

# Estimación del espectro de las series temporales

Por el Doctor en Ciencias Económicas  
FRANCISCO JAVIER URBELZ IBARROLA  
Catedrático de Estadística

## INTRODUCCION

1. En mi artículo (1) expusimos un breve panorama histórico de los procesos estocásticos y dijimos que los primeros estudios de las series de tiempo se realizaron en el *dominio del tiempo* y se utilizaron diversos métodos ingeniosos de difícil justificación científica.

Sir Arthur Schuster introdujo un método denominado periodograma y el cual estudia las series temporales en el *dominio de la frecuencia*. Desgraciadamente, el periodograma, aunque es un *estimador asintóticamente insesgado del espectro*, es *inconsistente* y, por esta causa, es poco fiable.

2. En 1927, G. U. Yule estudia los modelos autorregresivos y de medias móviles, y también Wold sigue idénticas directrices con los procesos anteriores y estudia además el proceso armónico en el *dominio del tiempo*.

3. En 1930, Wiener y Kolmogorov, independientemente, desarrollaron el análisis de las series de tiempo por métodos espectrales diferentes. Siguiéron esta línea los conocidos autores Khintchine, Slutsky, Cramer, Karhunen, Dob, etc.

4. En los trabajos de Daniell, Tukey, Bartlett, etc., en el período 1946-50 introdujeron el concepto de "ventanas ponderativas", que permitieron la construcción de *estimadores promedio* y de *covarianzas ponderadas* que go-

---

(1) F. J. URBELZ: "Introducción a la teoría de los procesos estocásticos", *Anales del Instituto de Actuarios*, 1978.

zan de propiedades importantes: *la de poder formar estimadores del espectro asintóticamente insesgados y las de ser consistentes*, propiedad ésta que no gozaba el periodograma, según hemos dicho.

5. La introducción de estas *ventanas* hizo que nuevamente se estudiaran las *series temporales en el dominio de la frecuencia*, donde sin total exclusividad se desarrolla gran parte de la investigación.

6. A partir del año 1950 se utiliza sistemáticamente el cálculo electrónico en el estudio de las series de tiempo, y por el algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*), preparado por Cooley y Tukey en 1965, permite obtener rápidamente los periodogramas y, consecuentemente, los estimadores de las funciones espectrales basados en ellos.

Las aplicaciones de la FFT se extendieron a las estimaciones de las funciones de covarianza, lo cual permitió que las series temporales se estudiaran también en el dominio del tiempo.

7. De lo expuesto se observa que el análisis de las series temporales ha pasado alternativamente *del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia*.

Fundamentalmente, la posibilidad de estudiar el análisis de una serie temporal, en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia, se justifica científicamente por la equivalencia entre la función de covarianza (definida en el dominio del tiempo) y el espectro o función de densidad espectral (definida en el dominio de la frecuencia), y esta relación nos la proporciona las transformadas de Fourier por ser una de ellas la transformada de la otra función (2).

8. Las dificultades para el estudio de las series por análisis espectral surgen porque precisa recursos específicos, y básicamente son:

1.º Análisis armónico generalizado.

2.º Espacios abstractos (especialmente el de Hilbert) y operadores lineales.

3.º Teoría de las probabilidades, inferencia estadística y procesos estocásticos.

9. Entre las ventajas del análisis espectral señalamos las más importantes:

1.ª Las propiedades muestrales son más simples en el dominio de la frecuencia que en el dominio del tiempo. La razón fundamental es que *los valores del espectro en frecuencias próximas están prácticamente incorrelacionadas*; no ocurre así con la función de covarianza.

---

(2) Recuérdese la función característica en estadística y su relación con la función de densidad por medio de la transformada de Fourier. Véase nuestro trabajo citado.

2.<sup>a</sup> Si se analiza la serie en el dominio de la frecuencia, *no es preciso fijar modelos* como en los métodos clásicos, que los prejuzgan y después ajustan sus parámetros. En el dominio de la frecuencia, las diferentes componentes surgen al analizar el espectro.

3.<sup>a</sup> El análisis espectral permite el estudio individualizado de los componentes armónicos en las diferentes bandas de frecuencia y *medir la contribución de cada banda a la varianza total del proceso*.

