Análisis crítico de la tasa interna de rentabilidad: su cálculo, limitaciones y distorsiones

Por
Profesor ALFONSO RODRIGUEZ RODRIGUEZ

Catedrático de la Universidad de Barcelona

Introducción

Primera cuestión a precisar es el significado que pretende asumir el parámetro de la inversión denominado *Tasa Interna de Rentabilidad (T.I.R.)* y si ello es correcto y posible.

Comencemos formalizando la *operación de inversión* como un esquema *input-output* que recoge dos corrientes de capitales financieros contrapuestas (*), expresadas por dos conjuntos financieros, *input* y *output* de la inversión, respectivamente,

$$\begin{array}{ll} I; & \{(C_r,\ T_r)\}; \quad r=1,\ 2,\ ...,\ n \\ O; & \{(C'_s,\ T'_s)\}; \quad s=1,\ 2,\ ...,\ m \end{array}$$

donde cualquier capital financiero (C, T) es definido por dos parámetros, su *cuantía monetaria* C y su *diferimiento* T, componentes ambas reales y no negativas.

La T.I.R., según es conocido, investiga la *equivalencia financiera* entre ambos conjuntos,

$$\{(C_r,\ T_r)\} \sim \{(C'_s,\ T'_s)\}$$

(*) Conviene precisar que dichas corrientes financieras pueden comprender también «flujos financieros», es decir, accesos continuos de disponibilidad monetaria, conjuntamente con capitales financieros.

según una ley financiera *estacionaria*, es decir, de factor financiero, $e^{\rho t}$. Entonces, es ρ la *tasa interna de rentabilidad* instantánea. Si se quiere expresar como tasa anual, en un régimen financiero de capitalización anual a tanto constante, basta recordar la relación,

$$\rho = \ln(1+i)$$

La T. I. R., por tanto, supone el análisis de la operación de inversión como si se tratase de una *operación financiera*, e investiga la ley financiera estacionaria implícita en ella.

Si es *elemental* la operación, en el sentido de que sus prestaciones son conjuntos financieros unitarios, comprensivos tan sólo de un capital, existe ρ con solución única. En efecto, siendo $e^{\rho t}$ el factor financiero de la operación elemental,

$$(C,\ T) \sim (C',\ T')$$

se cumple,

$$C' = C \cdot e^{\rho t}$$

siendo $t = T' - T$, de donde

$$\rho = \frac{\ln C' - \ln C}{T' - T} \tag{1}$$

que define la T. I. R.

Pero si la operación es *compleja*, siendo alguno de sus conjuntos financieros no unitario, correspondiendo así al modelo general de operación de inversión antes definido, ρ es cualquier solución de la ecuación,

$$\sum_{r=1}^{n} C_r e^{-\rho T_r} = \sum_{s=1}^{m} C'_s e^{-\rho T'_s} \tag{2}$$

la cual puede no existir, ser única o múltiple.

Si nuestra investigación ser limitara a la determinación de la ley financiera implícita en una operación, la inexistencia de solución, como la indeterminación, no entrañaría paradoja alguna. Nos informa, tan sólo, en el primer caso, de que ambos conjuntos de capitales financieros no son aptos para definir una operación financiera, y en el segundo, que ella es apta de definición con diferentes leyes financieras. Además, las soluciones negativas conculcan el principio de *positividad del interés*, por lo que no pueden ser aceptadas como válidas para expresar una ley financiera, al menos en una Matemática de la Financiación que acepte tal *principio*, acorde con la interpretación económica del interés como precio de la financiación. Nada se opone pues a que, con diferentes precios o leyes financieras, esto es, en distintos mercados financieros, la operación investigada sea posible, debido a su distribución de cuantías y diferimientos, aunque hayamos comprobado que en la operación elemental esto no pueda acaecer.

Pero cuando a ρ se le califica como *tasa interna de rentabilidad*, se rebasa su interpretación estrictamente financiera para ver en él una posible medida de rentabilidad de la operación de inversión. Y entonces surge la notable paradoja: ¿Cómo es posible que, para una misma operación, tal parámetro pueda adoptar diversas definiciones, conjugando incluso positivas con negativas, siendo así que las primeras evalúan beneficios y las segundas pérdidas? Y también, ¿cómo puede ser que, ante una concreta operación inversora, el parámetro T. I. R., pueda no estar definido, por inexistencia de solución?

La respuesta a estas interrogantes se encuentra en el análisis del propio significado que es atribuible lícitamente a la T. I. R. Nuestro trabajo intenta profundizar en este punto, pero antes desarrollaremos el cálculo de la T. I. R., y las propiedades que rodean al mismo, lo cual dará mayor precisión y contenido a nuestras posteriores consideraciones.

Cálculo de la T. I. R.; Algoritmo para su obtención

Es evidente que la resolución de la ecuación (2), respecto a ρ, no es cómoda ni sencilla. Nosotros vamos a desarrollar una metodología, apta para este fin, fundada en las propiedades de la agregación de capitales o *suma financiera*.

Comencemos recordando que, según un Postulado de la Matemática Financiera, generalmente admitido, todo conjunto de capitales financieros es equivalente a su *suma*, en cualquier diferimiento T, definida como un capital, pudiendo ser sustituido aquél por éste, siempre según la ley financiera que delimita la equivalencia.

Siendo el conjunto de capitales $\{(C_r,\ T_r)\}$; el diferimiento dato para la suma, T; y ρ, el tanto que define la ley financiera; la suma es el capital financiero $(C,\ T)$, cuya cuantía es,

$$C = \sum_{r=1}^{n} C_r e^{\rho(T - T_r)}$$

pudiendo escribirse,

$$\{(C_r,\ T_r)\} \sim (C,\ T)$$

para la equivalencia financiera definida por ρ.

Interés muy particular tiene la suma financiera en el llamado *diferimiento medio*, simbolizado T_0, caracterizado por ser su cuantía,

$$C = \sum_{r=1}^{n} C_r$$

y deducible por tanto de la ecuación,

$$\sum_{r=1}^{n} C_r = \sum_{r=1}^{n} C_r e^{\rho(T_0 - T_r)}$$

resultando,

$$T_0 = \frac{1}{\rho} \ln \frac{\Sigma C_r}{\Sigma C_r e^{-\rho T_r}} \qquad (3)$$

y siendo,

$$\{(C_r,\ T_r)\} \sim (\Sigma C_r,\ T_0)$$

Es sencillo, ahora, *sustituir financieramente* la operación compleja,

$$\{(C_r,\ T_r)\} \sim \{(C'_s,\ T'_s)\}$$

por la elemental,

$$(\Sigma C_r,\ T_0) \sim (\Sigma C'_s,\ T'_0)$$

sin pérdida alguna de sus propiedades financieras.

Se deduce fácilmente que es:

$$\Sigma C'_s = (\Sigma C_r) e^{\rho(T'_0 - T_0)}$$

y, por lo tanto,

$$\rho = \frac{\ln \Sigma C' - \ln \Sigma C}{T'_0 - T_0} = \frac{k}{t_0} \qquad (4)$$

donde es $k = \ln \Sigma C' - \ln \Sigma C$, una constante característica de la operación, y $t_0 = T'_0 - T_0$, su *plazo financiero medio (P.F.M.)*.

