente, en el capítulo V estudio la variación de la tabla única de supervivencia de inválidos, obteniendo una ley que nos permite ajustar dicha tabla sin dejar de considerar los nuevos ingresos a cada edad, pero sin ser función explícita de las edades de entrada, no teniendo que considerar otras edades que aquellas correspondientes a los respectivos números totales de sobrevivientes.

I

Ligera y necesaria rectificación de la teoría de M. Quiquet para la interpolación de las tablas

De ordinario, el ajuste de los datos observados se efectúa determinando *a priori* la ley con arreglo a la cual se desea efectuarlo, descuidando en absoluto los dictados de la interesantísima teoría explanada treinta años ha por el sabio Actuario francés M. Quiquet, que supo legar en plena flor de su vida un fruto de su estudio cuya importancia y utilidad no son apreciadas, desgraciadamente, en toda su intensidad.

Por la esencialidad de la misma, es la ley de Makeham la que goza de supremacía, imponiéndola *a priori* para el ajuste de las tablas, por ser la que recoge las dos modalidades generales de acaecer la muerte: el azar y la vejez.

Mas el hecho de la diversidad de criterios emitidos por los varios hombres de la ciencia del Seguro que se han ocupado de este asunto; unos en el sentido de que las diferencias segundas de log l_x son nulas; otros, de que son constantes; de que varían en progresión geométrica; otros, etc., hace que meditando sobre las teorías de M. Quiquet, lleguemos a la conclusión de que el medio de apreciar la influencia que las circunstancias de sexo, clima, profesión, etc., ejercen sobre la mortalidad humana, está en la elección de la ley de mortalidad (como se me comprobó al estudiar la mortalidad femenina como punto de partida para mi tesis sobre *La probabilidad de morir dejando viuda)*, y que, por tal motivo, ésta no debe fijarse *a priori*, sino que debe dárnosla el propio cálculo, pues la obtenida en esta forma será la que más se adapte a la tabla que se desea interpolar.

En el capítulo II de la parte primera de su tesis, dice el citado Actuario: «La función $y = \Sigma\, e^{r_i x}\, \varphi_i(x)$ se ha obtenido por mediación del tanto instantáneo de mortalidad μ_x, es decir, en síntesis, por notaciones diferenciales. Una tabla de sobrevivencia no da semejante tanto, ni incluso el medio de determinarlo; pues no permite calcular rigurosamente tantos de mortalidad sino para períodos finitos, los que marcan los intervalos de las edades que sirven de argumento.»

No obstante, en lugar de partir de $\Delta^2 \log l_x$, como él hace en vista de la afirmación anterior, podemos considerar que siendo

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left\{f(x+1) - f(x-1)\right\}$$

va a sernos posible tomar como expresión inicial, por ser

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\cdot\frac{dl_x}{dx} = \frac{d_{x-1}+d_x}{2l_x} = \frac{l_{x-1}-l_{x+1}}{2l_x},$$

$$\begin{aligned} y = \Sigma\, e^{r_i x}\, \varphi_i(x) &= \mu'_x \\ &= \frac{1}{2}\left(\mu_{x+1} - \mu_{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{l_{x-1}}\cdot\frac{dl_{x-1}}{dx} - \frac{1}{l_{x+1}}\cdot\frac{dl_{x+1}}{dx}\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{\frac{d_x + d_{x+1}}{l_{x+1}} - \frac{d_{x-2}+d_{x-1}}{l_{x-1}}\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{\frac{l_x - l_{x+2}}{l_{x+1}} - \frac{l_{x-2}-l_x}{l_{x-1}}\right\}. \end{aligned}$$

Enlazando ahora los valores y_x, y_{x+1} ... por la relación lineal de coeficientes constantes y provisionalmente arbitrarios

$$B_0\, y_x + B_1\, y_{x+1} + \cdots + B_u\, y_{x+u} = 0\,,$$

cuya integración sigue siendo análoga a la de la ecuación diferencial, lineal y homogénea de orden n, de coeficientes constantes y sin segundo miembro, basada en la ecuación característica

$$B_0 + B_1 q + B_2 q^2 + \cdots + B_u q^u = 0\,.$$

y tomando valores de y para valores sucesivos de x, obtendremos el sistema

$$\begin{cases} B_0 y_x + B_1 y_{x+1} + \cdots + B_u y_{x+u} = 0 \\ B_0 y_{x+1} + B_1 y_{x+2} + \cdots + B_u y_{x+u+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_0 y_{x+u} + B_2 y_{x+u+1} + \cdots + B_u y_{x+2u} = 0 \end{cases}$$

en el que podremos considerar B_0, B_1 ... B_u como incógnitas, dándonos lugar, para obtener valores distintos de *cero,* a un determinante, análogo al de Wronski, pues es condición precisa y suficiente que

$$\begin{vmatrix} y_x & y_{x+1} & \ldots\, y_{x+u} \\ y_{x+1} & y_{x+2} & \ldots\, y_{x+u+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{x+u} & y_{x+u+1} & \ldots\, y_{x+2u} \end{vmatrix} = 0.$$

Nos encontramos ya en el mismo punto de partida que toma M. Quiquet para el estudio de cada uno de los casos particulares que considera y, por tanto, para obtener los resultados que él obtiene, se seguirán sus mismos razonamientos, pero sustituyendo las «sumaciones» por las «integraciones», puesto que hemos pasado de cantidades representadas por diferencias finitas a expresiones diferenciales.

