DETERMINACIÓN DE LOS TANTOS BRUTOS DE MORTALIDAD

Juan Escuder Bueno[1], Roberto Escuder Vallés[1], Jose Manuel Pavía Miralles[1] y Montserrat Guillén Estany[2]

ABSTRACT

The aim of this work is to clarify a real problem that emerges, in both general and selected populations (e.g., assured populations), when building a life table: to obtain crude mortality rates. Indeed, hardly ever a graduation technique (even the most sophisticated ones) could be able to build suitable life tables when either raw or non-accurately adjusted data are used. After exposing a briefly historical analysis, the paper studies the empirical features of the current Spanish application of the census method in depth and exposes the need of going further to the use of procedures based on an exact calculation of exposed to risk. In particular, we study some of its inferential properties and propose rules to deal with it.

KEY WORDS. Exposed to risk, deaths, crude mortality rates, adjusted mortality rates, life tables, general life table, selected life tables.

RESUMEN

En este trabajo pretendemos aclarar un problema real que se presenta en la construcción de cualquier tabla de mortalidad, sea para poblaciones genéricas o específicas (p.ej., colectivos de asegurados): el cálculo u obtención de los tantos brutos de mortalidad. En efecto, si los datos brutos o no ajustados no son adecuados, por muy sofisticados que sean los métodos de graduación, difícilmente las tablas construidas a partir de ellos lo serán. Para ello, se realiza un pequeño bosquejo histórico y se profundiza en los aspectos empíricos del método actual del censo en su aplicación al caso español, y se propone la necesidad de avanzar hacia el empleo de métodos basados en el cómputo exacto de los expuestos al riesgo. Se estudian algunas de sus propiedades inferenciales, y se proponen pautas de actuación.

[1] Departamento de Economía Aplicada, Universidad de Valencia.
[2] RFA-IREA; Universidad de Barcelona.
Dirección de correspondencia: Roberto Escuder Vallés, Departamento de Economía Aplicada, Universidad de Valencia, Av. Los Naranjos, s/n, 46120-Valencia. e-mail: Roberto.Escuder@uv.es

PALABRAS CLAVE. Expuestos al riesgo, fallecidos, tantos brutos de mortalidad, tantos ajustados de mortalidad, tablas de mortalidad , tablas de colectivos generales, tablas de colectivos específicos.

1.- INTRODUCCION.

La construcción de cualquier tabla de mortalidad, general o específica (particularmente de colectivos de asegurados) parte de la experiencia. A lo largo del tiempo distintos procedimientos han sido propuestos para el tratamiento de los datos observados -véase entre otros trabajos los de Forfar et al (1988) , Heligman and Pollard, (1981), y Navarro (1991)-. En este trabajo se analiza como los diversos métodos de recogida de datos han evolucionado a lo largo del tiempo y se abordan los métodos clave propuestos para la obtención de información muestral necesaria para la construcción de cualquier tabla. De hecho, este problema relegado a segundo plano en otras épocas de pensamiento (casi con seguridad de una manera inconsciente debido a que su aproximación se realizaba eminentemente desde el plano teórico) está, sin embargo, recuperando en la actualidad el puesto que merece. La calidad de los datos muestrales influye de manera capital en la validez de las tablas construidas (Escuder y Navarro, 2002; Escuder *et al.*, 2003).

Siguiendo a Insolera (1950), y de una manera genérica, los diferentes métodos de recogida pueden clasificarse en dos grandes grupos: **por generaciones y por contemporáneos.** Los primeros se basan en la observación longitudinal o de una generación desde su nacimiento hasta su extinción; mientras, los segundos utilizan observaciones transversales, es decir, parten de la observación de todos los contemporáneos (supervivientes a cada edad) en un mismo momento del tiempo físico (o momento censal). Cada uno de los métodos exige un tratamiento distinto de la información y, desde distintos enfoques, busca soluciones aceptables al problema propuesto. No obstante, ninguno de ellos está exento de críticas o debilidades.

Los métodos basados en observar un colectivo desde su nacimiento o constitución hasta su extinción, o sustentados en una **generación determinada**, precisan seguir a cada una de las cabezas, personas o individuos del colectivo desde su nacimiento hasta su muerte. Por lo que, desde el punto de vista de su aplicabilidad real, se puede afirmar que son muy poco viables. Si todas las dificultades inherentes a la movilidad de las personas no fueran suficientes, baste comentar que habríamos de esperar entre 100 y 110 años (hasta el fallecimiento del último superviviente) para construir la correspondiente tabla. Por lo que la tabla nacería de facto obsoleta.

Ante la práctica imposibilidad real de seguir un grupo a lo largo de toda su existencia (observación temporal completa), surgieron los criterios basados en los grupos de **contemporáneos,** cuya idea fundamental es partir de los datos proporcionados por una **observación *transversal* de todos los supervivientes existentes en un momento determinado del tiempo físico**. De este modo se resolvía el problema del inaceptable coste temporal y falta de actualidad de las tablas construidas, aunque, sin embargo, al coste de introducir nuevas debilidades. Básicamente, los distintos grupos de contemporáneos en que está basada la tabla de mortalidad pertenecen a diferentes generaciones, por lo que existe un *error* implícito consistente en considerar a todos ellos como pertenecientes a una "misma generación", algo así como una "***generación ficticia"*** formada por aproximadamente algo más de un centenar de **generaciones reales** aportando cada una de ellas los individuos de una edad.

Las dificultades inherentes a la yuxtaposición de individuos de diferentes generaciones pueden soslayarse introduciendo supuestos simplificadores, tales como, los conceptos de población **cerrada y estacionaria.** Una población es **cerrada,** cuando una vez constituido el grupo de recién nacidos $\mathbf{l_0}$, generación o cohorte, no hay nuevos ingresos ni bajas por causas distintas del fallecimiento; concepto que incorpora implícitamente la idea empírica de que a cada individuo se le puede seguir durante todo su ciclo vital. Por otra parte, el concepto de población **estacionaria,** es más teórico, e implica considerar que la mortalidad no evoluciona con el tiempo, es decir, que independientemente del momento físico en que un individuo alcanza la edad $\mathbf{x}$ sus probabilidades de vivir o fallecer no varían. La estacionariedad de las poblaciones es una situación ideal o conceptual operativamente hablando simplificadora aunque imposible de alcanzar en la realidad: toda la evidencia histórica contradice tal supuesto a largo plazo.

En cualquier caso, admitiendo la posibilidad de seleccionar un método adecuado para el cálculo de los tantos brutos de mortalidad o estimaciones de los tantos anuales (netos) de mortalidad. Las probabilidades de supervivencia o muerte se obtendrán a partir de los primeros mediante criterios de ajuste o graduación (ver, por ejemplo, London, 1985; Forfar *et al*., 1988), que someten a diferentes criterios de ajuste estadístico y de contrastes las estimaciones para su validez (Hossak *et al.*, 1999). Posteriormente, y una vez aceptadas, sirven de base para la elaboración o construcción de las correspondientes tablas de mortalidad, en las que en general se parte de un numero ficticio de recién nacidos l_0 (en general un múltiplo de 10, habitualmente l_0 =100.000 ó 1.000.000) y aparecen los valores de las funciones biométricas: $\mathbf{l_x}$, $\mathbf{d_x}$, $\mathbf{p_x}$, $\mathbf{q_x}$ **, y** $\mathbf{e_x}$, para todas las edades x = 0,12,,,…,**w**, con **w** la edad máxima que puede alcanzar un individuo (Ayuso *et al.*, 2001). Se observa, por tanto, que están en el germen de la construcción de cualquier tabla. Por lo que el disponer de censos y estadísticas de movimiento de población adecuadas y su correcto tratamiento se convierte en fundamental (Neill, 1992).

El resto del documento está estructurado como sigue. En la sección segunda se comentan los referentes históricos que propiciaron el actual método del censo. El apartado tercero, por su parte, muestra distintas alternativas de cálculo para las tasas brutas de mortalidad, focalizando la atención en el problema básico de la determinación de los expuestos al riesgo. El apartado cuarto muestra las expresiones para el cómputo exacto de los expuestos al riesgo y presenta otro posible criterio de cálculo para los tantos; mientras, la sección quinta presenta algunas propiedades inferenciales. Por último, el apartado sexto presenta unas breves consideraciones finales.