Una observación es oportuna, ahora. La conversión de una operación compleja en elemental reduce la *heterogeneidad financiera* que entraña la distribución de la cuantía total, ΣC_r, del *input*, así como la $\Sigma C'_s$ del *output*, en el intervalo temporal que se inicia en T_1, para concluir en T'_m. En efecto, ella es sustituida por la *homogénea* colocación de ΣC_r en el plazo financiero medio, que se inicia en T_0 y finaliza en T'_0, donde se produce el reintegro total de $\Sigma C'_s$. Tal reducción financiera, que supone la *elementalización* o *simplificación* de las operaciones complejas, sin pérdida de sus propiedades financieras, abre un amplio campo de aplicaciones. Por citar alguna, reparemos en aquellas magnitudes financieras convencionales, como el *interés* y los tantos, *efectivo* y *nominal* de interés, que para las operaciones elementales se hallan bien definidas, por estarlo cuantías y plazos, pero no así para las complejas. La generalización de su definición a estas es, ahora, bien sencilla,

Interés, $\quad I = \Sigma C'_s - \Sigma C_r$

Tanto efectivo, $\quad i = \dfrac{\Sigma C'_s - \Sigma C_r}{\Sigma C_r}$

Tanto nominal, $\quad \mathrm{i} = \dfrac{\Sigma C'_s - \Sigma C_r}{t_0 \cdot \Sigma C_r}$

La expresión (4) no explícita ρ, pues el P. F. M., es función de ρ. En efecto,

$$t_0(\rho) = T'_0 - T_0 = \frac{1}{\rho}\left(\ln\frac{\Sigma C'_s}{\Sigma C_r} - \ln\frac{\Sigma C'_s e^{-\rho T'_s}}{\Sigma C_r e^{-\rho T_r}}\right) = \frac{1}{\rho}\left(k - \ln\frac{\Sigma C'_s e^{-\rho T'_s}}{\Sigma C_r e^{-\rho T_r}}\right) \qquad (5)$$

función que, en seguida, estudiaremos con mayor profundidad.

La ecuación (4) puede también escribirse así,

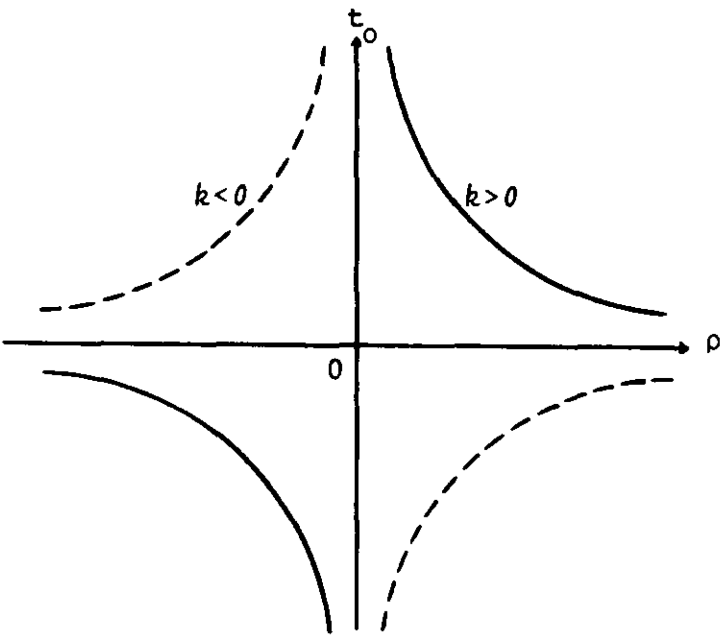
$$\rho \cdot t_0 = k \qquad (6)$$

que muestra una importante propiedad en las operaciones financieras complejas: *el producto de la tasa interna por el plazo financiero medio es la constante característica de la operación.*

Siendo k un *dato* de la operación financiera, la relación entre t_0 y ρ es inmediata, siendo su grafo las ramas de la hipérbola equilátera,

Si la operación que analizamos es estrictamente financiera, o *no degenerada*, en el sentido de que satisface el principio de positividad del interés, cuya consecuencia para toda operación,

$$(C, \underline{T}) \sim (C', T')$$



es la identidad de signo de los incrementos o diferencias,

$$\Delta C = C' - C$$
$$\Delta T = T' - T$$

se sigue la necesaria identidad de signo entre k y t_0, debiendo encontrarse la solución de la ecuación (4) en la rama de hipérbola correspondiente al primer cuadrante, si previamente hemos ordenado los miembros de la equivalencia financiera de tal modo que sea siempre k positiva.

Si nuestro análisis se extiende a operaciones financieras *degeneradas*, que no satisfacen la anterior hipótesis, los signos de k y t_0 son contrarios y, ordenando siempre de modo que sea $k>0$, es decir, $\Sigma C'_s > \Sigma C_r$, la solución de (4) se halla en el tercer cuadrante, en la correspondiente rama de la hipérbola equilátera.

Según esto, ordenando previamente de modo que sea siempre $k>0$, la solución buscada debe encontrarse en las ramas de hipérbola de los cuadrantes primero y tercero, respectivamente según fuere la operación financiera, estricta o degenerada.

De cuanto venimos exponiendo se deduce que el P. F. M., es una función de ρ que, para la T. I. R., debe cumplir la propiedad (6). Por ello, el par de valores para la T. I. R. y el P. F. M., deben definir los puntos de intersección entre la curva representación de la función $t_0(\rho)$, y la hipérbola $y=\frac{k}{\rho}$, grafo de la propiedad referida. Intersecciones que pueden producirse en ambas ramas, ya que la interpretación financiera de la inversión permite la consideración de la operación degenerada, como modelo de una inversión con rentabilidad negativa o generadora de pérdidas, en principio.

Por todo ello, el estudio analítico de la función (5), que define el P. F. M., es nuestro siguiente paso obligado.

Estudio analítico de la función P.F.M.

$$t_0(\rho)=\frac{1}{\rho}\left(k-\ln\frac{\Sigma C'_s e^{-\rho T'_s}}{\Sigma C_r e^{-\rho T_r}}\right)$$

1. Dominio: Todo el campo real, excepto el 0.
2. Continuidad: En todo el dominio, presentando en 0 una discontinuidad evitable.

En efecto, consideremos previamente que,

$$\lim_{\rho\to 0} T_0(\rho)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\ln\Sigma C_r-\ln\Sigma C_r e^{-\rho T_r}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Sigma C_r T_r e^{-\rho T_r}}{\Sigma C_r e^{-\rho T_r}}=\frac{\Sigma C_r T_r}{\Sigma C_r}$$

donde la indeterminación fue resuelta mediante la regla de L'Hôpital.

Entonces,

$$\lim_{\rho\to 0} t_0(\rho)=\lim_{\rho\to 0} T'_0-\lim_{\rho\to 0} T_0=\frac{\Sigma C'_s T'_s}{\Sigma C'_s}-\frac{\Sigma C_r T_r}{\Sigma C_r}=\beta$$

representando β el P.F.M., en *ambiente financiero neutro*, observándose que en él los diferimientos medios de cada conjunto son media ponderada de los diferimientos que participan en el conjunto, sólo con las respectivas cuantías, consecuencia de la neutralidad financiera.

3. Acotamiento: Existen dos cotas, a inferior y b superior.

Así es, por ser:

$$T_1<T_0<T_n$$
$$T'_1<T'_0<T'_m$$

resulta inmediato,

$$T'_1 - T_n < T'_0 - T_0 < T'_m - T_1$$

y, por tanto,

$$a = T'_1 - T_n$$
$$b = T'_m - T_1$$

4. Intersecciones con los ejes:

Con el de abscisas. Para todo ρ (excepto $\rho = 0$) que satisfaga,

$$\frac{\Sigma C'_s e^{-\rho T'_s}}{\Sigma C'_s} = \frac{\Sigma C_r e^{-\rho T_r}}{\Sigma C_r}$$

Con el de ordenadas. Sólo en el punto $(0, \beta)$.