4.<sup>a</sup> El análisis espectral, en cooperación con la teoría del filtrado, *permite eliminar* componentes, determinando su importancia por su contribución a la varianza del proceso. Esta eliminación facilita el análisis posterior en la teoría de la predicción.

5.<sup>a</sup> La característica del espectro es de ser *atemporal*.

6.<sup>a</sup> Aunque los métodos espectrales actualmente estén referidos a los *procesos débilmente estacionarios* (o también denominados de *covarianza estacionaria*), pueden aplicarse a procesos de clases más amplias si antes se les libera de la *tendencia en media*.

10. Las consideraciones anteriores necesariamente nos conducen al estudio de la serie del tiempo *estimando su espectro*.

Y en este artículo tratamos exclusivamente este problema en forma elemental y en el caso que la función de densidad espectral sea una función continua de la frecuencia. Esta restricción, si es limitativa, no lo es desde el punto de vista práctico, porque la estructura de los procesos de tipo económico tienen función de densidad espectral de tipo continuo.

11. La representación gráfica del espectro estimado nos proporciona un primer conocimiento de la estructura del modelo y nos sugiere modelos más apropiados: *si existieren realmente períodos* en la serie temporal, en las *frecuencias correspondientes* a dichos períodos presentaría la gráfica *picos muy pronunciados con grandes concentraciones de masas espectrales*.

12. En las series económicas, los picos pronunciados suelen presentarse en las *componentes estacionales*: anuales, semestrales, trimestrales, mensuales, etc., y, en general, estas series *no presentan ciclos perfectos*, es decir, con repetición a intervalos de tiempo exactamente iguales y amplitudes iguales.

Las amplitudes y los intervalos de separación entre los máximos varían a lo largo del tiempo, y *precisamente este fenómeno cíclico de amplitud y duración variables* es el que origina las *bandas cíclicas* con perturbaciones redondeadas, más o menos agudas, según la intensidad o regularidad del fenómeno *pseudo-cíclico*.

13. El espectro de las series económicas es *típico contengan gran parte de la masa espectral en las muy bajas frecuencias* motivadas por la tendencia en media y los posibles ciclos de gran duración contenidos en las bandas cíclicas y que no pueden estudiarse por la limitación del tamaño de la muestra.

14. En este artículo exponemos, en su breve capítulo primero, el periodograma de una serie temporal de parámetro  $t$  discreto o continuo para modificar el clásico periodograma y examinar su relación con la función de densidad espectral, recordando que si  $B(t)$  es la *función de covarianza centrada poblacional*, la función de densidad espectral (en los casos sencillos) es:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} B(t) dt \quad \text{si } t \in \mathbb{R}$$

o sea, una *transformada de Fourier*. O también:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{-m}^m e^{-i\lambda t} B(t) \quad \text{si } t \in \mathbb{Z}$$

En otras palabras: según  $t$  sea de naturaleza continua o discreta, la función de densidad espectral viene expresada por una de las dos fórmulas anteriores.

En el capítulo primero comprobamos cómo la esperanza matemática del periodograma asintóticamente tiende a la función de densidad espectral y demostramos de forma rigurosa, pero elemental, la inconsistencia del periodograma para estimar el espectro.

El capítulo segundo lo dedicamos exclusivamente a la estimación de las funciones de covarianza, tratando estimadores centrados (o asintóticamente centrados) y consistentes.

El capítulo tercero lo dedicamos a la estimación del espectro, y para evitar los defectos de los *estimadores inconsistentes* se introduce un concepto, *ventanas espectrales*, que son funciones ponderativas sobre un intervalo de frecuencia para conseguir estimaciones promedio (en lugar de estimaciones en un punto de la frecuencia), de manera análoga a como se determina la altura de un histograma, que es un promedio de la función de densidad de probabilidad de la población. Se estudian las *ventanas desplazadas (lag)*, o generadores de ventanas, y las características de los estimadores espectrales promedio.

El capítulo cuarto, dedicado a la práctica y estudio del espectro promedio, particularizando con cierto detalle algunos generadores de ventanas, y de forma gráfica se estudian y se complementan con observaciones sobre las propiedades más importantes: las relaciones de varianzas, grados de libertad, etcétera.

Termino el capítulo cuarto y último con la estimación de la función de densidad espectral mixta, previa estimación de la función de covarianza, y aplicamos estos conceptos (en consideraciones finales) y generalizamos al vector proceso de tipo estacionario.