2.- ANTECEDENTES HISTORICOS

Siguiendo al profesor Intolera (1950) se pueden citar como métodos precursores del actual método del censo los propuestos por Halley (1656-1742), Hermann (1678-1733) y Quetelet (1796-1874), que no eran propiamente actuarios ni incluso demógrafos, sino matemáticos, físicos o astrónomos preocupados por cuestiones demográficas. Todos ellos pretendían eludir las dificultades del método directo por excelencia, aunque no lo lograron realmente.

El método de Halley, (astrónomo que publicó su primera tabla de mortalidad en 1693 a partir de observaciones sobre defunciones en la ciudad de Breslau) o método de los fallecimientos, es muy simple. En esencia, consiste en observar los fallecidos a cada edad: $\mathbf{d_0, d_1, \ldots, d_x, \ldots d_w}$, durante uno o varios años (entre 4 ó 5 años) promediándolos (para eliminar fluctuaciones debida a condiciones externas, p.ej., meteorológicas), para posteriormente hallar los supervivientes a cada edad mediante las sumas de fallecidos correspondientes, y por cociente las tasas o tantos brutos. El error implícito en este método elemental es el obtener los supervivientes sumando fallecidos de distintas generaciones, lo cual sólo puede admitirse bajo el supuesto de estacionariedad.

Hermann, por su parte, introdujo en el cálculo del denominador de los tantos brutos de mortalidad listados de nacidos (en vez de fallecidos). Sin embargo, en este caso aparece el problema de rastrearlos a lo largo del tiempo físico, pues para el cálculo de cada uno de los tantos de mortalidad brutos se requieren los listados de nacimientos de todos los años precedentes necesarios. Además en el cómputo de los denominadores dada la expresión encadenada que resulta, pueden introducirse errores acumulados de los diferentes años. No obstante, este criterio ha sido usado para obtener los tantos brutos de mortalidad, correspondientes a las edades infantiles (pues no se requieren muchos años precedentes).

Finalmente el método de Quetelet elimina la dificultad de tener que recurrir a una lista de nacimientos de los años precedentes necesarios (hoy se trataría de 100 o más), sustituyendo a los nacidos en sucesivos períodos, por supervivientes clasificados por edades observados en un momento del tiempo físico; esto es, incorpora ya la idea de un ***método censal o por contemporáneos***. En definitiva compara fallecidos con supervivientes.

Realmente, el método de Quetelet puede ser considerado como el antecedente del método actual del censo aunque, no obstante, contiene todavía errores implícitos; entre ellos: (a) considerar a los supervivientes a cada edad **x** y momento ***t***, $\mathbf{P^{(t)}(x)}$ o supervivientes contemporáneos con edad cumplida **x** y sin cumplir **(x+1)**, como denominador de los tantos brutos. Ello es como si se tratara del valor empírico de la función biométrica $\mathbf{l_x}$, o supervivientes que alcanzan la edad **x** procedentes del grupo inicial l_0, que son dos conceptos distintos; y (b) obtener los fallecidos por diferencia entre los propios stocks $\mathbf{P^{(t)}(x)}$ para cada dos edades contiguas $\mathbf{P^{(t)}(x) - P^{(t)}(x+1)}$ lo cual sólo tiene sentido en caso de población cerrada.

Conviene, sin embargo, resaltar que salvo las deficiencias indicadas, podemos considerar al método de Quetelet como el referente inmediato del actual método del censo, y que propició la necesidad de elaborar censos y estadísticas de movimientos naturales de población correctas.

3.- MÉTODO DEL CENSO: DIFERENTES CRITERIOS. PROBLEMÁTICA ESPECÍFICA QUE PLANTEAN.

El método del censo se basa en la Teoría Formal de la Población y al menos inicialmente su interpretación se facilita muchísimo mediante el esquema de Lexis. No obstante, en concreto, en el presente documento van a ser consideradas tres variantes o enfoques del mismo.

3.1- Criterios clásico, o criterio I.

La primera variante del método general del censo que vamos a considerar es el método seguido por el Instituto Nacional de Estadística de España (INE), que se basa en los datos por edades ***de un sólo censo y de las estadísticas de los Movimientos Naturales de la Población del año siguiente y del anterior al censo***. En los cálculos se presupone: (i) la no existencia de movimientos migratorios, o bien que se compensan para cada edad las inmigraciones con las emigraciones, y (ii) la uniformidad de los fallecimientos para edades iguales y superiores a uno, atribuyéndose durante el primer año de vida más intensidad de fallecimiento al principio. Este criterio podría ser calificarlo como algebraico o geométrico.

Inicialmente este criterio estuvo pensado para que los censos coincidieran con las cero horas del primer día de cualquier año, y los tantos brutos de mortalidad se obtenían por cociente para cada edad **x**, entre los fallecidos de cada generación, y los que superviven a cada edad. Esta situación es la que correspondió a los censos españoles fechados a 31 de diciembre (o bien 1 de enero) como ocurrió en España hasta el censo de 1970. Posteriormente hubo que introducir modificaciones ya que los censos dejaron de estar referidos a dichas fechas.

A) Cuando los censos corresponden a 31 de diciembre o 1 de enero (en España lo fueron los Censos de los años acabados en cero hasta 1970 inclusive), se puede obtener una estimación de los tantos brutos de mortalidad de una forma casi mecánica. En concreto, se denota por $\mathbf{P_x^{31/12/t}}$, o, $\mathbf{P_x^{01/1/t+1}}$ a los supervivientes a cada edad x en la fecha referenciada dada por el Censo; por $\mathbf{d_x^{(t)}}$ y $\mathbf{d_x^{(t+1)}}$, a los fallecidos a cada edad **x**, del año anterior y siguiente a la fecha del Censo, obtenidas de los correspondientes Movimientos Naturales de Población; y por $\mathbf{q^{(b)}{}_x}$ a los correspondientes tantos brutos de mortalidad. Dado que para esta fecha censal los datos por edades coinciden con los datos por generaciones, se puede decir que:

$$\mathbf{C_x^{31/12/t} \equiv C_x^{1/1/t+1} \equiv \quad P_x^{01/01/t+1} \equiv P_x^{31/12/t} \equiv P_{g(t-x)}^{31/12/t} \equiv P_{g(t-x)}^{01/01/t+1}},$$

donde $\mathbf{C_x^{31/12/t}}$ y $\mathbf{C_x^{1/1/t+1}}$ representan los censos a 31 de diciembre del año **t** o a uno de enero del año **t+1** con edad **x** y $\mathbf{P_{g(t-x)}^{31/12/t}}$ y $\mathbf{P_{g(t-x)}^{01/01/t+1}}$ corresponden con las tamaños poblaciones con edad **x** a 31 de diciembre del año **t** o a 1 de enero del año **t+1** de la generación nacida en el año **t-x**.

Con lo que bajo hipótesis de uniformidad de los fallecimientos a lo largo de cada año, los siguientes algoritmos proveerían las tasas brutas.

A.1) - Si los datos están referidos a edades cumplidas, el algoritmo sería:

$$q^{(b)}{}_x = \frac{0,5*\left[d_x^{(t)} + d_x^{(t+1)}\right]}{P_x^{(31/12/t)} + 0,5d_x^{(t)}}$$ para $\mathbf{x} = 1,2,\ldots,\mathbf{w}$; y

$$q^{(b)}{}_x = \frac{0,7d_x^{(t)} + 0,3d_x^{(t+1)}}{P_x^{(31/12/t)} + 0,7d_x^{(t)}}$$ para $\mathbf{x} = 0$,

La corrección para la edad cero es debida a que se considera que durante el primer año de vida hay mayor propensión al fallecimiento durante los primeros meses de vida. También en caso de disponer además de datos por generaciones, para las edades cero y uno, puede hacerse el correspondiente cálculo mediante generaciones (véase el apartado **A.2.**). No obstante, en algunos trabajos se ha utilizado las defunciones de dos años anteriores y dos siguientes, considerando como defunciones definitivas las obtenidas para cada edad por el promedio correspondiente.