5. Asíntotas: Existen dos asíntotas horizontales, $y = A$ a la derecha, e $y = B$ a la izquierda.

Previamente, observemos los siguientes límites:

$$\lim_{\rho \to \infty} T_0(\rho) = \lim_{\rho \to \infty} \frac{\Sigma C_r T_r e^{-\rho T_r}}{\Sigma C_r e^{-\rho T_r}} = \lim_{\rho \to \infty} \frac{C_1 T_1 e^{-\rho T_1}}{C_1 e^{-\rho T_1}} = T_1$$

$$\lim_{\rho \to -\infty} T_0(\rho) = \lim_{\rho \to -\infty} \frac{\Sigma C_r T_r e^{-\rho T_r}}{\Sigma C_r e^{-\rho T_r}} = \lim_{\rho \to -\infty} \frac{C_n T_n e^{-\rho T_n}}{C_n e^{-\rho T_n}} = T_n$$

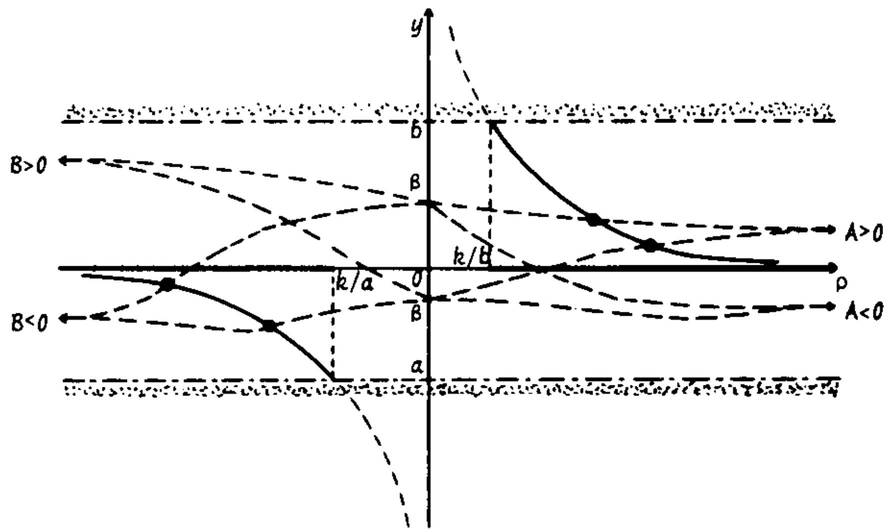
donde nuevamente se ha aplicado L'Hôpital.

Son, entonces,

$$\lim_{\rho \to \infty} t_0(\rho) = \lim_{\rho \to \infty} T'_0 - \lim_{\rho \to \infty} T_0 = T'_1 - T_1 = A$$

$$\lim_{\rho \to -\infty} t_0(\rho) = \lim_{\rho \to -\infty} T'_0 - \lim_{\rho \to -\infty} T_0 = T'_m - T_n = B$$

Otras precisiones respecto a crecimiento, concavidad, etc., no son posibles, por lo que seguidamente procedemos a una representación gráfica que incluye diversas trayectorias posibles de la función $t_0(\rho)$, significativas en nuestro análisis. Hemos considerado, también, las ramas de la hipérbola equilátera, para observar las intersecciones con ella, donde se encuentran las soluciones de la ecuación (4), equivalente también a la (2).



Ya podemos estudiar los *umbrales* para la T.I.R., para valores positivos, el umbral es $\frac{k}{b}$, a partir del cual es posible la solución. Para valores negativos, es $\frac{k}{a}$. De este modo, la solución no puede hallarse en el intervalo,

$$\left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right)$$

todo ello como consecuencia de las cotas a y b de la función.

Procedamos ahora a realizar la discusión de las posibles situaciones, teniendo en cuenta los signos de los parámetros A, B y β, que orientan los extremos de cada trayectoria de la función. Distinguimos los siguientes casos:

1.º $A > 0$.

Cualquiera que fuere el signo de β, existe al menos una intersección en el primer cuadrante. Por tanto, hay siempre solución positiva para la T.I.R., correspondiendo a una operación financiera estricta (P.F.M., positivo).

2.º $B < 0$.

Situación simétrica a la anterior, con solución negativa para la T.I.R., para cualquier signo de β, que corresponde a una operación financiera degenerada (P.F.M., negativo).

3.º $A<0$ y $B>0$.

Nada puede asegurarse absolutamente, pero las soluciones son muy improbables. La dificultad crece con los valores absolutos de A y B, y con la coincidencia de sus signos con β.

Tales conclusiones pueden resumirse en el siguiente cuadro, donde ρ^* simboliza la solución para la T.I.R.:

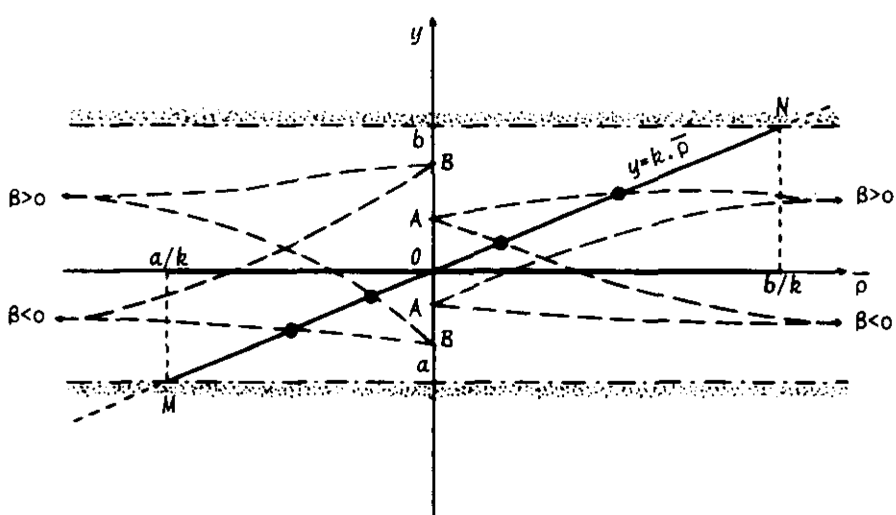
	$T'_1>T_1$	$T'_1<T_1$
$T'_m>T_n$	$\rho^*>0$	—
$T'_m<T_n$	$\rho^*>0$ $\rho^*<0$	$\rho^*<0$

Una sencilla transformación, mediante un cambio de variable, permite situar las posibles soluciones en un segmento rectilíneo. Ello permite facilitar algunas concepciones. En efecto, hagamos

$$\bar{\rho}=\frac{1}{\rho}$$

y reproduzcamos la representación gráfica de $t_0(\bar{\rho})$, en la nueva variable $\bar{\rho}$.

Las ramas *factibles* de la hipérbola se han transformado en el segmen-



to $\overline{MN}$, donde aparecen las posibles intersecciones. La solución $\overline{\rho^*}$ sólo es posible dentro del intervalo,

$$\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right)$$

La función $y=t(\bar{\rho})$ presenta una discontinuidad en 0, con salto $\overline{AB}$, y tiene, a derecha e izquierda, la asíntota horizontal $y=\beta$.

Las conclusiones siguen siendo, naturalmente, las mismas. Siendo $A>0$, existe al menos una solución positiva, sea $\beta \gtrless 0$; si es $B<0$, sucede igual, pero con solución negativa; para $A<0$ y $B>0$, la solución es muy improbable y se acentúa la dificultad si β tiene el mismo signo que A o B, respectivamente, y si éstos se apartan del origen.

Algoritmo para la obtención de la T.I.R. y el P.F.M.

El conocimiento de las propiedades que acompañan a las soluciones es aprovechado para la elaboración de un algoritmo que, mediante un proceso recurrente, y con la aproximación deseada, nos permita obtenerlas.