Finalizo con una breve bibliografía complementaria de esta exposición, que sintetiza muchos trabajos de prestigiosos autores.

## CAPITULO PRIMERO

**Periodograma y espectro**SECCIÓN 1.<sup>a</sup>*Consideraciones previas*

1. En este trabajo resumimos las técnicas existentes en la actualidad y omitimos demostraciones innecesarias para remitir al lector a artículos y libros sobre la materia, que exponemos en la bibliografía.

2. Las realizaciones muestrales pueden ser del tipo continuo o discreto. En tales casos, y a fin de no repetir idénticos razonamientos para fórmulas semejantes, añadimos al número de la fórmula una de las letras *c* o *d*, según sea continuo o discreto el parámetro *t* del proceso  $\{ \xi(t), t \}$  que estudiamos.

3. Para estimar la función de densidad espectral se estima previamente las funciones de covarianza.

Las funciones de covarianza se estiman de las series de datos, pero los autores no eligen los mismos estimadores.

4. Parecería innecesario el estudio del análisis espectral si las funciones de covarianza se relacionan por las transformadas de Fourier con las funciones de densidad espectral.

5. Pocos autores exclusivamente estudian las *series temporales en el dominio del tiempo utilizando las propiedades de las funciones de covarianza*. La técnica moderna se inclina en el sentido de *estudiar los procesos en el dominio de la frecuencia*.

6. En resumen, prácticamente disponemos de una *realización muestral de un proceso* de parámetro continuo o discreto y, a partir de esta información (dejamos otras cuestiones de menor importancia), las etapas fundamentales de la *metodología* son:

1.<sup>a</sup> Formulación de hipótesis previas.

2.<sup>a</sup> Elección de la serie temporal a analizar y con suficiente longitud.

3.<sup>a</sup> Estimadores de las funciones de covarianza y de densidad espectral de forma que los estimadores sean consistentes. Y, por último,

4.<sup>a</sup> Interpretación de la función de densidad espectral muestral.

## SECCIÓN 2.<sup>a</sup>

### *Periodograma modificado. Su relación con el espectro*

1. El conocido periodograma para descubrir períodos utilizado en el análisis armónico ha sido desacreditado en los últimos años porque *descubría ciclos aparentes* cuando no existían en realidad.

2. Estadísticos eminentes aplicaron el periodograma a modelos estocásticos, y el análisis de sus resultados no satisfacía a los modelos teóricos originales propuestos. Por un teorema de Slutsky (3), mediante sumas y diferencias en una serie, se producen ciclos para frecuencias determinadas.

3. Existe una relación entre espectro y *periodograma modificado*, y en muchas hipótesis éste era un estimador insesgado (o asintóticamente insesgado) de la función de densidad espectral, *pero no era consistente*, es decir, la varianza del estimador del periodograma no tendía hacia cero cuando la longitud de datos  $n \rightarrow \infty$ .

4. La conclusión inmediata era la imposibilidad de relación con el cálculo de probabilidades, ni aplicar Tchebycheff para determinar un intervalo de confianza para la función de densidad espectral que contuviese el verdadero parámetro poblacional de la función de densidad espectral.

5. Fórmulas del periodograma (discreto, continuo) y del modificado.

Para las conocidas del periodograma son:

$$P_T(\lambda) = \frac{1}{T^2} \left| \sum_{t \in N}^T x_t e^{-i\lambda t} \right|^2 \quad -\pi < \lambda \leq +\pi \quad [1 d]$$

$$P_T(\lambda) = \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T X_t e^{-i\lambda t} dt \right|^2 \quad \begin{matrix} \lambda \in R \\ t \in R \end{matrix} \quad [1 c]$$

y para las del periodograma modificado (difieren en el coeficiente):

$$\hat{P}_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T X_t e^{-i\lambda t} \right|^2 \quad [2 d]$$

$$\hat{P}_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T X_t e^{-i\lambda t} dt \right|^2 \quad [2 c]$$

(3) SLUTZKY, E.: "The summation of random causes as the source of cyclic processes", *Econometrica*, 1937, vol. 5.

Demostremos que las [2 d] y [2 c] son estimadores asintóticamente insesgados de la función de densidad del proceso cuando éste sea del tipo estacionario.