A.2) Si los datos estuviesen dados por generaciones, teniendo en cuenta lo ya dicho en cuanto a la igualdad de los *stocks* de supervivientes por edades y por generaciones, por coincidir la fecha censal con el principio o final del año (esto es, $P_{g(t-x)}^{01/01/t+1} = P_x^{01/01/t+1}$) se tendría[2]:

$$q_x^{(b)} = \frac{{}_{g(t-x)}D_x}{l_{x,t}} = \frac{{}_{g(t-x)}D_{x,t} + {}_{g(t+1-1-x)}D_{x,t+1}}{l_{x,t}} = \frac{{}_{g(t-x)}D_{x,t} + {}_{g(t-x)}D_{x,t+1}}{P_{g(t-x)}^{01/01/t+1} + {}_{t-x}D_{x,t}},$$

para $\mathbf{x} = 0, 1,2,\ldots,\mathbf{w}$,

donde ${}_{g(t-x)}\mathbf{D}_{x,t}$ representa los fallecidos con edad **x** en el año **t** de la generación de nacidos en el año **t-x**.

B) Cuando los censos, como ocurrió en España a partir del de 1980, dejaron de coincidir con el 31 de diciembre de los años acabado en cero, la idea

[2] La publicación del INE de las Tablas de Mortalidad de la Población Española 1996-1997 (INE, 2000), sugiere para el caso **A.1** aplicar esta expresión por generaciones para las edades 0 y 1, en sustitución de la expresión dada que consideraba coeficientes 0,7 y 0,3 para la edad cero.

subyacente fue, mediante algún criterio, intentar desplazar los *stocks* censales al 1 de enero más próximo o bien al 1 de enero del año en que se tengan Movimientos Naturales de Población más recientes. Por supuesto, la hipótesis de no existencia (o que se compensan) de movimientos migratorios continúo aceptándose, pues en otro caso necesitaríamos estadísticas diarias o al menos mensuales de movimientos naturales de población para poder calcular los correspondientes desplazamientos. Asimismo, dado que no existen a nivel de población general, hay que recurrir de nuevo a más supuestos como el de uniformidad y proporcionalidad de los nacimientos y defunciones, ya que también es difícil conseguir estadísticas de los Movimientos Naturales de Población de los períodos un año anterior y posterior exacto respecto a la fecha del censo.

Actualmente los censos se refieren a las cero horas del primer día, de un mes concreto, que denotaremos por (m+1), de un año concreto (en España los últimos tres censos se han realizado con referencia al 01/03/1981; 01/03/1991 y 01/11/2001). En estos casos se puede presuponer que en cada mes se producen la 12ª parte de las defunciones del año, y que los saldos migratorios más o menos se compensan. En ese caso, podemos proceder a estimar (mediante las correcciones o desplazamientos temporales necesarios) los valores censales al principio o al final del año censal, según los años disponibles de Estadísticas de Movimientos Naturales de Población disponibles. Por lo tanto, si la fecha censal fuese 01/m+1/t+1, y dispusiéramos de las estadísticas de los movimientos naturales de población de los años t y (t+1) deberíamos calcular: $\mathbf{P}_x^{31/12/t} \equiv \mathbf{P}_x^{1/1/t+1} \equiv \mathbf{P}_{g(t-x)}^{01/m+1/t+1} + \mathbf{f}^{m+1/t+1}$, donde $\mathbf{f}^{m+1/t+1}$ correspondería con los fallecidos durante los m primeros meses del año (t+1), por lo que se podría proceder entre otros mediante el siguiente procedimiento geométrico-proporcional:

B.1) Si los datos están dados por edades:

$$\mathbf{P}_x^{01/01/t+1} = \frac{12-m}{12}\mathbf{C}_x^{01/m+1/t+1} + \frac{m}{12}\mathbf{C}_{x+1}^{01/m+1/t+1} + \frac{\dfrac{[12+(12-m)]\,m}{2}}{144}\mathbf{D}_{x,(t+1)} + \frac{\dfrac{m \cdot m}{2}}{144}\mathbf{D}_{x+1,(t+1)} =$$

$$\approx \; + \frac{12-m}{12}\mathbf{C}_x^{01/m+1/t+1} + \frac{m}{12}\mathbf{C}_{x+1}^{01/m+1/t+1} + \frac{(24-m)m}{288}\mathbf{D}_{x,(t+1)} + \frac{m^2}{288}\mathbf{D}_{x+1,(t+1)}$$

Por lo que estimados para todas las edades los valores de $\mathbf{P}_x^{01/01/t+1}$ se podría aplicar el criterio clásico para obtener los tantos brutos de mortalidad:

$$q_x^{(b)} = \frac{0,5(d_x^{(t)} + d_x^{(t+1)})}{P_x^{01/01/t+1} + 0,5d_x^{(t)}} \text{ para } \mathbf{x} = 1,2,\ldots,\mathbf{w};$$

Existe una salvedad en cuanto a las expresiones de los desplazamientos indicados para la edad **x** = 0, pues para estimar dichos *stocks* de población se debería proceder restando a los nacimientos del año inmediato anterior los fallecidos durante dicho año de dicha generación.

B.2) Por otro lado, si los datos estuvieran dados por generaciones, ligeras correcciones serían necesarias, resultando:

$$P_x^{01/01/t+1} = P_{g(t-x)}^{01/m+1/t+1} + \frac{12m}{144}\, {}_{g(t-x)}D_{(t+1)} = P_{g(t-x)}^{01/m+1/t+1} + \frac{12m}{144}\left({}_{t-x}D_{x,t+1} + {}_{t-x}D_{x,t}\right)$$

y por lo tanto:

$$q_x^{(b)} = \frac{{}_{t-x}D_x}{l_{x,g(t-x)}} = \frac{{}_{t-x}D_{x,t} + {}_{t-x}D_{x,t+1}}{P_{g(t-x)}^{01/01/t+1} + {}_{t-x}D_{x,t}} \approx \frac{{}_{t-x}D_{x,t} + {}_{t-x}D_{x,t+1}}{P_{g(t-x)}^{01/m+1/t+1} + \frac{12m}{144}\left({}_{t-x}D_{t+1} \quad + {}_{t-x}D_{x,t}\right)}$$

Como se puede observar el problema fundamental es el cómputo exacto del denominador de los tantos brutos de mortalidad, pues si se obviase el supuesto de estacionariedad, y más aún si se introdujesen movimientos migratorios, aparecerían serios problemas de cómputo. Dichos denominadores son bastante más complejos que el mero cómputo de líneas de vida en el esquema de Lexis que verifiquen unas restricciones, y que a partir de ahora se definirán como ***expuestos al riesgo de muerte,*** $\mathbf{E_x}$, ***que generen a los correspondientes fallecidos o numeradores.*** Es decir, $\mathbf{E_x}$ representa a los supervivientes, que estando expuestos al riesgo de muerte, hayan generado dichos fallecimiento.

3.2.- Fundamentación del cálculo de E_x. Criterio II.

En este criterio hacemos especial hincapié en la fundamentación estadístico-matemática del cálculo de la exposición al riesgo. Para ello se parte del supuesto que $\mathbf{P_x(t)}$ —la población con edad **x**, de un colectivo (nación, comunidad, o región) en el momento **t**— constituye un proceso estocástico que podría ser conocido mediante observaciones muestrales para todo valor de **x** y de **t**, del cual, además, se podría derivar un nuevo criterio de cálculo, que podríamos denominar criterio II.

De acuerdo con la definición de $\mathbf{P_x(t)}$, si el momento o fecha **t** coincidiese con el instante de un censo, se tendría que la función $\mathbf{P_x(t)}$ coincidirá con los *stocks* de población para cada edad **x**, proporcionada por el propio censo. Por lo que, al menos teóricamente, las funciones estocásticas representadas por $\mathbf{P_x(t)}$ se podrían interpretar como una secuencia de censos, lo que supondría admitir, en el plano teórico que los censos se puedan elaborar en cualquier momento **t** del tiempo físico o de calendario y para cualquier edad **x**.