Se ve, pues, que sin inconveniente alguno podemos tomar como punto inicial la expresión

$$y_x = \mu'_x = \Sigma e^{r_i x}\, \varphi_i\,(x),$$

para lo que sólo hay que proceder de antemano al cálculo de los valores μ'_x, que ya hemos expuesto, en función de d_x o l_x que son los directamente observados, y no como preconiza M. Quiquet, abandonar esta expresión, que es la que en el capítulo primero de su tesis le sirve para obtener las diferentes leyes de los diversos órdenes para sustituirla por su análoga

$$z_x = \Delta^2 \log l_x = \Sigma e^{r_i x} \varphi_i (x)$$

en función de las diferencias finitas.

La importancia de esta modificación no está en ella misma, sino en la posterior aplicación que más adelante se desarrolla.

II

Problema planteado por M. Poterin du Motel.

Salvada la dificultad que presentaba la teoría de M. Quiquet, de la que nos hemos ocupado en el capítulo anterior, nos encontramos con el inconveniente, para el desarrollo de que son objeto los capítulos siguientes, del problema planteado por M. Poterin du Motel sobre el elemento que, entre los números de sobrevivientes o los tantos de mortalidad, es preferible realizar la graduación o ajuste, y que como he de permitirme una, siquiera sea insignificante, modificación, sustituyendo, dada la índole de la demostración, las diferencias finitas por elementos diferenciales, se repite a continuación:

Parece natural—dice—actuar directamente sobre el elemento observado sobre el tanto de mortalidad proporcionado por la estadística, pues a primera vista se aprecia también el valor relativo, con respecto a este elemento, de la corrección que se hace experimentar. No obstante en ocasiones se ha operado en forma distinta, llevando el ajuste sobre el número de sobrevivientes, pareciendo útil hacer resaltar el inconveniente de este método.

Supongamos que mediante los tantos de mortalidad observados, y sin imprimirles ninguna corrección, se ha calculado una tabla de sobrevivencia. Sean l_x y l_{x+1} los números de sobrevivientes así obtenidos para dos edades consecutivas. Para ajustarlas vamos a efectuar en estas cantidades correcciones que por su valor con respecto a l_x, sobre todo en las edades medias de la tabla de sobrevivencia, podremos representar por δl_x y δl_{x+1}, designando δ la diferenciación para distinguirla del número de fallecidos *d*. El tanto de mortalidad observado no diferirá en nada del proporcionado por la tabla bruta de sobrevivencia, puesto que por su mediación se ha calculado, siendo

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \quad y \quad d_x = l_x - l_{x+1} .$$

El tanto resultante de la tabla ajustada será, para $\delta d_x = \delta l_x - \delta l_{x+1}$:

$$q'_x = \frac{d_x + \delta d_x}{l_x + \delta l_x} = q_x + \delta q_x ,$$

y entonces

$$\delta q_x = \delta \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x \,.\, \delta d_x - d_x \,.\, \delta l_x}{l^2_x} .$$

Como d_x, en relación a l_x, es muy pequeño, podemos despreciar el producto $d_x \,.\, \delta l_x$, puesto que el tanto de mortalidad es siempre un número pequeño, y por ello el crecimiento que se imprime a este tanto es sencillamente

$$\delta q_x = \delta \frac{d_x}{l_x} = \frac{\delta l_x - \delta l_{x+1}}{l_x} ,$$

cantidad que viene a ser del mismo orden que el elemento observado q_x, pudiendo llegar incluso a sobrepasar su valor.

«Vemos, pues, que ajustado el número de sobrevivientes—sigue diciendo el autor—, no se da uno suficientemente cuenta de lo que se hace, exponiéndose a una desviación falsa sobre algunos tantos brutos que pueden tener una gran probabilidad si resultan de observaciones numerosas, y que si se opera de esta forma, será preciso comprobar los resultados obtenidos por la comparación de los tantos de mortalidad deducidos de la tabla de sobrevivencia ajustada con los directamente proporcionados por la observación; mas entonces, ¿no es más simple comenzar por efectuar la compensación sobre estos últimos y calcular seguidamente los números de vivos de la «tabla de sobrevivencia» ajustada mediante la tabla directamente ajustada de tantos de mortalidad?»

III

Resolución del problema de M. Poterin du Motel mediante la adaptación de la teoría rectificada de M. Quiquet.