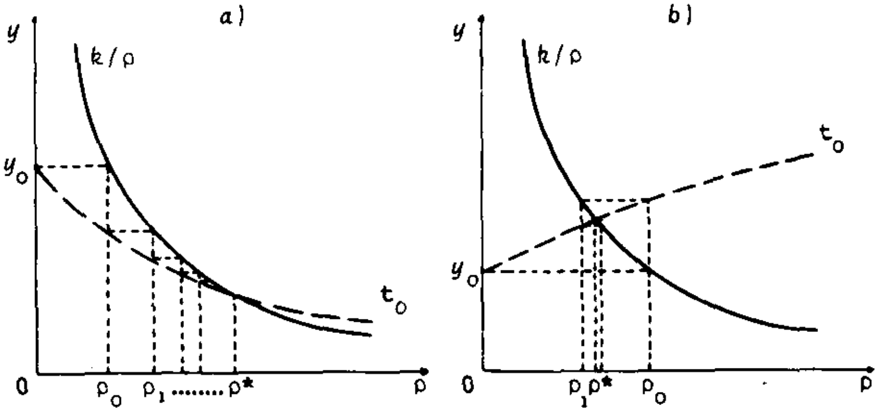
Por hallarse la solución en la intersección de dos curvas, de funciones conocidas,

$$y=t_0(\rho); \qquad y=\frac{k}{\rho}$$

es posible el siguiente proceso recurrente de aproximación, que representamos gráficamente para dos tipos de intersección:

a) Con pendientes del mismo signo, en ambas curvas.

b) Con pendientes de signo contrario.



El peligro de un posible *efecto-disparo*, en cualquier caso, resulta muy atenuado por el carácter asintótico-horizontal de la función $y=t_0(\rho)$, siendo controlable, en todo caso, mediante una corrección, ya estudiada, en la sucesión.

El algoritmo precisa un *valor de salida*, que hemos simbolizado y_0, y que más adelante precisaremos, así como una *ley de recurrencia* que permita la formación de la sucesión de límite ρ^*. Procederemos de este modo:

$$\rho_0=\frac{k}{y_0}; \quad y_1=t_0(\rho_0); \quad \rho_1=\frac{k}{y_1}; \quad y_2=t_0(\rho_1); \ \ldots$$

de donde llegamos a la expresión de recurrencia,

$$\rho_{p+1}=\frac{k}{y_{p+1}}=\frac{k}{t_0(\rho_p)}=\rho_p\cdot\left(1-\frac{1}{k}\ln\frac{\Sigma\, C'_s e^{-\rho_p T_s}}{\Sigma\, C_r e^{-\rho_p T_r}}\right)^{-1}$$

obteniéndose así el factor,

$$R=\left(1-\frac{1}{k}\ln\frac{\Sigma\, C'_s e^{-\rho_p T_s}}{\Sigma\, C_r e^{-\rho_p T_r}}\right)^{-1}$$

que permite proseguir el proceso hasta alcanzar la aproximación deseada, la cual será inferior a un ε, cuando

$$|\rho_p-\rho_{p-1}|<\varepsilon$$

Busquemos ahora, el *valor de salida* más conveniente, ya que en principio es válido cualquiera comprendido en el intervalo (a, b). Consideremos, primero, el análisis de una solución positiva, pues la negativa tendrá un tratamiento similar. La solución será un punto de la trayectoria que une a β con A. Lógicamente se encontrará más próxima a β, que corresponde a $\rho=0$, que a A, que es el valor para $\rho\to\infty$. Ello parece aconsejar partir de $y_0=\beta$, y así es, en general, pero con excepciones.

Estudiemos las posibles situaciones, indicándose para cada una el más conveniente valor de salida:

a) $A>0$ y $\beta>0$; $y_0=\beta$
b) $A>0$ y $\beta<0$; $y_0=A$
c) $A<0$ y $\beta>0$; $y_0=\beta$
d) $A<0$ y $\beta<0$; *no procede.*

En los casos *a)* y *b)*, existe la solución positiva. No obstante, en *b)* no procede partir de $y_0=\beta$, sino de A, por ser aquél un valor negativo que produciría disturbios en el proceso recurrente. En *c)* la solución es difícil y en *d)* prácticamente imposible, confirmándose si es $b<0$.

Para la búsqueda de una solución negativa surgen las siguientes situaciones, simétricas de aquéllas:

a) $B<0$ y $\beta<0$; $y_0=\beta$
b) $B<0$ y $\beta>0$; $y_0=B$
c) $B>0$ y $\beta<0$; $y_0=\beta$
d) $B>0$ y $\beta>0$; *no procede*

Nuevamente surge la conveniencia del valor de salida $y_0=\beta$, en *a)* y en *c)*. No así en *b)*, por ser positivo. La previsible ausencia de solución en *d)* resultaría confirmada si es $a>0$.

Como síntesis de cuanto hemos expuesto, podríamos agrupar los resultados en dos conclusiones globales:

1. CASO NORMAL: El signo de β coincide con el de la solución buscada.

Partimos de $\rho_0=\frac{k}{\beta}$ aplicando el factor R recurrentemente, hasta alcanzar la aproximación deseada.

2. CASO ANORMAL: El signo de β no coincide con el de la solución pretendida.

Partiremos, ahora, de $\rho_0=\frac{k}{A}$, o bien, de $\rho_0=\frac{k}{B}$, según investiguemos una solución positiva o negativa, respectivamente. Después, continuamos como en el caso normal.

Obtenida la T.I.R., el P.F.M., correspondiente a dicha tasa, es

$$t_0(\rho^*)=\frac{k}{\rho^*}$$

Digamos, finalmente, que tal algoritmo presenta una gran facilidad para su programación en un microcomputador y que, en todas las aplicaciones realizadas, ha mostrado una rapidísima convergencia en el cálculo de la T.I.R.

Limitaciones de la T.I.R.; el ambiente financiero

En la Introducción al presente trabajo ya señalamos que el uso y concepción de la T.I.R., no se ciñen a la resolución del problema financiero que hemos denominado de obtención de la *ley financiera implícita*, en una operación en que están determinadas prestaciones y contraprestaciones. Evidentemente, la T.I.R., pretende más, pretende medir la rentabilidad de una operación inversora.

Para ello, se funda en una concepción simplista de la inversión como operación financiera. El razonamiento, más o menos explícito, es el siguiente: dado que, en toda operación financiera, el *sujeto activo* de la misma se reintegra del *sujeto pasivo*, no sólo de la disponibilidad monetaria que facilitó a éste, sino también de una *renta diferencial*, que es el interés de la operación, el cual se puede referir a la unidad de cuantía facilitada, peseta-año, mediante la *tasa de interés*, nada nos impide identificar la disponibilidad facilitada con la cuantía invertida, el interés con la rentabilidad de la inversión y, consiguientemente, la tasa de interés con una medida financiera de la rentabilidad, con la denominación de *tasa interna de rentabilidad.* Presenta tal medida la ventaja de su independencia del entorno exterior, al no precisar definición previa alguna, ni hipótesis, sobre mercados financieros, *tipos calculatorios*, etc., por lo que la medida, que tan sólo se apoya en la consideración de los capitales entregados y recibidos, parece alcanzar el mayor grado posible de *objetividad.*

Pero esta concepción, por simple, es peligrosamente engañosa y precisa de una profundización inmediata para descubrir las delicadas hipótesis que asume. En efecto, si aceptamos que sea la rentabilidad de la inversión la diferencia entre las cuantías entregadas y recibidas, es decir,

$$R = \Sigma\, C'_s - \Sigma\, C_r$$

ya estamos asumiendo la hipótesis de *homogeneidad* en la unidad de medida de tales cuantías, que no se ve afectada por el vencimiento al que está referida cada unidad monetaria, hipótesis que supone la *neutralidad del ambiente financiero*, es decir, la absoluta inexistencia de la *preferencia por la liquidez.* Así es, puesto que el aprecio o valoración económica de las unidades monetarias con que expresamos las cuantías entregadas y recibidas, no se ven afectadas por la referencia al año o años de entregas y reintegros.