Evidentemente, dada una edad **x** constante, al variar **t** $\mathbf{P_x(t)}$ será variable, ya que recibirá continuamente nuevas incorporaciones (por nacimientos o nuevas incorporaciones) y bajas (por defunciones u otras causas). Pudiéndose representar, por tanto, para cada edad **x**, una gráfica de $\mathbf{P_x(t)}$ que presentará un movimiento oscilante con una tendencia ascendente o descendente según las pautas de la población, similar a la gráfica que se puede observar en la Figura 1. De suerte que si consideramos períodos arbitrariamente pequeños o infinitesimales, por ejemplo [**t,t+dt**], cada uno de los individuos del colectivo $\mathbf{P_x(t)}$ contribuirá al riesgo en la cantidad infinitesimal **dt**. Por lo que todos ellos en conjunto, salvo infinitésimos de orden superior, estarán sometidos al riesgo de muerte (o contribuirán a la población de riesgo) desde el instante **t** al **t+dt** en la cantidad: $\mathbf{P_x(t)\ dt}$.

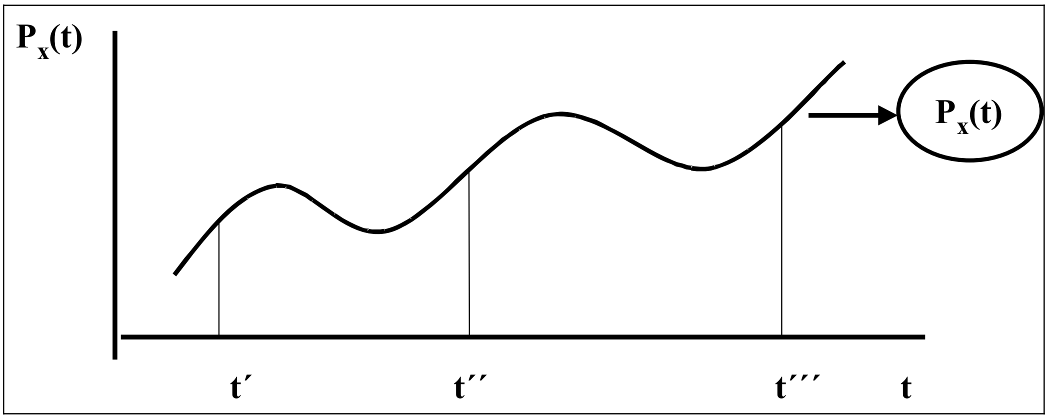

Figura 1. Ejemplo de comportamiento de la función $\mathbf{P_x(t)}$.

De manera que, durante un periodo cualquiera, pongamos entre dos observaciones (censales) anuales hechas al inicio y al final de un mismo año, (por ejemplo, entre **t´** y **t´+1**), la contribución central al riesgo será la suma de sus contribuciones en cada infinitésimo de tiempo, de modo que se tendría que:

$$E_x^c(t',t'+1) = \int_{t`}^{t'+1} P_x(t)dt\,,$$

donde $\mathbf{E_x^c(t',t'+n)}$ representa los expuestos al riesgo centrales entre **t'** y **t'+n** para cada edad **x**. Expresión que, si no se dispone de la forma analítica de $\mathbf{P_x(t)}$ para todo t (como ocurre en la realidad), sólo se puede calcular en la práctica numéricamente o con fórmulas aproximadas. En particular, utilizando, por ejemplo, la regla de Simpson o de los trapecios si se supone que se dispone de dos informaciones censales en fechas **t´** y **t´+1**, se tendría que:

$$\int_{t'}^{t'+1} \mathbf{P_x(t)\,dt} \approx \frac{\mathbf{P_x(t') + P_x(t'+1)}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{1} = \frac{\mathbf{P_x(t') + P_x(t'+1)}}{\mathbf{2}}$$

Mientras que aplicando dicha regla reiterativamente, se verificaría en el caso de tres observaciones anuales que:

$$\int_{t'}^{t'+2} \mathbf{P_x(t)\,dt} = \int_{t'}^{t'+1} \mathbf{P_x(t)\,dt} + \int_{t'+1}^{t'+2} \mathbf{P_x(t)\,dt} \approx$$

$$\approx \frac{\mathbf{P_x(t') + P_x(t'+1)}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{1} + \frac{\mathbf{P_x(t'+1) + P_x(t'+2)}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{1} =$$

$$= \frac{\mathbf{P_x(t') + 2P_x(t') + P_x(t'+2)}}{\mathbf{2}} =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{P_x(t') + P_x(t'+1)} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{P_x(t'+2)}$$

y, para el caso general de **n** observaciones anuales disponibles (siendo, por ejemplo **t´** la primera y **t´+n**, la última) resultaría la siguiente expresión aproximada:

$$\int_{t'}^{t'+n} P_x(t)\,dt = \int_{t'}^{t'+1} P_x(t)\,dt + \int_{t'+1}^{t'+2} P_x(t)\,dt + ... + \int_{t'+n-1}^{t'+n} P_x(t)\,dt \approx$$

$$\approx \frac{P_x(t') + P_x(t'+1)}{2}\cdot 1 + \frac{P_x(t'+1) + P_x(t'+2)}{2}\cdot 1 + ... + \frac{P_x(t'+n-1) + P_x(t'+n)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}P_x(t') + \left[P_x(t'+1) + P_x(t'+2) + ...P_x(t'+n-1)\right] + \frac{1}{2}P_x(t'+n)$$

Análogamente, los mismos razonamientos se pueden extender a datos referidos a otros períodos de tiempo. De forma que como lo más común es disponer de observaciones anuales, o al menos existe la posibilidad de obtenerlas de forma aproximada, se puede decir que según este criterio, una expresión general a utilizar para el cálculo aproximado de $E_x^c(t', t'+n)$ será:

$$E_x^c(t', t'+n) = \int_{t'}^{t'+n} P_x(t)\,dt = \frac{1}{2}P_x(t') + P_x(t'+1) + ... + P_x(t'+n-1) + \frac{1}{2}P_x(t'+n)$$

Nótese, no obstante, que la expresión anterior para $E_x^c(t', t'+n)$ no tiene porqué ser siempre así, sino que depende de la información disponible. Por ejemplo, si los datos censales no estuvieran referidos al final o al principio de cada año sino a la mitad de cada año (es decir, a 30 de junio o a 1 de julio), la expresión aproximada anterior podría ser:

$$E_x^c(t', t'+n) = \int_{t'}^{t'+n} P_x(t)dt = P_x(t'+\frac{1}{2}).1 + P_x(t'+1+\frac{1}{2}).1 + ... + P_x(t'+n-\frac{1}{2}).1 =$$

$$= P_x(t'+\frac{1}{2}) + P_x(t'+1+\frac{1}{2}) + ... + P_x(t'+n-\frac{1}{2})$$

donde el criterio de aproximación podría justificarse por las sumas de las áreas de los cuadrados de base la unidad y de altura la ordenada en el punto medio, en que puede descomponerse el recinto de integración.