La interrogante con que terminamos el capítulo precedente puede ser satisfactoriamente contestada, en forma tal, que además nos permita valernos de la teoría de M. Quiquet para obtener por medio del cálculo mismo la ley de sobrevivencia que más se adapte a la tabla que se desea ajustar. Pero antes de pasar a desarrollar la correspondiente demostración de esto, permítasenos tratar, ligeramente siquiera, una cuestión previa.

Las dos fuentes de origen que pueden tener las tablas de sobrevivencia son los ficheros de las Compañías de Seguros y los Censos de población. Por los primeros obtenemos directamente los valores d_x y l_x, los segundos, son los d_x y $l_{x+\frac{1}{2}}$ los que nos proporcionan. Unos y otros quedan ligados por las relaciones

$$l_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(l_x + l_{x+\frac{1}{2}}\right),$$

$$m_x = \frac{d_x}{l_{x+\frac{1}{2}}}, \qquad q_x = \frac{2\,m_x}{2+m_x} \quad \text{y} \quad p_x = \frac{2-m_x}{2+m_x}.$$

Una vez conocida la serie de tantos brutos q_x, en virtud de la relación

$$1 - q_x = p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

ha sido costumbre aplicar una ley de ajuste elegida *a priori*, pudiendo citar, comó ejemplo netamente español, el caso de la tabla ajustada analíticamente por los Sres. D. Mateo y D. José Puyol Lalaguna, presentada por D. Manuel Perales a la Conferencia de Seguros sociales celebrada en Madrid en octubre de 1917.

Estos señores, siguiendo las normas trazadas por otros Actuarios extranjeros, comenzaron por elegir *a priori*, como ley de sobrevivencia, la de Makeham, y luego establecieron la relación

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{ks^{x+1}\, gc^{x+1}}{ks^x\, gc^x} = s\, g\, c^x\, (c^t - 1),$$

de donde

$$\log p_x = \log s + c^x\, (c^t - 1) \log g;$$

aplicando para la determinación de las constantes el método de King y Hardy.

Aquí lo prudente habría sido que una vez hallados los valores de $p_x = 1 - q_x$ se hubieran tomado sus logaritmos y después las diferencias primeras de estos logaritmos, y como

$$\Delta \log p_x = \Delta (\log l_{x+1} - \log l_x) = \Delta^2 \log l_x,$$

haber aplicado a este resultado la teoría de M. Quiquet en la forma directamente por él dada, basada en la expresión ya expuesta anteriormente:

$$z_x = \Delta^2 \log l_x = \Sigma e^{r_i x}\, \psi_i (x),$$

con lo cual habríamos obtenido la ley que la serie observada misma nos hubiere aconsejado.

Pero una vez rectificada la repetida teoría de M. Quiquet en el sentido indicado en el primer capítulo, será preferible hacer uso de ella en esta forma, porque además la solución que así obtengamos para el problema de M. Poterin du Motel tiene carácter completamente general, como veremos más adelante.

Para tal fin partiremos de la relación

$$\mu_x \cdot \delta x = - \delta \log l_x,$$

de donde

$$\log l_x = - \int \mu_x \cdot \delta x,$$

teniendo, por otra parte, que

$$\log l_{x+1} - \log l_x = \Big[\log l_x \Big]_x^{x+1} = - \int_x^{x+1} \mu_x \cdot \delta x = \log p_x,$$

y, por tanto,

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x \cdot \delta x} = e^{-\mu_{x+\frac{1}{2}}}.$$

Resultará, pues, que tendremos

$$q_x = 1 - p_x = 1 - e^{-\mu_{x+\frac{1}{2}}}$$

$$= \mu_{x+\frac{1}{2}} - \frac{\mu^2_{x+\frac{1}{2}}}{1 \, . \, 2} + \frac{\mu^3_{x+\frac{1}{2}}}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} - \dots$$

$$\equiv \mu_{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \mu^2_{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \mu^3_{x+\frac{1}{2}} - \dots,$$

con lo cual se comete un error $< \frac{1}{12} \mu^3_{x+\frac{1}{2}}$, que es perfectamente despreciable, y así el segundo miembro, mediante error tan insignificante, se convierte en la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente, cuya razón es $-\frac{1}{2} \mu_{x+\frac{1}{2}}$ que tiene por suma

$$\frac{2 \mu_{x+\frac{1}{2}}}{2 + \mu_{x+\frac{1}{2}}} = q_x,$$

lo que nos pone en evidente manifiesto que, sin error sensible, puede tomarse

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = \frac{d\,x}{l_{x+\frac{1}{2}}} = m_x,$$

ya que también $q_x = \frac{2\,m_x}{2 + m_x}$, como sabemos.