Prescindiendo de consideraciones inflacionarias —muy oportunas en otro análisis—, la liquidez del dinero no es computada. No es que nosotros critiquemos ahora tal hipótesis —aunque no deje de ser paradójico que un análisis de la rentabilidad, que pretende ser financiero, prescinda precisamente de aquel principio económico que es el fundamento del fenómeno financiero, la *preferencia por la liquidez*—, sino que estamos constatando la asunción de esta importante hipótesis.

No obstante, lo anteriormente expuesto es susceptible de matización e incluso de rectificación. Es factible entender que dicha renta diferencial, no sólo recoge lo que propiamente podríamos considerar *renta de la inversión*, sino también el efecto financiero debido a la diferencia de liquidez, que nosotros denominamos *renta del ahorro*, por tratarse de la renta con la que el mercado financiero retribuye la *pasiva* actividad ahorradora —abstención de consumo—, a la que se superpone, como auténtica renta diferencial, el resultado de la *activa* gestión inversora, *superrenta del inversor.* Ahora, la renta diferencial de la operación se identificaría con una *rentabilidad bruta* que incorporaría tanto la *renta del ahorro* como la *renta de la inversión*,

$$R = R^{\circ} + R_r$$

Paralelamente —la demostración es simple—, surgen las tasas de *rentabilidad bruta* ρ, *de rentabilidad neta* ρ_r, *y del ahorro o tasa de interés* ρ°, con la siguiente relación entre ellas,

$$\rho = \rho^{\circ} + \rho_r$$

En esta concepción última no se asume ya la hipótesis de *neutralidad* del ambiente financiero, por el contrario, entendemos que éste puede ser significativo, según una tasa de interés ρ°, vigente en el *mercado de dinero* para operaciones del mismo plazo que exige la operación inversora, dato *exógeno*, por tanto, a dicha operación. Entonces, la neutralidad financiera resulta recogida como caso particular, en que $\rho^{\circ} = 0$, con la consecuencia $\rho = \rho_r$, es decir, con la coincidencia de las rentabilidades *bruta* y *neta*, como en la primera interpretación, que resulta pues recogida dentro de esta otra más general.

Observamos, pues, que en cualquier interpretación de la renta diferencial R, existe una hipótesis necesaria respecto al ambiente financiero, sea neutral o significativa, determinado por el valor de ρ° que define la ley financiera del mercado de dinero. Según ella, la operación de inversión,

$$\begin{aligned} I;\quad & \{(C_r,\ T_r)\}; \qquad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ O;\quad & \{(C'_s,\ T'_s)\}; \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \end{aligned}$$

es financieramente equivalente a esta otra,

$$\begin{aligned} I;\quad & (\Sigma\, C_r,\ T_0); \qquad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ O;\quad & (\Sigma\, C'_s,\ T'_0); \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \end{aligned}$$

siendo T_0 y T'_0 los respectivos diferimientos medios, para ambos conjuntos de capitales *input* y *output*, determinados según la expresión (3) y tasa ρ°. Son, por tanto funciones de ρ°, al igual que el P.F.M., que se deduce de ellos para la operación inversora,

$$t_0(\rho^{\circ}) = T'_0(\rho^{\circ}) - T_0(\rho^{\circ})$$

produciéndose, en tal ambiente financiero, las equivalencias,

$$\{(C_r,\ T_r)\} \sim (\Sigma\, C_r,\ T_0)$$
$$\{(C'_s,\ T'_s)\} \sim (\Sigma\, C'_s,\ T'_0)$$

que avalan las consideraciones anteriores.

La *tasa de rentabilidad bruta* ρ se deduce de la siguiente ecuación,

$$\Sigma\, C'_s = \Sigma\, C_r\, e^{\rho(T'_0 - T_0)}$$

de donde,

$$\rho = \frac{\ln \Sigma\, C'_s - \ln \Sigma\, C_r}{T'_0(\rho^\circ) - T_0(\rho^\circ)} = \frac{k}{t_0(\rho^\circ)}$$

siendo la *tasa de rentabilidad neta*, $\rho_r = \rho - \rho^\circ$.

Contrastemos, ahora, estos resultados con la *tasa de rentabilidad interna* o T.I.R.,

$$\rho^* = \frac{\ln \Sigma\, C'_s - \ln \Sigma\, C_r}{T'_0(\rho^*) - T_0(\rho^*)} = \frac{k}{t_0(\rho^*)}$$

siguiéndose inmediatamente que nunca puede expresar una tasa de rentabilidad neta, ya que sería preciso que fuese $\rho^* = 0$ —ambiente financiero *neutro*—, ni tampoco una tasa de rentabilidad bruta, a no ser que fuese $\rho^* = \rho^\circ$.

Entonces, la hipótesis encubierta, necesaria para que la T.I.R., tenga sentido como instrumento analítico de medida de rentabilidad de una inversión, ya no es la neutralidad financiera del ambiente, medido por la tasa de interés del mercado, sino la de *coincidencia de la tasa de interés con la tasa interna de rentabilidad.* Puede ser que tal hipótesis no sea subjetiva, pero es evidente que es *arbitraria* y, además *absurda.*

Es arbitraria, porque se hace una estimación del equilibrio del *mercado de dinero,* a través de la tasa de interés, sin consideración alguna a las fuerzas que lo rigen, haciéndola depender de las especiales características de una operación inversora. Además es absurda, y ello al menos por dos razones. La primera, porque un parámetro exterior, la tasa de interés del dinero, se conceptúa interno a la operación de inversión y variable con ella. Y, la segunda, porque tal hipótesis arrastra la de nulidad permanente de la tasa de rentabilidad neta, ya que es

$$\rho_r = \rho - \rho^\circ = \rho^* - \rho^* = 0$$

y, si consideramos que tal tasa refleja la *superrenta del inversor*, es decir, la auténtica renta producida por la actividad inversora, margen diferencial motor de ella, la hipótesis de su nulidad, para cualquier inversión, resulta insostenible. Aún podríamos preguntarnos qué explicación cabe, para una T.I.R. negativa, la consecuencia inmediata de negatividad para la tasa de interés del dinero.

La conclusión final es que la T.I.R., cuyo valor es,

$$\rho^* = \frac{k}{t_0(\rho^*)}$$

no refleja una tasa de rentabilidad, en ambiente financiero neutro, de tasa de interés nula, $\rho^\circ = 0$,

$$\rho = \frac{k}{t_0(0)}$$

ni tampoco en ambiente financiero significativo, con tasa de interés $\rho^\circ > 0$,

$$\rho = \frac{k}{t_0(\rho^\circ)}$$

Dejando el estudio de las perturbaciones que puedan derivarse del uso de la T.I.R., en el análisis de inversiones, como contenido del último epígrafe, nos parece ahora oportuno intentar una explicación de la fácil aceptación de este instrumento. Para ello, observemos el significado de la T.I.R., en la operación de inversión *elemental*, esto es, con *input* y *output* unitarios,

$$\begin{aligned} I;&\quad (C,\ T) \\ O;&\quad (C',\ T') \end{aligned}$$

a la que corresponde, *para cualquier ambiente financiero*, o ρ°, la tasa de rentabilidad bruta,

$$\rho = \frac{\ln C' - \ln C}{T' - T} = \frac{k}{t}$$

resultando *invariante* pues a ρ°. Aquí coinciden plenamente ρ y ρ^*, según vimos ya en (1), y la T.I.R., cobra justificadamente la significación de una tasa de rentabilidad bruta.