Finalmente, denotando con θ_{x+r} a los fallecidos durante el periodo de estudio con edad exacta **x+r**, se tendría que la diferencia entre E_x^c y E_x

radicaría en $\sum(1-\mathbf{r})\theta_{x+r}$ (ver detalles en el apartado cuarto). Por lo que, suponiendo que el período de investigación es (**t'**,**n**) y admitiendo distribución uniforme de los fallecimientos, la expresión $\sum(1-\mathbf{r})\theta_{x+r}$ se podría aproximar mediante $0.5\theta_x(\mathbf{t'},\mathbf{t'}+\mathbf{n})$, de suerte que una nueva expresión aproximada para el cálculo de los tantos brutos de mortalidad, o criterio II, podría obtenerse de acuerdo con la ecuación:

$$\mathbf{q}_x^{(b)} = \frac{\theta_x}{\mathbf{E}_x} = \frac{\theta_x}{\mathbf{E}_x(\mathbf{t}',\mathbf{t}'+\mathbf{n})} = \frac{\theta_x}{\mathbf{E}_x^c(\mathbf{t}',\mathbf{t}'+\mathbf{n}) + \sum_r (1-\mathbf{r})\mathbf{b}_{x+r}} = \frac{\theta_x}{\mathbf{E}_x^c(\mathbf{t}',\mathbf{t}'+\mathbf{n}) + 0{,}5\,\theta_x(\mathbf{t}',\mathbf{t}'+\mathbf{n})}$$

donde θ_x representa los fallecidos del período con edad entre **x** y **x+1**.

Llegado a este punto, si a fin de realizar comparaciones con los casos anteriores, se considerase el caso particular de un período de observación o de investigación de dos años, se precisaría de los ***fallecidos a cada edad durante dichos dos años***, ***y tres experiencias censales anuale***s. Con lo que este nuevo criterio conduciría a la siguiente expresión de cálculo:

$$\mathbf{q}_x^b = \hat{\mathbf{q}}_x = \frac{\theta_x}{\mathbf{E}_x} = \frac{\theta_x}{\frac{1}{2}\mathbf{P}_x(\mathbf{t}) + \mathbf{P}_x(\mathbf{t}+1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}_x(\mathbf{t}+2) + 0{,}5\,\theta_x} =$$

$$= \frac{\theta_{x,t} + \theta_{x,t+1}}{\frac{1}{2}\mathbf{P}_x(\mathbf{t}) + \mathbf{P}_x(\mathbf{t}+1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}_x(\mathbf{t}+2) + 0{,}5\,(\theta_{x,t} + \theta_{x,t+1})}$$

siendo el numerador θ_x, el correspondiente a los fallecidos durante los dos años, **t** y, **t+1** de la investigación, y el denominador la expresión aproximada de los expuestos potenciales al riesgo según este criterio.

4.- COMPUTO EXACTO DE E_X. CRITERIO III.

En el apartado anterior ha quedado patente que en la correcta determinación de los expuestos al riesgo radica en gran medida la precisión de la estimación. En este apartado se propone un procedimiento, que profundizando en el concepto de exposición al riesgo, pretende servir de guía o referencia para un cálculo más ajustado de los expuestos al riesgo y por extensión de los tantos de mortalidad y lo denominaremos ***criterio III o*** método de cómputo exacto. Es el método que utilizaban y utilizan las compañías de seguros para elaborar sus tablas (Benjamin y Pollard, 1986), aunque en el trabajo actual se intentará aplicar a la construcción de tablas generales de mortalidad, considerando poblaciones abiertas, por lo tanto dando cabida a los movimientos migratorios (altas y bajas en general, y por lo tanto salidas por causas distintas de la muerte).

Comencemos prefijando el período de investigación $\mathbf{(t_0,T)}$ que, aunque no es necesario, por simplicidad conviene que comience un 1 de enero de determinado año y concluya un 31 de diciembre, y que el período abarque al menos dos años (como es el período requerido por el método clásico, estudiado en el subepígrafe anterior) sin que sea superior a cuatro o cinco, dado el dinamismo y los cambios de pautas de la vida moderna. Asimismo, y puesto que si el período de observación es de dos años se podrán establecer comparaciones directas con el criterio anterior, la exposición que aquí se realice se centrará en un período de $\mathbf{T} = 2$ años.

Recuérdese que la idea subyacente es relacionar por cociente: a los fallecidos del período, que se denotará por θ_x, y a los supervivientes, que estando expuestos al riesgo de muerte, hayan generado dichos fallecimientos, que se denota por $\mathbf{E_x}$. Como seguidamente se pasa a dilucidar, los fallecidos del período θ_x, o numeradores de los tantos brutos de mortalidad, son fáciles de obtener; sin embargo la determinación de los denominadores $\mathbf{E_x}$ es bastante compleja.

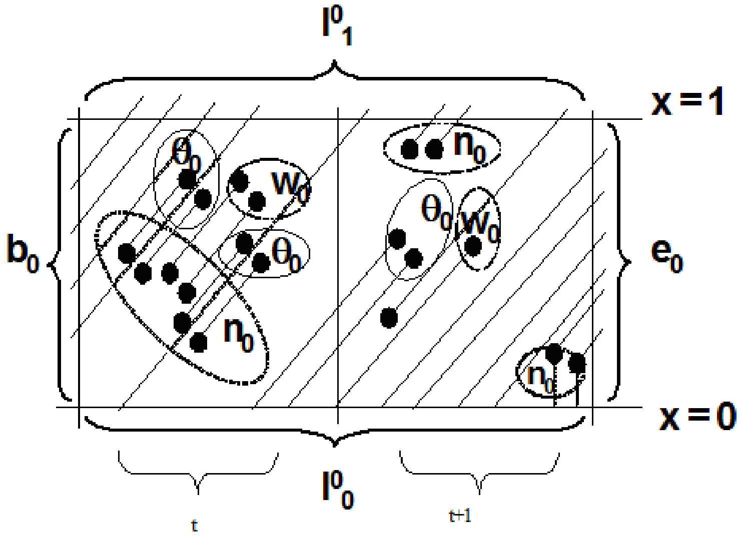

Figura 2. Representación en el esquema de Lexis de los distintos tipos de individuos (edad 0)

Para abordar su cálculo, en primer término se parte de diferenciar los seis subcolectivos que realizan contribución al riesgo en la determinación de $\mathbf{E_x}$. En concreto, para cualquier edad **x,** se puede considerar: (i) el colectivo de personas que cumplen la edad **x** durante el período de investigación, que se notará por $\mathbf{l_x^0}$; (ii) los existentes en el momento del comienzo del período de investigación, con (cada) edad **x** ya cumplida, a los que se llamarán iniciales (corresponden a los titulares de pólizas en vigor en caso de entidades aseguradoras) o también **beginners** $\mathbf{b_x}$ según la terminología anglosajona; (iii) los que se incorporan durante el período de observación con edad **x** cumplida, o nuevas entradas de edad **x** durante el período de observación, $\mathbf{n_x}$, inmigrantes (o nuevas pólizas en el caso de entidades de seguros) o **news** en la terminología anglosajona; (iv) los que abandonan el colectivo por fallecimiento a la edad **x**, durante el período de observación, o fallecidos θ_x (**deaths** en la terminalogía anglosajona); (v) los que abandonan el colectivo a la edad **x** durante el período de observación por causas diferentes del fallecimiento, $\mathbf{w_x}$ (**withdrawers** en la terminología anglosajona), estos son emigrantes en el caso de población general (y, por rescates y/o finalizaciones de contratos en el caso de población de asegurados); y, (vi) los que en el momento de finalizar la investigación tienen la edad **x** cumplida, $\mathbf{e_x}$ finalistas (o con pólizas en vigor en el momento final de la investigación), **enders**, en la terminología anglosajona). Para facilitar la intrepretación y el significado de los diferentes subcolectivos, las Figuras 2 y 3 permiten visualizar la formación de dichos subcolectivos. En concreto la Figura 2 ofrece los colectivos a considerar en la edad 0 y en la Figura 3 los que aparecen para una edad **x** distinta de cero.