Volviendo ahora a la teoría de M. Quiquet, como la expresión

$$y_x = \Sigma e^{r_i x} \varphi_i (x) = \mu'_x$$

tiene que subsistir, y subsiste, para cualquier valor de x, podremos escribir

$$y_{x+\frac{1}{2}} = \Sigma e^{r_i \left(x+\frac{1}{2}\right)} \varphi_i \left(x + \frac{1}{2} \right) = \mu'_{x+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\mu_{x+1+\frac{1}{2}} - \mu_{x+1+\frac{1}{2}} \right),$$

lo que nos permitirá establecer la relación

$$B_0 \, y_{x+\frac{1}{2}} + B_1 \, y_{x+1+\frac{1}{2}} + \dots + B_n \, y_{x+n+\frac{1}{2}} = 0$$

y seguir ya la norma trazada con la rectificación efectuada en el primer capítulo, con lo cual obtendremos la forma explícita que deba corresponder a $\mu_{x+\frac{1}{2}}$.

Esta expresión podrá ser cualquiera de las por M. Quiquet estudiadas, y suponiendo que, como resultado del ensayo, hayamos obtenido la ley de Makeham, tendremos

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = A + Bc^{x+\frac{1}{2}},$$

con lo que no se comete ningún error, puesto que también aquí esta relación, para ser cierta, tiene que subsistir para todos los valores de x, dado el razonamiento analítico en que se fundamenta.

Efectuado el ajuste de la serie de valores $\mu_{x+\frac{1}{2}}$, o también obtenidos los valores de A, B y C, y sabiendo que

$$A = -\log s \qquad y \qquad \frac{B}{\log c} = -\log g,$$

podremos calcular

$$\log p_x = \log s + c^x (c - 1) \log g.$$

Hemos hallado, pues, los constantes del ajuste por medio de los tantos de mortalidad, como se deseaba.

IV

Descomposición de la tabla general de sobrevivencia, en tablas de válidos e inválidos: construcción y ajuste en correspondencia armónica.

Donde más se pone de manifiesto la ventaja del segundo razonamiento expuesto en el capítulo anterior es en el caso de que se desee construir y ajustar una tabla de sobrevivencia general, en correspondencia armónica con sus integrantes de sobrevivencia de válidos e inválidos.

A este efecto, los datos que nos suministre una observación apropiada serán los números de sobrevivientes en general, que se descompondrán en sobrevivientes en estado de validez e invalidez

$$l_{x+n} = l^{\overline{aa}}_{x+n} + l^{\overline{ii}}_{x+n}$$

y seguir ya la norma trazada con la rectificación efectuada en el primer capítulo, con lo cual obtendremos la forma explícita que deba corresponder a $\mu_{x+\frac{1}{2}}$.

Esta expresión podrá ser cualquiera de las por M. Quiquet estudiadas, y suponiendo que, como resultado del ensayo, hayamos obtenido la ley de Makeham, tendremos

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = A + B c^{x+\frac{1}{2}},$$

con lo que no se comete ningún error, puesto que también aquí esta relación, para ser cierta, tiene que subsistir para todos los valores de x, dado el razonamiento analítico en que se fundamenta.

Efectuado el ajuste de la serie de valores $\mu_{x+\frac{1}{2}}$, o también obtenidos los valores de A, B y C, y sabiendo que

$$A = -\log s \qquad y \qquad \frac{B}{\log c} = -\log g,$$

podremos calcular

$$\log p_x = \log s + c^x (c-1) \log g.$$

Hemos hallado, pues, los constantes del ajuste por medio de los tantos de mortalidad, como se deseaba.

IV

Descomposición de la tabla general de sobrevivencia, en tablas de válidos e inválidos: construcción y ajuste en correspondencia armónica.

Donde más se pone de manifiesto la ventaja del segundo razonamiento expuesto en el capítulo anterior es en el caso de que se desee construir y ajustar una tabla de sobrevivencia general, en correspondencia armónica con sus integrantes de sobrevivencia de válidos e inválidos.

A este efecto, los datos que nos suministre una observación apropiada serán los números de sobrevivientes en general, que se descompondrán en sobrevivientes en estado de validez e invalidez

$$l_{x+n} = l^{\overline{aa}}_{x+n} + l^{\overline{ii}}_{x+n}$$

a cada edad; el número de fallecimientos habidos en general y de los en estado de validez e invalidez en particular, y el número de los que anualmente quedan inválidos a cada edad.

Construída y ajustada la tabla general de sobrevivencia en la forma que ya conocemos, y suponiendo, á modo de ejemplo, para poder concretar en nuestro caso que sigue la ley de Makeham, para el estudio particular de las respectivas leyes de válidos e inválidos, tendremos análogamente

$$l^{\overline{aa}}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(l^{\overline{aa}}_{x} + l^{\overline{aa}}_{x+1}\right) = l^{\overline{aa}}_{x} - \frac{1}{2}\left(d^{\overline{aa}}_{x} + I_{x}\right),$$

siendo I el número de inválidos, y

$$m^{\overline{aa}}_{x} = \frac{d^{\overline{aa}}_{x}}{l^{\overline{aa}}_{x+\frac{1}{2}}}$$