Entonces, un análisis superficial de las propiedades de la T.I.R., realizado sobre las operaciones elementales de inversión, puede llevarnos a considerar que se identifican ambas tasas, interna y de rentabilidad. Como ello no exige hipótesis alguna respecto al tipo de interés o a las condiciones del mercado de dinero, tal instrumento analítico adquiere la máxima objetividad e independencia. Desgraciadamente, la generalización de tales cualidades a las operaciones de inversión *complejas*, que son por otra parte las que responden al modelo general, no es correcta ni admisible, originándose con ello posiblemente la confusión existente en el uso de la T.I.R., al tiempo que explica la facilidad de su aceptación.

Contrastemos ahora la *existencia* y *unicidad* de la tasa de rentabilidad ρ, en cualquier inversión, frente a la posible *inexistencia* y *multiplicidad* (incluso con soluciones de signo contrario) que acompaña a la T.I.R. y que sustenta la paradoja que ya apuntamos en la Introducción. La primera supone una correcta expresión de medida de la rentabilidad bruta de una inversión y, como tal, se muestra *bien definida.* La segunda, sólo expresa una ley financiera implícita en una *presunta* operación financiera, donde cabe la inexistencia de solución —la operación no es financiera por no reunir las propiedades precisas—, soluciones negativas —tampoco es financiera—, soluciones positivas única o múltiples —la operación es posible en uno o diferentes mercados regidos por distintos tipos de interés—. De este modo, ambos instrumentos de análisis ofrecen un significado y sentido claro y preciso.

Consecuencia de todo ello es que nosotros propugnemos la diferenciación, formal y conceptual, entre la *operación financiera*, descrita mediante una *equivalencia* entre dos conjuntos de capitales financieros,

$$\{(C_r,\ T_r)\} \sim \{(C'_s,\ T'_s)\}$$

donde la investigación de la ley financiera, si no es conocida, cobra evidente relevancia, de aquella otra *operación inversora*, descrita mediante un *esquema input-output* de capitales financieros, dentro de un ambiente financiero definido por una tasa de interés ρ°,

$$\left.\begin{array}{lll} I; & \{(C_r,\ T_r)\}; & r=1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ O; & \{(C'_s,\ T'_s)\}; & s=1,\ 2,\ \ldots,\ m \end{array}\right\}\rho^\circ$$

cuyo desequilibrio financiero es, precisamente, la manifestación de la rentabilidad que investigamos en la inversión.

En todo planteamiento económico correcto es inevitable una posición clara ante el *grado de preferencia por la liquidez* que se considere existente en una economía, esto es, una definición del *ambiente financiero.* Ello es inevitable y aquellos modelos que no hacen referencia a él, a través del tipo de interés del dinero, conllevan la hipótesis implícita, pero efectiva, de su *neutralidad.* La tasa interna de rentabilidad, al pretender soslayar esta definición, incurre en el enmascaramiento de una definición del ambiente financiero arbitraria y absurda, como hemos explicado, induciendo a errores conceptuales y prácticos.

Por el contrario, aquella otra metodología que se funda en el *valor-capital* de una inversión, resultado de la actualización financiera de inputs y outputs, si bien rudimentaria en su instrumentación que no alcanza a la obtención de tasas de rentabilidad, a la consideración del *dinamismo* del mercado financiero, a la inclusión de la *inmovilización financiera* de la inversión (cuantía y plazo) en los criterios de decisión, etc., consigue resultados significativos, frente a la T.I.R., por no eludir la presencia del ambiente financiero en su análisis, mejorando muy notablemente la descripción financiera de la inversión.

Distorsiones de la T.I.R.; La rentabilidad financiera

Reiteradamente nos hemos referido a la formalización de una operación de inversión mediante un esquema input-output de capitales, en un ambiente financiero. Pero, al igual que no toda equivalencia entre capitales describe una operación financiera, sino que también precisa de la propiedad,

$$signo\ k = signo\ t_0$$

necesaria para que se cumpla el principio de positividad del interés, tampoco el esquema input-output refleja siempre una estricta operación inversora, precisándose la propiedad,

$$t_0(\rho^{\circ}) > 0$$

Es decir, *una operación de inversión sólo lo es, en sentido estricto, si su plazo financiero medio es positivo.*

Tal propiedad tan sólo supone la exigencia de que la rentabilidad de la inversión se produzca en un plazo, o bien, que la inversión se desarrolle en el tiempo. Sólo así se justifica el análisis financiero de su rentabilidad que, por este enfoque, puede calificarse de rentabilidad *financiera.*

En efecto, si el P.F.M. es nulo, la operación de inversión es equivalente financieramente a otra *simultánea*, donde también puede surgir la rentabilidad positiva o negativa, por diferencia entre cuantías entregadas y recibidas, pero tal rentabilidad *no es financiera* por no haberse producido en el transcurso de un plazo, ni la operación es estrictamente inversora, pudiendo ser comercial, especulativa, etc. Con mayor razón sería rechazable el carácter financiero de la rentabilidad, y el estricto de la inversión, si el output precede al input, esto es, si los capitales reintegrados preceden *financieramente* a los invertidos.

La consecuencia es la improcedencia del análisis financiero de la rentabilidad de cualquier otra operación no calificable estrictamente inversora.

Observemos que el P.F.M. es función de ρ°, por lo que la calificación de la operación puede ser diferente, en dependencia con el ambiente financiero considerado.

Por otra parte, el signo de la constante

$$k = \ln \frac{\Sigma C'_s}{\Sigma C_r}$$

puede tomar cualquier sentido, significando beneficio o pérdida en la operación. Entonces,

$$\rho = \frac{k}{t_0(\rho^{\circ})}$$

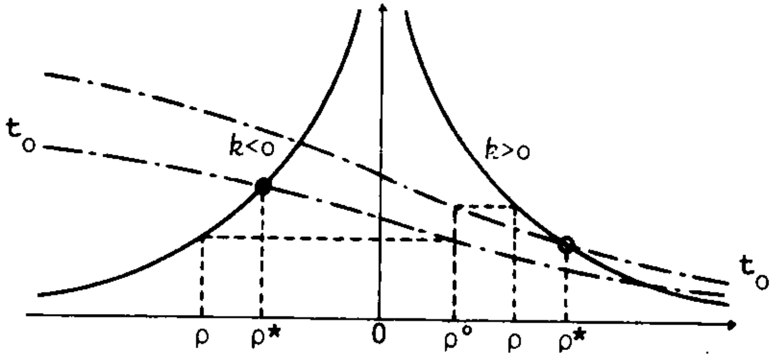
tiene el mismo signo que k, significando una tasa financiera de beneficio o pérdida, según fuese positivo o negativo.

Consideremos ahora la relación,

$$\rho \cdot t_0(\rho^{\circ}) = k \tag{7}$$

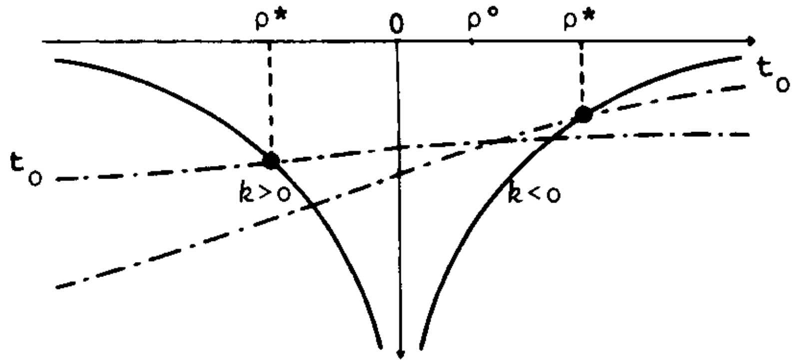
expresión de la siguiente propiedad: *el producto de la tasa financiera de rentabilidad (T.F.R.) por el plazo financiero medio (P.F.M.) es la constante característica de la operación de inversión.*

Es ahora posible la siguiente representación gráfica, donde se consideran dos situaciones, de beneficio y pérdida, en la operación inversora, para un mismo ρ°,



habiéndose señalado en cada una los valores correspondientes de ρ (T.F.R.) y ρ^* (T.I.R.). En cualquier caso, el segmento orientado $\overline{\rho^\circ \rho}$ mide con su longitud la tasa de rentabilidad neta ρ_r.