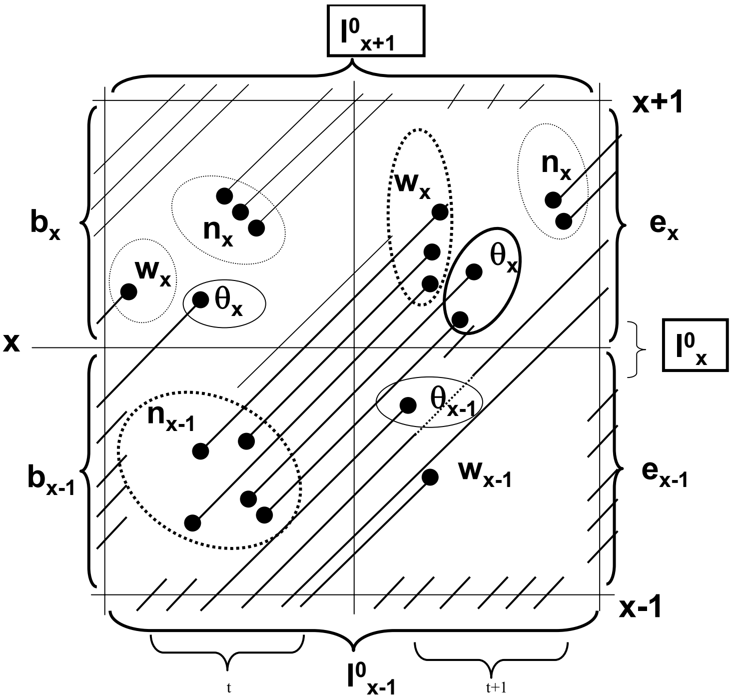

Figura 3. Representación en el esquema de Lexis de los distintos tipos de individuos (edad x≠0)

Evidentemente los $\mathbf{b_x}$ y $\mathbf{e_x}$ para todas las edades $\mathbf{x}$ = 0,1,…,**w**, vienen proporcionados por un censo en el momento inicial y el momento final del período de investigación respectivamente. Luego este criterio requerirá entre otras cosas **dos censos u observaciones completas transversales**: uno en **el momento inicial** del período de investigación u observación , y otro en el **final**. Por otra parte los datos correspondientes a los subcolectivos $\mathbf{n_x}$, θ_x , y $\mathbf{w_x}$ deberían venir dados por las estadísticas de Movimientos Naturales de Población (o bien por las estadísticas diarias de las compañías de seguros). Finalmente los $\mathbf{l_x^0}$, se pueden obtener por las siguientes ecuaciones de recurrencia:

$$\mathbf{l_1^0 = \ l_0^0 + b_0 + n_0 - \theta_0 - w_0 - e_0}$$

$$\mathbf{l}_2^0 = \mathbf{l}_1^0 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{n}_1 - \theta_1 - \mathbf{w}_1 - \mathbf{e}_1 \quad = \mathbf{l}_0^0 + \sum^1 \mathbf{b}_x + \sum^1 \mathbf{n}_x - \sum^1 \mathbf{w}_x - \sum^1 \theta_x - \sum^1 \mathbf{e}_x$$

$$1_3^0 = 1_2^0 + b_2 + n_2 - \theta_2 - w_2 - e_{21} \quad = 1_0^0 + \sum^2 b_x + \sum^2 n_x - \sum^2 w_x - \sum^2 \theta_x - \sum^2 e_x$$

, y

$$\mathbf{l}_x^0 = \mathbf{l}_{x-1}^0 + \mathbf{b}_{x-1} + \mathbf{n}_{x-1} - \theta_{x-1} - \mathbf{w}_{x-1} - \mathbf{e}_{x-1} \quad = \mathbf{l}_0^0 + \sum_0^{x-1} \mathbf{b}_t + \sum_0^{x-1} \mathbf{n}_t - \sum_0^{x-1} \mathbf{w}_t - \sum_0^{x-1} \theta_t - \sum_0^{x-1} \mathbf{e}_t$$

y así sucesivamente hasta $\mathbf{l}_w^0$.

Obsérvese que para cada edad **x**, $\mathbf{1}_x^0$ puede recomponerse o construirse a partir de $\mathbf{1}_0^0$ y de los subcolectivos $\mathbf{b}_x$, $\mathbf{n}_x$, θ_x, $\mathbf{w}_x$, y $\mathbf{e}_x$ de las edades anteriores pero sin incluir la propia edad **x**. Nótese, asimismo, que si se tratara de datos de una compañía de seguros en general no se comenzaría en la edad cero sino en otra posterior, como más adelante será matizado.

Una vez identificados los diversos subcolectivos, hay que proceder al cálculo de su contribución exacta a la exposición al riesgo, lo que en esencia proporcionará $\mathbf{E}_x$, o denominador de los tantos brutos de mortalidad.

En cuanto a la contribución al riesgo de los $\mathbf{1}_x^0$, no es correcto que cada uno de ellos se compute como una unidad, es decir, considerar como si estuviera contribuyendo a la exposición al riesgo de muerte durante (toda) la edad **x**, pues antes de alcanzar la edad **x+1** algunos de ellos fallecerán, otros abandonarán el colectivo por otras causas, y otros podrán llegar al momento final de la investigación sin haber alcanzado la edad **x+1.** Por lo tanto, para incorporar correctamente $\mathbf{1}_x^0$ en el cómputo de $\mathbf{E}_x$, al valor $\mathbf{1}_x^0$ (que sería el resultante de computar cada individuo como una unidad) habrá que restar y también sumar ciertas cantidades como se dilucida a continuación:

Los $\mathbf{b}_x$ y $\mathbf{n}_x$ (de edad **x**) no estarán incluidos en los $\mathbf{1}_x^0$ (constate el lector que en la ecuación de $\mathbf{1}_x^0$, sólo intervienen dichos subcolectivos pero con edades anteriores a **x**), luego habrá que añadirlos por su contribución exacta a la exposición al riesgo, que tampoco será de una unidad por cabeza sino que dependerá de la edad exacta de entrada y/o de salida de cada cabeza en el correspondiente colectivo. Esto es que para cada **r** ,y, **s** tales que 0< **r**, **s** <1, se debería tener en cuenta que cada uno de los principiantes (o beginners), que tuvieran la edad exacta **(x+r)** en el momento del comienzo de la investigación o del período de investigación, que se notará por $\mathbf{b}_{x+r}$ contribuirá a la exposición al riesgo a dicha edad **x**, en la cuantía **(1-r),** en el caso que se mantuviera en dicho subcolectivo durante toda la edad **x**, de lo contrario habría que deducir además alguna cierta parte alícuota.

Por lo tanto $\sum_r (\mathbf{1}-\mathbf{r})\mathbf{b}_{x+r}$ será la expresión del tiempo de exposición real al riesgo por dichos **beginners** con **x** años cumplidos siempre que estuvieran o si se mantuvieran en el colectivo al menos durante toda la edad **x**, esto es mientras no salgan del colectivo por fallecimiento o por otras causas, o lleguen al final de la investigación con **x** años y sin cumplir **(x+1**).

Análogamente la contribución de los **news**, o nuevos entrantes, también dependerá de su edad exacta de incorporación. Si fuese **x+r** su tiempo de exposición real a cada edad **x** vendrá dado por: $\sum_r (\mathbf{1}-\mathbf{r})\mathbf{n}_{x+r}$, siempre que siendo $\mathbf{n}_{x+r}$ el numero de nuevos incorporados durante el período de observación con edad exacta **(x+r)** no salgan del colectivo por fallecimiento o por otras causas o lleguen al final de la investigación con **x** años y sin cumplir **(x+1).**

Por lo que tanto las expresiones $\sum_r (\mathbf{1}-\mathbf{r})\mathbf{b}_{x+r}$ y $\sum_r (\mathbf{1}-\mathbf{r})\mathbf{n}_{x+r}$ se tendrán que añadir a $\mathbf{1}_x^{\mathbf{0}}$ para ir aproximándose al cómputo exacto de la exposición al riesgo a la edad **x**.

Por otra parte, se ha de tener en cuenta a los que abandonan el colectivo a la edad **x** (y sin cumplir la edad **x+1**) por fallecimiento θ_x, por causas diferentes al fallecimiento, esto es los $\mathbf{w}_x$ emigrantes (o por rescates) y también a los que llegan al final del período de investigación con la edad **x** cumplida pero sin alcanzar la **(x+1),** o $\mathbf{e}_x$. Obsérvese que pueden proceder tanto de los que alcanzan la edad **x** en el período de investigación como de los beginners y nuevos entrantes de edad **x**. Por lo que en el calculo de $\mathbf{E}_x$, al cómputo acumulado hasta este momento habrá que restar: $\sum_s (\mathbf{1}-\mathbf{s})\mathbf{w}_{x+s}$, por los retiros o abandonos a la edad **x+s** (esto es antes de cumplir la edad

x+1) por causas diferentes del fallecimiento, y $\sum_s \mathbf{(1-s)e_{x+s}}$ por los finalistas o personas que en el último instante de la investigación tienen la edad **x+s**.