de donde

$$p^{\overline{aa}}_{x} = \frac{l^{\overline{aa}}_{x+1}}{l^{\overline{aa}}_{x}} = \frac{l^{\overline{aa}}_{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(d^{\overline{aa}}_{x} + I_{x}\right)}{l^{\overline{aa}}_{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(d^{\overline{aa}}_{x} + I_{x}\right)} = \frac{2 - m^{\overline{aa}}_{x} - \dfrac{I_{x}}{l^{\overline{aa}}_{x+\frac{1}{2}}}}{2 + m^{\overline{aa}}_{x} + \dfrac{I_{x}}{l^{\overline{aa}}_{x+\frac{1}{2}}}}$$

y como

$$p^{\overline{aa}}_{x} + q^{\overline{aa}}_{x} + \varepsilon_{x} = 1,$$

siendo ε_x el tanto anual de invalidación, se tiene

$$q^{\overline{aa}}_{x} = \frac{2m^{\overline{aa}}_{x} + 2\dfrac{I_{x}}{l^{\overline{aa}}_{x+\frac{1}{2}}}}{2 + m^{\overline{aa}}_{x} + \dfrac{I_{x}}{l^{\overline{aa}}_{x+\frac{1}{2}}}} - \frac{I_{x}}{l^{\overline{aa}}_{x}}$$

La analogía que debe existir entre la relación que liga los valores q_x y m_x de la tabla general y las $q^{\overline{aa}}_{x}$ y $m^{\overline{aa}}_{x}$ de la de válidos, comprobada para las tablas de las 17 *Compañías inglesas y de Zimmermann*, que dan

$$q_{35} = 0{,}00862, \quad m_{35} = 0{,}00865$$

$$q_{35}^{\overline{aa}} = 0{,}00766, \quad m_{35}^{\overline{aa}} = 0{,}00769$$

y

$$q_{50} = 0{,}01572, \quad m_{50} = 0{,}01584$$

$$q_{50}^{\overline{aa}} = 0{,}01524, \quad m_{50}^{\overline{aa}} = 0{,}01536,$$

nos permite establecer, sin error apreciable,

$$q_x^{\overline{aa}} = \frac{2m_x^{\overline{aa}}}{2 - m_x^{\overline{aa}}},$$

y, por tanto, también aquí tendremos

$$m_x^{\overline{aa}} = \frac{2\, q_x^{\overline{aa}}}{2 - q_x^{\overline{aa}}} = \mu_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{aa}},$$

lo que nos permite aplicar ya el método de Quiquet para la determinación de la ley que sigue la mortalidad de válidos, pero en la forma rectificada, pues aquí no puede partirse de $\Delta^2 \log l_x^{\overline{aa}}$, porque no sólo puede dejarse de pertenecer al grupo de válidos por muerte, sino también por invalidación.

Hay necesariamente que partir de la función

$$y_{x+\frac{1}{2}} = \Sigma\, e^{r_i\left(x+\frac{1}{2}\right)} \varphi_i\left(x + \frac{1}{2}\right) = \left(\mu_{2}^{\overline{aa}} + \frac{1}{2}\right)'.$$

Por otra parte, tenemos también la suma

$$p_x^a + q_x^a = 1$$

de las probabilidades anuales de vivir, válido o inválido, y morir, en igual forma, y el tanto instantáneo de eliminación del grupo de válidos—por muerte o invalidación—que será, como sabemos:

$$\mu_x^a = -\frac{1}{l_x^{\overline{aa}}} \cdot \frac{\delta\, l_x^{\overline{aa}}}{\delta x} = \frac{l_{x-1}^{\overline{aa}} - l_{x+1}^{\overline{aa}}}{2\, l_x^{\overline{aa}}},$$

de donde

$$\log p_x^{\overline{aa}} = \log l_{x+1}^{\overline{aa}} - \log l_x^{\overline{aa}} = -\int_x^{x+1} \mu_x^a \cdot \delta x = -\mu_{x+\frac{1}{2}}^a$$

y también aquí, como hemos visto para $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ y $\mu_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{aa}}$,

$$\mu_{x+\frac{1}{2}}^a = \frac{2\left(q_x^{\overline{aa}} + \varepsilon_x\right)}{2 - \left(q_x^{\overline{aa}} + \varepsilon_x\right)} = \mu_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{aa}} + \nu_{x+\frac{1}{2}},$$

siendo $\nu_{x+\frac{1}{2}}$ el tanto instantáneo, intensidad o fuerza de invalidación. Así conocidos

$$\mu_{x+\frac{1}{2}}^a \quad \text{y} \quad \mu_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{aa}}$$

se tendrá

$$\nu_{x+\frac{1}{2}} = \mu_{x+\frac{1}{2}}^a - \mu_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{aa}}.$$

Obtenido el valor $\mu_{x+\frac{1}{2}}^a$, ya estamos en condiciones de aplicar la teoría de M. Quiquet, nuevamente partiendo de la expresión

$$y_{x+\frac{1}{2}} = \Sigma e^{r_i\left(x+\frac{1}{2}\right)} \varphi_i\left(x+\frac{1}{2}\right) = \left(\mu_{x+\frac{1}{2}}^a\right)'.$$

Supongamos que de los ensayos realizados, y a fin de poder tomar como ejemplo el criterio de Weber, hemos obtenido como consecuencia que la mortalidad de válidos sigue la ley de Makeham,

$$\mu_x^{\overline{aa}} = a + bc^x,$$

y la de eliminación, la

$$\mu_x^a = \alpha + \beta c^x + \nu r^x,$$

correspondiente a la ley de Lázarus.