Hemos prescindido de la representación de los cuadrantes tercero y cuarto, por corresponder a P.F.M., negativos y no existir rentabilidad financiera. No obstante, en ellos la T.I.R. puede estar definida (*),



La desviación entre la T.F.R. y la T.I.R., que acabamos de representar gráficamente, analíticamente es,

$$\rho - \rho^* = \frac{k}{t_0(\rho^\circ)} - \frac{k}{t_0(\rho^*)} = k\left(\frac{1}{t_0(\rho^\circ)} - \frac{1}{t_0(\rho^*)}\right)$$

cuyo signo no es posible predecir, debido a la imprecisión en el crecimiento o decrecimiento de la función $t_0(\rho)$.

En cambio, sí se puede asegurar que ambas tasas, T.F.R. y T.I.R., se hallan al mismo lado de ρ°, derecha o izquierda, es decir, que

$$signo\ \rho - \rho^\circ = signo\ \rho^* - \rho^\circ$$

(*) Cabria preguntarse qué significado pueden tener, tanto la T.I.R. como la T.F.R., calculadas en operaciones de inversión «degeneradas», donde el P.F.M. es negativo. La contestación no es difícil. Al igual que en las operaciones financieras la tasa que determina la ley es bivalente, en el sentido de que es tan válida para la parte activa como para la pasiva, significando para la primera capitalización y descuento para la segunda, en las operaciones de inversión también la tasa, calculada de un modo u otro, tiene significado doble. Para la parte activa —inversión estricta—, ya hemos visto que es una tasa de rentabilidad. Para la pasiva —inversión degenerada— entraña una tasa de descuento por la anticipación recibida de capitales, la cual, si excede de la de mercado supone un perjuicio y, si es inferior, un beneficio, alcanzándose nuevamente mediante la diferencia el concepto de tasa neta.

por lo que las rentabilidades netas calculadas, según ambas tasas, tienen siempre el mismo sentido.

Creemos estar ya en condiciones de realizar un análisis crítico y valorativo de las posibles perturbaciones que el empleo de la T.I.R. pueda producir. Vamos a desarrollarlo a dos niveles: En la descripción particular de una inversión concreta; y, en la descripción comparada entre varias inversiones, como fundamento de un posible criterio de decisión inversora.

A) Distorsiones en la descripción particular

Diferenciamos los cuatro tipos de soluciones posibles de la T.I.R. y el P.F.M., representadas por el par

$$(\rho^*,\ t_0(\rho^*))$$

en atención a los posibles signos de sus componentes, que la sitúan en los cuadrantes primero al cuarto, según hemos visto.

Aquellas soluciones con T.I.R. negativa *carecen de significación* descriptiva de la inversión. En efecto, incluyen la inaceptable hipótesis de la *preferencia negativa por la liquidez* —mayor estimación de los capitales de posterior vencimiento o inferior liquidez—, ya que implican

$$\rho^\circ = \rho^* < 0$$

Ni siquiera son un índice seguro de rentabilidad negativa o pérdida, pues si el P.F.M. es negativo también, la operación de inversión es *degenerada* y la tasa aproxima más una tasa de descuento que de rentabilidad (*), por lo que el pseudoinversor experimenta mayor beneficio cuanto menor es tal tasa al tipo de descuento del mercado. Entonces, siendo negativa la T.I.R., existe beneficio, no pérdida, para el sujeto.

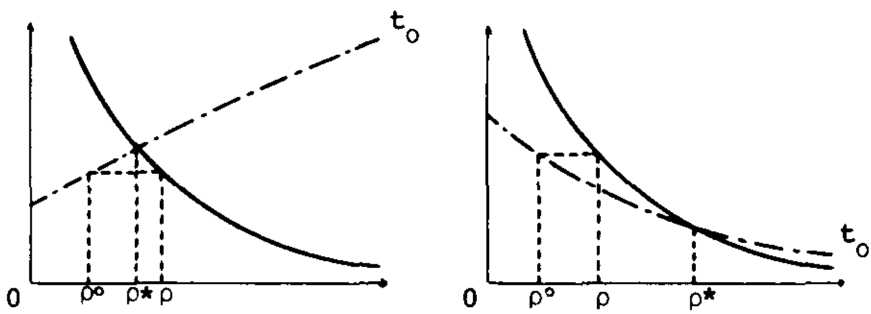
Si las soluciones tiene P.F.M. negativo la operación de inversión es *degenerada*, no procediendo su análisis financiero, como hemos estudiado. Entonces, la T.I.R. *tampoco tiene significado* como tasa de rentabilidad. Interpretada como aproximación a una tasa de descuento, con las importantes salvedades respecto a la hipótesis que entrañe en cuanto a la interpretación del ambiente financiero, invertiría su significación en el mismo sentido que recogimos en el párrafo anterior.

(*) Vid., nota a pié de página anterior.

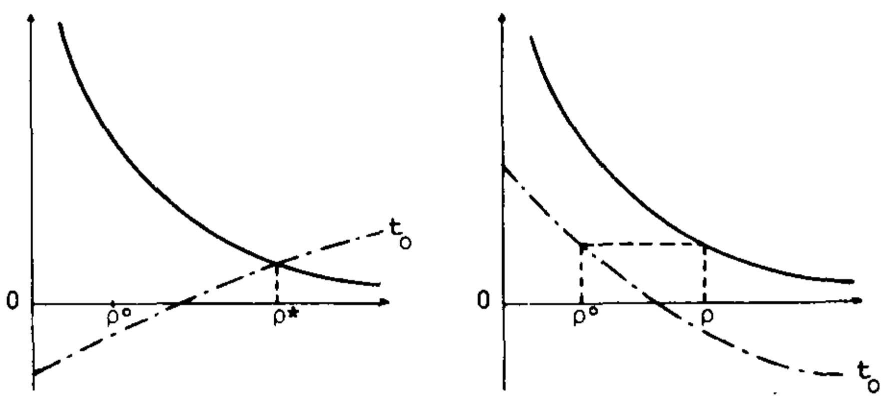
Excluidas las soluciones en los cuadrantes segundo, tercero y cuarto, ya sólo nos falta por considerar las del primer cuadrante, es decir, las de T.I.R. y P.F.M. positivos. La hipótesis que implica la T.I.R.,

$$\rho^\circ = \rho^* > 0$$

sólo permite que puedan ser consideradas como una *aproximación* a la tasa financiera de rentabilidad, tanto más perfecta cuanto más cercana sea ρ^* de ρ°. De otro modo, cuanto mayor sea la *marginalidad* de la operación inversora, en el sentido de rentabilidad neta nula. Aquí, no obstante, la T.I.R. mantiene un valor *indiciario* en cuanto que su signo coincide con el de la rentabilidad neta de la inversión. Nada podemos asegurar, en cambio, en cuanto a la ordenación entre la T.I.R. y la T.F.R., que dependerá fundamentalmente del carácter creciente o decreciente de la función $t_0(\rho)$ en el intervalo (ρ°, ρ^*),