Consecuentemente la expresión:

$$\mathbf{l_z^o + \sum_r (1-r)b_{x+r} + \sum_r (1-r)n_{x+r} - \sum_r (1-s)w_{x+s} - \sum_r (1-s)e_{x+s}}$$

representa al número de cabezas o personas del colectivo de referencia que al inicio de la edad **x** generarían los θ_x fallecimientos a dicha edad. Dicha magnitud se denomina ***exposición inicial al riesgo***, y denotaremos por $\mathbf{E_x}$, esto es:

$$\mathbf{E_x = l_z^o + \sum_r (1-r)b_{x+r} + \sum_r (1-r)n_{x+r} - \sum_r (1-s)w_{x+s} - \sum_r (1-s)e_{x+s}}$$

Por lo tanto los cocientes:

$$\mathbf{q_x^{(b)} = \frac{\theta_x}{E_x} = \frac{\theta_x}{l_z^o + \sum_r (1-r)b_{x+r} + \sum_r (1-r)n_{x+r} - \sum_r (1-s)w_{x+s} - \sum_r (1-s)e_{x+s}}}$$

se consideran como tantos brutos de mortalidad o estimadores de los tantos anuales de mortalidad[3] $\mathbf{q_x}$.

En el caso de disponer de información de compañías de seguros, las magnitudes anteriores pueden ser obtenidas directamente y de ahí derivar $\mathbf{E_x}$

[3] El concepto anterior de exposición inicial al riesgo no debe confundirse con el de exposición central al riesgo $\mathbf{E_x^c}$, definido mediante:

$$E_x^c = l_z^0 + \sum_r (1-r)b_{x+r} + \sum_r (1-r)b_{x+r} + \sum_r (1-r)n_{x+r} - \sum_s (1-s)\theta_{x+s} - \sum_s (1-s)w_{x+s} - \sum_r (1-s)e_{x+s}$$

y correspondería al tiempo de exposición real al riesgo de muerte por las cabezas o personas a la edad **x** del colectivo en cuestión incluidos también los fallecimientos a la edad **x**, en cuyo caso, los cocientes:

$$\mathbf{m}_x^{(b)} = \frac{\theta_x}{\mathbf{E}_x^c} = \frac{\theta_x}{\mathbf{l}_z^0 + \sum_r (1-\mathbf{r})\mathbf{b}_{x+r} + \sum_r (1-\mathbf{r})\mathbf{n}_{x+r} - \sum_s (1-\mathbf{s})\theta_{x+s} - \sum_r (1-\mathbf{s})\mathbf{w}_{x+s} - \sum_r (1-\mathbf{s})\mathbf{e}_{x+s}}$$

son los estimadores de los correspondientes ***tantos centrales de mortalidad,*** $\mathbf{m_x}$

sin dificultad**.** En el caso de disponer de Censos Generales y Movimientos Naturales de Población (p.ej., INE, 2007), la dificultad aumenta y sería sumamente complejo, sino imposible, calcular los expuestos al riesgo. Sin embargo, lo que sí sería factible es calcular los expuestos centrales al riesgo $\mathbf{E}_x^c$, y dado que se verifica:

$$\mathbf{E}_x^c = \mathbf{E}_x - \sum_r (\mathbf{1} - \mathbf{r})\theta_{x+r},$$

sería posible para datos generales calcular $\mathbf{E}_x$ a partir de $\mathbf{E}_x^c$ y $\sum_r (\mathbf{1} - \mathbf{r})\theta_{x+r}$. Asimismo, si adicionalmente la hipótesis de uniformidad de fallecidos a lo largo de cada edad y cada año se admitiese, la expresión $\sum_r (\mathbf{1} - \mathbf{r})\theta_{x+r}$ vendría a ser equivalente a la mitad de los fallecidos del período, por lo que se podría aproximar mediante $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\theta_x$. Con lo que para los casos de población general se podría utilizar la siguiente aproximación:

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_x^c + \sum_r (\mathbf{1} - \mathbf{r})\theta_{x+r} \cong \mathbf{E}_x^c + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\theta_x$$

5.- ALGUNAS PROPIEDADES INFERENCIALES

Una vez han sido derivadas estimaciones iniciales para los tantos brutos de mortalidad es necesario evaluar la validez de las mismas, por lo que el análisis de las propiedades estadísticas inferenciales de los estimadores anteriores se convierte en algo necesario. Para mostrar las enormes posibilidades y extensión de este campo se mostrarán algunas de las propiedades más destacables usando como hilo conductor los artículos metodológicos del profesor J.J. McCutcheon (1987) y de profesores D.O. Forfar, J.J. McCutcheon y D. Wilkie (1998), asi como en la obra ya clásica de Benjamin y Pollard (1989).

Para ello, y una vez fijado el período de observación, se observarán algunos de los elementos anteriores en su verdadera naturaleza. Así, se introduce en el problema la variable aleatoria número de fallecimientos de una cierta población o colectivo correspondientes al período de estudio. Obsérvese que el evento mortalidad-supervivencia se puede modelizar como un proceso aleatorio dicotómico. De modo que, denotando por $\mathbf{E_x}$, al número de individuos expuestos al riesgo de muerte para cada edad $\mathbf{x}$ y por $\mathbf{q_x}$ a la probabilidad de que un individuo con edad exacta $\mathbf{x}$ años fallezca antes de alcanzar la edad $\mathbf{x+1}$, el número de fallecimientos de individuos para cada edad $\mathbf{x}$ (esto es con edad: entre $\mathbf{x}$ –incluída- y $\mathbf{x+1}$ -excluída-) durante el período de observación, puede contemplarse como una variable aleatoria $\tilde{\theta}_x$ (Bowers *et al.*, 1986), que —de acuerdo con la hipótesis más aceptada— sigue una distribución binomial de parámetros $\mathbf{E_x}$ y $\mathbf{q_x}$, esto es: $\tilde{\theta}_x \sim B(\mathbf{E_x}, \mathbf{q_x})$, cuyos parámetros hay que estimar.

De forma que, de acuerdo al proceso binomial mortalidad-supervivencia indicado, la expresión de la probabilidad conjunta que de $\mathbf{E_x}$ cabezas o personas fallezcan exactamente $\boldsymbol{\theta_x}$ y sobrevivan ($\mathbf{E_x}$ - $\boldsymbol{\theta_x}$), arroja como función de verosimilitud $\mathbf{L(q_x)}$:

$$\mathbf{L(q_x)} = \binom{\mathbf{E_x}}{\theta_x} \mathbf{q_x^{\theta_x} (1-q_x)^{E_s-\theta_x}},$$

que salvo el factor o constante de proporcionalidad, se podría formular mediante:

$$\mathbf{L}(\mathbf{q_x}) \approx \mathbf{q_x^{\theta_x}} (1-\mathbf{q_x})^{\mathbf{E_s}-\theta_x}.$$