Resulta, pues, que

$$\nu_x = \mu_x^a - \mu_x^{\overline{aa}} = (\alpha - a) + (\beta - b)\, c_1^a + \gamma r^x,$$

la invalidación sigue la ley de Heym-Weber semejante a la de Makeham.

Determinados los valores de las constantes, y valiéndonos de las series originales $\mu^{\overline{aa}}_{x+\frac{1}{2}}$ y $\mu^{a}_{x+\frac{1}{2}}$, tendremos

$$\log l^{\overline{aa}}_x = -\int (\alpha + \beta c^x + \gamma r^x) \,.\, \delta x$$

$$= \log R - \alpha x - \frac{\beta}{\log c} c^x - \frac{\gamma}{\log r} r^x$$

de donde

$$l^{\overline{aa}}_x = R\, m^x\, n^{c^x}\, u^{r^x}$$

siendo

$$-\alpha = \log m, \quad -\frac{\beta}{\log c} = \log n \quad \text{y} \quad -\frac{\gamma}{\log r} = \log u$$

Sólo nos falta ahora concretar el punto de hermanación de la tabla general de sobrevivencia con la de en estado de validez, para lo cual, a modo de ejemplo de cómo debe establecerse, partiremos de las hipótesis de que la tabla general sigue la ley de Makeham, y la de válidos la de Lázarus; de forma que tendremos

$$\mu_x = A + B c^x$$

$$\mu^a_x = \alpha + \beta c'^x + \gamma r^x \,.$$

Y ahora, si para la tabla general la exposición a la muerte, en cuanto a la vejez respecta, crece progresivamente por debilitación gradual de nuestros órganos, también en el estado de validez sucederá lo mismo, porque aun en tal estado, por ley de vida, existe la debilitación gradual de nuestros órganos, sin que se requiera llegar al estado de invalidez propiamente dicha, con lo que la intensidad de mortalidad referente a la vejez, como para la tabla general, crecerá proporcionalmente al tiempo y a su propio valor, a cada intervalo infinitamente pequeño de tiempo, y tendremos:

$$\delta M^{\overline{aa}}_x = \log c' \,.\, M^{\overline{aa}}_x \,.\, \delta x.$$

Comparando esta expresión con su análoga para la tabla general

$$\delta M_x = \log c \,.\, M_x \,.\, \delta x\,,$$

sucede que

$$\delta M^{\overline{aa}}_x = \delta M_x$$

por ser dos infinitamente pequeños de primer orden, y al ser los dos primeros miembros de las dos anteriores igualdades también iguales, asimismo tendrán que serlo los segundos. Ahora bien: para que al considerar aisladamente las cantidades finitas

$$\log c' \cdot M_x^{\overline{aa}} \quad y \quad \log c \cdot M_x ,$$

éstas fueran iguales, tendrían que ser los factores logarítmicos desiguales, porque M_x y $M_x^{\overline{aa}}$ son distintos, ya que la intensidad de mortalidad nunca puede ser igual para la tabla general que para la de válidos y, por tal motivo, aun cuando se consideren iguales los coeficientes de proporcionalidad respectivos, los productos de que forman parte siempre estarán en relación a los factores M_x y $M_x^{\overline{aa}}$, siendo, por tanto, posible sin error apreciable establecer

$$\log c' = \log c.$$

Con esto conseguimos que una vez hallado para la tabla general de sobrevivencia el valor de c, de la ecuación

$$\mu_x = A + Bc^x ,$$

pueda aplicarse al de c' en la expresión de μ_x^a, con lo cual será

$$\mu_x^a = \alpha + \beta c^x + \gamma r^x,$$

quedando sólo por calcular las constantes α, β, γ y r.

Una comprobación será si a los valores $l_x^{\overline{aa}}$ aplicamos el método llamado de King y Hardy a modo de verificación de constantes, con lo que llegaremos a tener

$$\Delta^2 \sum_{x}^{x+t-1} \log l_x^{\overline{aa}} = \frac{c^x (c^t - 1)^2}{c - 1} \log n + \frac{r^x (r^t - 1)^2}{r - 1} \log u$$

$$\Delta^2 \sum_{x+t}^{x+2t-1} \log l_x^{\overline{aa}} = \frac{c^{x+t} (c^t - 1)^2}{c - 1} \log n + \frac{r^{x+t} (r^t - 1)^2}{r - 1} \log u$$