Podría existir, por otra parte, solución para la T.I.R. y no para la T.F.M., y viceversa como puede apreciarse en las siguientes figuras,



Las consideraciones expuestas justifican las profundas reservas que acompañan a la *tasa interna de rentabilidad* como instrumento de análisis de la inversión, como operación aislada, con evidente superación conceptual y técnica por la que hemos denominado *tasa financiera de rentabilidad.*

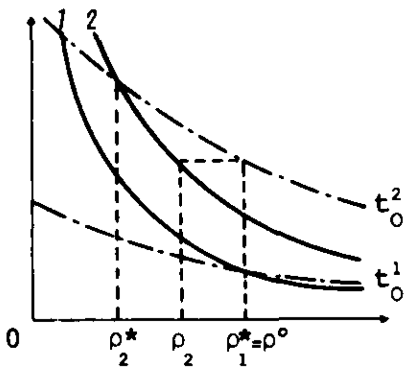
B) Distorsiones en la descripción comparada

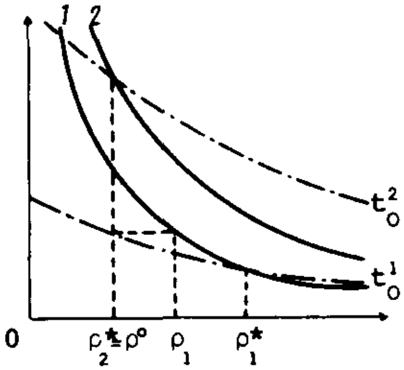
Sean, ahora, dos inversiones que pretendemos comparar atendiendo solamente al nivel de su rentabilidad (*). Si, para ello, nos servimos de sus respectivas T.I.R., incurrimos indefectiblemente en la siguiente grave incorrección: *estamos asumiendo simultáneamente dos hipótesis diferentes respecto al común ambiente financiero.* En efecto, supuesto que las inversiones 1 y 2 tienen las T.I.R. ρ_1^* y ρ_2^*, respectivamente, las hipótesis simultáneamente admitidas son,

$$\rho^\circ = \rho_1^*; \quad \rho^\circ = \rho_2^*$$

que producen la inevitable distorsión en la contrastación de las tasas obtenidas, bajo diferentes supuestos.

En las figuras siguientes se representan los valores que corresponderían a ρ_2, para el caso de que la hipótesis única fuese $\rho^\circ = \rho_1^*$, y a ρ_1, si la única hipótesis fuese $\rho^\circ = \rho_2^*$, respectivamente,





(*) Nosotros entendemos que un criterio de decisión para la inversión, de naturaleza financiera, no debiera basarse sólo en el valor de la tasa de rentabilidad, sino que deberían considerar también el volumen de la inmovilización financiera, medida por su cuantia y plazo de inversión.

En cada caso, la diferencia comparativa de rentabilidades,

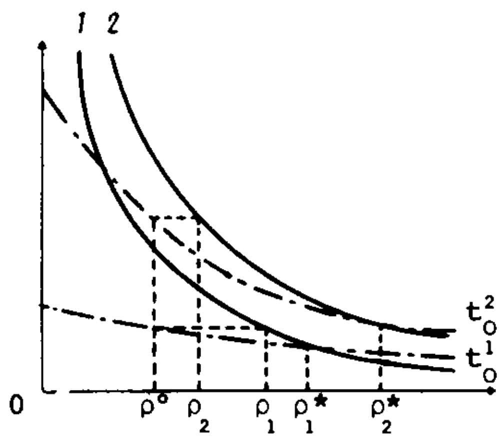
$$\rho_1^* - \rho_2^*$$

distorsiona la correcta,

$$\begin{aligned} &\rho_1^* - \rho_2; \quad \text{para} \quad \rho^\circ = \rho_1^* \\ &\rho_1 - \rho_2^*; \quad \text{para} \quad \rho^\circ = \rho_2^* \end{aligned}$$

si bien no modifica el sentido de la decisión.

Ello puede suceder para otro ρ°, no coincidente con ρ_1^* ni con ρ_2^*, debido a que nada asegura signo común para las diferencias, $\rho_1^* - \rho_2^*$ y $\rho_1 - \rho_2$. En efecto, observamos la siguiente contrastación gráfica entre las inversiones 1 y 2,



donde puede deducirse la preferencia por la inversión 2, si atendemos a las respectivas T.I.R., ya que es $\rho_2^* > \rho_1^*$, teniendo preferencia la 1, si nos situamos en el ambiente financiero definido por ρ°, pues es $\rho_1 > \rho_2$.

Volvemos así a constatar la insuficiencia técnica de la T.I.R., ahora para la comparación financiera entre diversas inversiones, donde la T.F.R. resulta mucho más precisa.

Un índice de rentabilidad

A lo largo de la exposición venimos mostrando cómo una tasa de rentabilidad no adquiere un significado preciso si no es complementada con el P.F.M. de la inversión a la que se refiere. Tampoco, si no es contrastada con la tasa del dinero en la coyuntura inversora (*). Sin pretender rebasar el contenido y la finalidad del presente trabajo, nos parece oportuno referirnos, siquiera sea muy brevemente, al siguiente *índice de rentabilidad inversora*, que hemos construido sobre los tres parámetros citados,

$$\delta = t_0(\rho - \rho^\circ) = t_0 \cdot \rho_r$$

cuya naturaleza, como magnitud financiera, es la de un *tanto efectivo* de rentabilidad, al configurarse como producto de un *tanto nominal* por el plazo de la operación, con el significado pues de un tanto efectivo de rentabilidad neta (**). De este modo, muestra un sentido netamente económico midiendo el resultado de la inversión, por unidad monetaria, y distinguiendo el beneficio de la pérdida con su signo, incluso en las operaciones de inversión degeneradas.

El *índice* tiene las propiedades siguientes:

1.ª Es $\delta = 0$ para $\rho = \rho^\circ$, o bien, para $t_0 = 0$, esto es, para inversiones que carecen de rentabilidad neta.

2.ª En operaciones de inversión *no degeneradas* el signo del índice coincide con el de la *tasa del inversor*. En operaciones *degeneradas*, considerada la negatividad del P.F.M., invierte el signo como corresponde a su significado.

3.ª El índice reacciona creciente o decreciente, en el mismo sentido que la T.F.R. y el P.F.M., acorde con su interpretación de medida de la rentabilidad efectiva.

4.ª Recoge una *relación de sustitución*, financieramente probada, entre los dos parámetros de la inversión, T.F.R. y P.F.M. No obstante, para una misma rentabilidad bruta, selecciona la de mayor tasa e inferior plazo, lo cual se deduce de su expresión,

$$\delta = k - \rho_r \cdot t_0$$

5.ª El índice es *adimensional*, con la inmediata consecuencia de *invariancia* ante el cambio de unidades de medida, tanto de la cuantía monetaria, como del tiempo o plazo de la inversión.

6.ª La *indiferencia* del índice, en la selección de dos inversiones, se resuelve muy sencillamente mediante el criterio subsidiario de la más alta T.F.R.

(*) Una elevada tasa de rentabilidad, aplicable a una operación de plazo reducidísimo, pierde significación efectiva frente a otra menor muy duradera. Por otra parte, el signo del P.F.M. determina el sentido beneficio-pérdida de la tasa, como hemos visto.

(**) Vid. Matemática de la Financiación. Cap. 7. Alfonso Rodríguez. Edic. Univ. Barcelona, 1974.

Todo ello otorga a este índice de rentabilidad, a nuestro juicio, una eficacia descriptiva de la inversión muy superior a la de cualquier tasa de rentabilidad, con la cual se complementa. Su representación gráfica, en *curvas de nivel*, superpuesta a la ya conocida de los parámetros de la inversión, es