De forma que tomando logaritmos neperianos y derivando se sigue inmediatamente:

$$\ln L(q_x) = \theta_x \ln q_x + (E_x - \theta_x)\ln(1-q_x)$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_x} = \theta_x \frac{1}{q_x} - (E_x - \theta_x)\frac{1}{1-q_x},$$

e igualando a cero y designando a la solución como $\mathbf{q_x^{(b)}}$, se tendría:

$$\theta_x \frac{1}{q_x^{(b)}} = (E_x - \theta_x)\frac{1}{1-q_x^{(b)}} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_x^{(b)}}{1-q_x^{(b)}} = \frac{\theta_x}{(E_x - \theta_x)} \quad \Rightarrow \quad E_x q_x^{(b)} - \theta_x q_x^{(b)} = \theta_x - \theta_x q_x^{(b)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E_x q_x^{(b)} = \theta_x \quad \Rightarrow \quad q_x^{(b)} = \frac{\theta_x}{E_x}$$

y por lo tanto:

$$q_x^{(b)} = \frac{\theta_x}{E_x} \quad \forall x$$

serán los estimadores máximo-verosímiles de los tantos anuales de mortalidad, que además son insesgados, puesto que su esperanza matemática coincide con el parámetro poblacional a estimar. En efecto:

$$E\left(q_x^{(b)}\right) = E\left(\frac{\theta_x}{E_x}\right) = \frac{1}{E_x} E\left(\theta_x\right) = \frac{E_x q_x}{E_x} = q_x$$

y además de varianza:

$$Var(q_x^{(b)}) = \frac{q_x(1-q_x)}{E_x},$$

Que, a su vez, en caso de que el número de fallecimientos sea lo suficientemente grande, puede estimarse mediante:

$$V\hat{a}r(q_x^{(b)}) = \frac{q_x^{(b)}(1-q_x^{(b)})}{E_x}.$$

De forma que, por ejemplo, podrían construirse intervalos de confianza para los tantos de mortalidad y ser usados como elementos base en la elaboración de tablas recargadas de mortalidad y supervivencia, adaptándose el recargo más a la verdadera eficiencia de la probabilidad base, frente a los criterios usuales que consideran todos los valores de la tabla de igual calidad (ver, por ejemplo, Prieto y Fernández, 1994; Pavía y Escuder, 2003).

6.- CONSIDERACIONES FINALES.

En los desarrollos anteriores diversas expresiones para la estimación de los tantos brutos de mortalidad han sido propuestas. De ellas, el procedimiento de estimación notado como criterio III, es el más exacto, aunque, lamentablemente, no es siempre aplicable. No obstante, empero está limitación de aplicabilidad, es preciso constatar que en el caso particular de un período de dos años (en general, el anterior y posterior al del censo) este procedimiento es muy parecido al criterio I, aunque todavía manteniendo ciertas diferencias significativas. Diferencias que nos llevan a recomendar, como norma general la utilización (si es posible) del criterio III con períodos de entre 4 a 5 años.

Asimismo, y como ha sido puesto de manifiesto previamente, el criterio III podría ser utilizado tanto para la construcción de **tablas generales de mortalidad** como para tablas especificas de **colectivos de asegurados**. Sin embargo, en la práctica es casi imposible, con las estadísticas actuales de Censos y Movimientos Naturales de Población, el empleo del criterio III en la construcción de tablas generales.

Sin embargo, en el caso de utilizar bases de datos de las compañías aseguradoras y reaseguradoras, las dificultades prácticas desaparecen, dado que de los ficheros de las entidades aseguradoras es relativamente sencillo extraer los datos requeridos. En concreto, en el caso de colectivos de asegurados, los guarismos definidos anteriormente corresponderían con: (i) $\mathbf{b_x}$ son asegurados existentes con edad **x**, al principio de la investigación; (ii) $\mathbf{n_x}$, son los nuevos contratantes de seguros durante la investigación; (iii) $\mathbf{w_x}$, son los que abandonan, rescatan o rescinden el contrato por causas distintas del fallecimiento; y (iv) θ_x , son los que fallecen a la edad **x**; por lo que es posible obtener los cómputos de sus contribuciones exactas a la población de riesgo, dado que, en general, en la ficha de cada asegurado, aparece la fecha exacta de su nacimiento, de su alta o ingreso, así como de su rescisión o salida y su causa. Únicamente, sin embargo, habría que introducir una salvedad respecto de todo lo indicado y es que, en general, no hay datos de edades iguales o inferiores a una dada, sobretodo en algunos tipos de seguros (por ejemplo 18, para los seguros de automóviles), por ello hay que considerar la cota inferior de edad "**a**", por debajo de la cual no hay póliza alguna contratada, por lo tanto la primera edad a considerar en la cadena de expresiones para el cálculo $\mathbf{l_x^0}$ en los casos de colectivos de asegurados, será la edad **(a+1).** Siendo, por lo tanto $\mathbf{l_a^0}$ para las tablas de asegurados el equivalente a $\mathbf{l_0^0}$ en la tablas generales.

En referencia al Criterio II, se observa que de nuevo aparece uno de los problemas reales apuntado repetidamente, a saber: ¿**que ocurrirá si solo se dispone de una única experiencia censal**? En el caso de disponer de un único censo, sería necesario realizar los "desplazamientos" de los datos censales necesarios, para calcular los *stocks* de población correspondientes a las fechas requeridas (por ejemplo los 1 de enero de los años t, t+1,y, t+2), a partir del Censo disponible y de los Movimientos Naturales de Población necesarios, lo cual sin duda obligaría a hipótesis simplificadoras y casi con certeza introduciría errores al menos por las aproximaciones realizadas.

BIBLIOGRAFÍA

- AYUSO, M., CORRALES, H., GUILLEN, M., PÉREZ-MARÍN, A.M. y ROJO, J.L. (2001): *Estadistica Actuarial Vida.* Edicions Universitat de Barcelona. Barcelona.
- BENJAMIN, P. y POLLARD. J. (1986): *The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics*. Ed. Heinemann. Londres.
- BOWERS, J.R., GERBER. H. y otros (1986): *Actuarial Mathematics.* The Society of Actuaries. Illinois.
- ESCUDER, R. y NAVARRO, E. (2002): *Construcción de las tablas de mortalidad de colectivos de asegurados de la población española de 1997-98.* Proyecto de investigación financiado por Unión Española de Entidades Aseguradoras y Reaseguradoras (UNESPA) e Instituto de Actuarios Españoles (IAE).
- ESCUDER, R., MÉNDEZ, S., NAVARRO, E. y otros (2003): *Tablas de mortalidad de la Comunidad Valenciana años 2000-2001. Evolución reciente de las tendencias de mortalidad y proyecciones.* Proyecto de investigación financiado por Generalitat valenciana. CITIB/2002/286.
- FORFAR, D.O, McCUTCHEON, J.J. y WILKIE, D. (1988): On Graduation by Mathematical Formula. *Journal of the Institute of Actuaries*, 115, 1-149.
- HELIGMAN, L. y POLLARD, J.H. (1980): The Age Pattern of Mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*,107, 49-80.
- HOSSACK, I.B., POLLARD, J.H. y ZEHNWIRT, B. .(1999): *Introductory Stadistics with Aplication in General Insurance*. Ed. Cambridge University Press. Cambridge.
- INE (2000): *Tablas de Mortalidad de la Población Española 1996-1997.*

Ine, Madrid.
- INE (2007): *Censos y Movimientos Naturales de Población*. .http://www.ine.es/inebase/index.html
- INSOLERA, F.(1950): *Curso de Matemática financiera y Actuarial.* Ed. Aguilar. Madrid (traducción de la segunda edicion italiana. Torino 1937)
- LONDON, D. (1985): *Graduation: The revision of Estimates.* Actex. Abington.
- McCUTCHEON, J.J. (1987): Experiments in graduating the data for the English Life Tables (Nª 14). *Transactions of the Faculty of Actuaries.* 40 (1), 135-147.
- NAVARRO, E. (1991): *Tablas de mortalidad de la población española 1982. Metodología y Fuentes*. Ediorial MAPFRE. Madrid.
- NEILL, A (1992): *Life Contingencies*. Ed. Heinemann. Berlin.
- NIETO DE ALBA, U. y VEGAS ASENSIO, J. (1993): *Matemática Actuarial*. Editorial MAPFRE, Madrid.
- PAVIA J.M. y ESCUDER, R. (2003): El Proceso Estocástico de Muerte. Diferentes estrategias para la elaboración de tablas recargadas. Análisis de sensibilidad. *Estadística Española*, 45; nº 153, 253-274 .
- PRIETO, E. y FERNÁNDEZ, M.J. (1994): *Tablas de mortalidad de la población española de 1950 a 1990. Tabla proyectada del año 2000*. UNESPA. Madrid