$$\Delta^2 \sum_{x+2t}^{x+3t-1} \log l_x^{\overline{aa}} = \frac{c^{x+2t} (c^t - 1)^2}{c - 1} \log n + \frac{r^{x+2t} (r^t - 1)^2}{r - 1} \log u,$$

sistema que depende de las cantidades c, n, r y u; mas como Lázarus, al dar directamente su ley, decía que «considerando, por ejemplo, la mortalidad como debida a tres causas, en la que la primera actúe conforme la ley de Gampertz, corregida por la segunda en la forma indicada por Makeham, y la tercera de la misma forma que la primera, pero de distinto valor y dirección» (aun cuando esta tercera, al ser, en nuestro caso, ley de eliminación y no de mortalidad, pueda no variar en ese valor y dirección), no habrá error al suponer la parte de la ley de Lázarus semejante a la de Gampertz coincidentes, cuando menos en el coeficiente de proporcionalidad log c. Con esta razón, sustituyendo en el anterior sistema el valor de c por el hallado para la tabla general de sobrevivencia, nos quedará un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que por sustitución resolveremos a satisfacción, de modo que tendremos

$$\Delta^2 \sum_{x}^{x+t-1} \log l_x^{\overline{aa}} = a + \frac{r^x (r^t - 1)^3}{r - 1} \log u$$

$$\Delta^2 \sum_{x+t}^{x+2t-1} \log l_x^{\overline{aa}} = c^t a + \frac{r^{x+t} (r^t - 1)^3}{r - 1} \log u$$

$$\Delta^2 \sum_{x+2t}^{x+3t-1} \log l_x^{\overline{aa}} = c^{2t} a + \frac{r^{x+2t} (r^t - 1)^3}{r - 1} \log u$$

que nos conduce a la ecuación

$$\left\{ \Delta^2 \sum_{x+t}^{x+2t-1} \log l_x^{\overline{aa}} - c^t \Delta^2 \sum_{x}^{x+t-1} \log l_x^{\overline{aa}} \right\} r^{2t}$$

$$- \left\{ \Delta^2 \sum_{x+2t}^{x+3t-1} \log l_x^{\overline{aa}} - c^{2t} \Delta^2 \sum_{x}^{x+t-1} \log l_x^{\overline{aa}} \right\} r^t$$

$$- \left\{ \left(\Delta^2 \sum_{x+2t}^{x+3t-1} \log l_x^{\overline{aa}} - c^{2t} \Delta^2 \sum_{x}^{x+t-1} \log l_x^{\overline{aa}} \right) c^t + \right.$$

$$\left. + \left(\Delta^2 \sum_{x+t}^{x+2t-1} \log l_x^{\overline{aa}} - c^t \Delta^2 \sum_{x}^{x+t-1} \log l_x^{\overline{aa}} \right) c^{2t} \right\} = 0$$

de 2.º grado en r^t, y cuya resolución nos satisfará el problema.

Lo que acabamos de efectuar nos permite determinar y demostrar la certeza del establecimiento matemático del punto de relación que debe existir para conseguir esa necesaria correspondencia armónica que hay que mantener, en bien de la exactitud de las bases actuariales, entre la tabla general de sobrevivencia y la de sobrevivencia de válidos y, por ende, de la de inválidos, pues si la población, o, mejor dicho, el número de sobrevivientes de cada edad está compuesta de válidos e inválidos, tendremos que

$$l_x = l_x^{\overline{aa}} + l_x^{\overline{ii}}$$

$$l_{x+1} = l_{x+1}^{\overline{aa}} + l_{x+1}^{\overline{ii}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_{x+t} = l_{x+t}^{\overline{aa}} + l_{x+t}^{\overline{ii}},$$

pudiendo suceder que a la edad inicial sea

$$l_x = l_x^{\overline{aa}} \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad l_x^{\overline{ii}} = 0.$$

En cuanto a la constante R, de la que nada hemos dicho directamente, transcribiremos frases de Mr. King, referidas a nuestro caso particular:

«Si en la expresión

$$l_x^{\overline{aa}} = R\, m^x\ n^{c^x}\ u^{r^x},$$

hacemos $x = 0$, tendremos

$$l_0^{\overline{aa}} = R\,.\,n\,.\,u,$$

de donde se deduce que $R\,.\,n\,.\,u$ es el radio de amplitud de la tabla de eliminación. En la expresión de $l_x^{\overline{aa}}$ las constantes n y u figuran con un exponente función de x, pero la constante R figura simplemente como coeficiente. De aquí se deduce que la constante R no tiene más importancia que fijar la amplitud de la tabla. Si deseamos los valores de $l_x^{\overline{aa}}$ aproximados a los de una tabla determinada, tendremos que obtener el valor de R con relación a ella; pero como en la práctica únicamente tienen importancia los valores relativos de $l_x^{\overline{aa}}$ podemos dar a R el valor que nos plazca.»

Esto nos da base necesaria para que el valor de R de la ley de Makeham y el R de la de Lázarus, referentes a tablas que hayan de guardar la correspondencia armónica de que hemos tratado, sean

$$(k = R) = K$$

y por tal motivo, tengamos a la edad inicial, para la que $l_x^{\overline{u}} = 0$,

$$l_x = l_x^{\overline{aa}} = Ks^x \; g^{c^x} = Km^x \, n^{c^x} \, u^{r^x}$$

que es el punto final que afirma y cierra herméticamente esa correspondencia que se precisa.

También se puede establecer la igualdad o equivalencia

$$\log c' = \log c$$

calculando el valor de log c por el siguiente método, debido a G. F. Hardy para la ley de Lázarus.

En él haremos:

$$A = \Delta^2 \sum_{x}^{x+t-1} \log l_x^{aa} = c^x \frac{(c^t - 1)^3}{c - 1} \log n + r^x \frac{(r^t - 1)^3}{r - 1} \log u$$

$$= M + N$$

$$B = \Delta^2 \sum_{x+t}^{x+2t-1} \log l_x^{aa} = c^{x+t} \frac{(c^t - 1)^3}{c - 1} \log n + r^{x+t} \frac{(r^t - 1)^3}{r - 1} \log u$$

$$= M\varphi + N\psi$$

$$C = \Delta^2 \sum_{x+2t}^{x+3t-1} \log l_x = c^{x+2t} \frac{(c^t - 1)^3}{c - 1} \log n + r^{x+2t} \frac{(r^t - 1)^3}{r - 1} \log u$$

$$= M\varphi^2 + N\psi^2$$

$$D = M\varphi^3 + N\psi^3$$

De aquí resulta que

$$\frac{AD - BC}{AC - B^2} = \varphi + \psi = S \quad y \quad \frac{BD - C^2}{AC - B^2} = \varphi \, . \, \psi = P$$

por lo que

$$\left.\begin{matrix}\varphi \\ \psi\end{matrix}\right\} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

$$M = \frac{B - \psi A}{\varphi - \psi} \quad y \quad N = \frac{A\varphi - B}{\varphi - \psi}$$

Pueden resultar para φ y ψ valores imaginarios, pero, entonces, basta transformar su expresión en función de las líneas trigonométricas según el método expuesto para ello por Mr. Buchanan.

V

Ley de variación de las tablas generales de inválidos.

Una forma de poder calcular los números

$$\overline{\overline{l}}^{\ddot{u}}_{x}, \quad \overline{\overline{l}}^{\ddot{u}}_{x+1}, \ldots, \overline{\overline{l}}^{\ddot{u}}_{x+t}$$

de sobrevivientes en estado de invalidez, procedentes de los sobrevivientes válidos a una edad inicial, consistente en hallar la diferencia entre los elementos de dos series perfecta y armónicamente ajustadas

$$\overline{\overline{l}}^{\ddot{u}}_{x+t} = l_{x+t} - \overline{\overline{l}}^{aa}_{x+t},$$

por lo que la serie resultante, que estará ajustada indirectamente, será función de la ley general de sobrevivencia, de la de en estado de validez y de la de invalidación. Necesariamente tiene que existir una ley particular que nos confirme el ajuste indirecto, no obstante ser ésta una serie sometida a otras causas de variación que la mortalidad, como es el constante ingreso a cada edad de nuevos números de inválidos procedentes de la serie de sobrevivientes válidos.

Al efecto de obtener la ley de variación correspondiente de la relación

$$l_x = \overline{\overline{l}}^{aa}_{x} + \overline{\overline{l}}^{\ddot{u}}_{x}$$

se nos desprende

$$\overline{\overline{l}}^{\ddot{u}}_{x} = l_x - \overline{\overline{l}}^{aa}_{x} = K s^x g^{c^x} - K m^x n^{c^x} u^{r^x},$$

donde va a prestarnos un gran servicio el método de Gauss para la obtención de los logaritmos de sumas o diferencias.

Si

$$\log(a - b) = \log b + \log\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \log b + [\rho^{-1}](\log a - \log b),$$

tendremos

$$\log l_x^{\bar{u}} = \log K + x \log m + c^x \log n + r^x \log u$$
$$+ [\rho^{-1}] (\log K + x \log s + c^x \log g - \log K - x$$
$$\log m - c^x \log n - r^x \log u)$$
$$= \log K + x \log m + c^x \log n + r^x \log u + [\rho^{-1}]$$
$$\left(x \log \frac{s}{m} + c^x \log \frac{S}{n} + r^x \log u \right),$$

de donde

$$l_x^{\bar{u}} = (K m^x n^{c^x} u^{r^x}) \left\{ \left(\frac{s}{m}\right)^x \left(\frac{g}{n}\right)^{c^x} u^{r^x} \right\}^{[\rho-1]}$$
$$= K \sigma^x \theta^{c^x} \lambda^{r^x},$$

como se quería demostrar. De nuevo tenemos la ley de Lázarus.

También en esta ley se aprecia la dependencia interna con la de la tabla general de sobrevivencia en el valor de c y en el de k.