Sea el proceso

$$\{X_n, t \in R\} \quad [3]$$

de función de covarianza estacionaria y de media nula. El estimador [2 c] para una realización será una estimación y cuando  $n \rightarrow \infty$ , la esperanza matemática tiende asintóticamente a la función de densidad del proceso [3] en el punto  $\lambda$ .

En efecto:

$$\begin{aligned} E\hat{P}_T(\lambda) &= \frac{1}{2\pi T} E \int \int_0^T X_t \bar{X}_s e^{-i\lambda(t-s)} dt ds = \\ &= \frac{1}{2\pi T} \int \int_0^T B(t-s) e^{-i\lambda(t-s)} dt ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|z|}{T}\right) B(z) e^{-i\lambda z} dz \end{aligned} \quad [4c]$$

Hemos hecho el cambio  $z = t - s$  e integrado respecto a  $s$ , y recordando que  $B(t-s) = E \cdot X_t \bar{X}_s$ .

Tomando límites  $T \rightarrow \infty$  en la [4 c]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\hat{P}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(z) e^{-i\lambda z} dz = f(\lambda) \quad [5c]$$

*c, h, d*

Dhrymes (4) estudia y plantea erróneamente el periodograma modificado para variables de tipo discreto y únicamente el resultado sería exacto si  $B(z) = B(-z)$ , es decir, solamente para el caso real. Su teorema pide la generalidad que le da su autor y es válido para procesos reales e innecesariamente utiliza complejos en tal caso, y se justifica por simplificar demostraciones.

Completamos la demostración de referido autor atendiendo al caso  $X_t \in C$ . La esperanza matemática de [2 d] es:

$$E\hat{P}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} E \sum_{t,s=1}^n X_t \bar{X}_s e^{-i\lambda(t-s)} = \sum_{t,s=1}^n e^{-i\lambda(t-s)} EX_t \bar{X}_s$$

(4) PHOEBUS J. DHRYMES: *Econometrics Statistical Foundations and Applications*, Harper International Edition, N. Y., 1970, pág. 422. De su planteamiento llega a:

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n} \left(1 - \frac{|r|}{n}\right) B(r) e^{i\lambda r} \neq f(\lambda) \text{ porque no siempre es } B(r) = B(-r)$$

Si hacemos  $z = t - s$  y  $B(z)$  es la función de covarianza de Kernel, tendremos:

$$\begin{aligned} E\hat{P}_n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi n} \sum_{t,s=1}^n B(t-s) e^{-i\lambda(t-s)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|z|}{n}\right) e^{-i\lambda z} B(z) \end{aligned} \quad [4 d]$$

Recordando las sumas de Césaro y tomando límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\hat{P}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{z \in Z} B(z) e^{-i\lambda z} = f(\lambda) \quad [5 d]$$

Las fórmulas límites [5 c] y [5 d] son válidas para los procesos estacionarios de parámetro continuo o discreto y siempre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B(z)| dz < \infty \quad [6 c]$$

o

$$\sum_{z=-\infty}^{\infty} |B(z)| dz < \infty \quad [6 d]$$

condiciones que garantizan la continuidad de la función de densidad espectral.

8. El *periodograma modificado* es un estimador asintóticamente insesgado de la función de densidad espectral si cumple la condición [6] c. h. d.

### SECCIÓN 3.<sup>a</sup>

#### *Inconsistencia del periodograma modificado para estimar el espectro*

1. Hemos demostrado que el *periodograma modificado* de un proceso de tipo estacionario (parámetro continuo o discreto) es siempre un estimador asintóticamente insesgado de la función de densidad espectral del proceso.

2. Desgraciadamente, no todo estimador centrado es un buen estimador de la función de densidad espectral, porque en muchos casos no es consistente, es decir, la varianza del estimador no tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

3. La afirmación precedente la demostramos para el periodograma del proceso estacionario real  $\{\xi_t, t \in Z\}$ , denominado *perturbación aleatoria* de variables aleatorias independientes y de las características conocidas:

$$\begin{aligned} E\epsilon_t &= 0 \\ B(t-s) &= E\epsilon_t \epsilon_s = \sigma^2 \delta_{t,s} \quad \forall t, s \in Z \end{aligned} \quad [1 d]$$

Si de una realización del proceso

$$\{\epsilon_t, t \in Z\} \quad [2 d]$$



formamos el estimador [2 d] de la sección 2.<sup>a</sup>, comprobamos cumple las siguientes propiedades:

- 1.<sup>a</sup> Es un estimador centrado de la función de densidad espectral.
- 2.<sup>a</sup> Es un estimador inconsistente del parámetro poblacional.
- 1.<sup>o</sup> En efecto:

En principio recordemos que el proceso [2 d] tiene por representación espectral:

$$\epsilon_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} d\zeta(\lambda) \quad [3 d]$$

donde  $\zeta(\lambda)$  es un proceso de incrementos ortogonales, siendo la función de densidad espectral:

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad [4]$$

El estimador del periodograma modificado sustituyendo  $x_t$  por el proceso [2 d] es:

$$\begin{aligned} \hat{P}_n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n \epsilon_t e^{-it\lambda} \right|^2 \Rightarrow \\ E\hat{P}_n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi n} E \sum_{t,s} \epsilon_t \epsilon_s e^{-i\lambda(t-s)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-n+1}^{n-1} \left( 1 - \frac{|z|}{n} \right) B(z) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad -\pi < \lambda \leq \pi \end{aligned} \quad [6]$$

que coincide con la poblacional [4], es decir,  $\hat{P}_n(\lambda)$ , en este caso un estimador insesgado de  $f(\lambda)$  porque

$$B(0) = \sigma^2 \quad \text{y} \quad B(z) = 0 \quad \text{para } z \neq 0$$

2.<sup>o</sup> Determinemos la función de covarianza centrada en los puntos  $\lambda = \lambda_1$  y  $\lambda = \lambda_2$ :

$$\begin{aligned} E\hat{P}_n(\lambda_1) \overline{\hat{P}_n(\lambda_2)} &= \left( \frac{\sigma^2}{2\pi} \right)^2 = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi n} \right)^2 E \left[ \sum_{t,s} \epsilon_t \epsilon_s e^{-i\lambda_1(t-s)} \sum_{u,v} \epsilon_u \epsilon_v e^{-i\lambda_2(u-v)} \right] - \frac{\sigma^2}{4\pi^2} = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi n} \right)^2 E \sum_{t,s,u,v} \epsilon_t \epsilon_s \epsilon_u \epsilon_v e^{-i\lambda_1(t-s) + i\lambda_2(u-v)} - \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \end{aligned} \quad [7 d]$$

La esperanza de la [7 d] depende de:

$$\sum_{t,s,u,v} E \epsilon_t \epsilon_s \epsilon_u \epsilon_v \quad [8 d]$$

Por hipótesis, el proceso  $\{\epsilon_t\}$  es de variables independientes y, según [1 d], se anulará la sumatoria excepto en los siguientes casos:

$$a) \quad t=s, \quad u=v \quad t \neq u.$$

$$b) \quad t=u, \quad s=v \quad t \neq v.$$

$$c) \quad t=v, \quad s=u \quad t \neq s.$$

$$d) \quad t=s=u=v.$$

En el caso a) la esperanza de la [8 d] se reduce a:

$$\sum_{\substack{i,v \\ t \neq v}} E \epsilon_i^2 \epsilon_v^2 = \sum_{\substack{i,v \\ t \neq v}} E \epsilon_i^2 \epsilon_v^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n \sigma^4 - n\sigma^4 = n^2\sigma^4 - n\sigma^4 \quad [9]$$

En el caso b) la esperanza de la [7 d], sustituyendo valores, se reduce a:

$$\sigma^4 \sum_{\substack{i,s \\ t \neq s}} e^{-i(t-s)(\lambda_1 - \lambda_1)} = \sigma^4 \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n e^{-i(t-s)(\lambda_1 - \lambda_1)} - n\sigma^4 \quad [10]$$

En el caso c) tendremos igualmente:

$$\sigma^4 \sum_{\substack{i,s \\ t \neq s}} e^{-i(t-s)(\lambda_1 + \lambda_1)} = \sigma^4 \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n e^{-i(t-s)(\lambda_1 + \lambda_1)} - n\sigma^4 \quad [11]$$

Y, finalmente, el d), tenemos:

$$E \epsilon_t^4 = k_4 + 3\sigma^4 \Rightarrow \sum_{t=1}^n E \epsilon_t^4 = nk_4 + 3n\sigma^4 \quad [12]$$

$$t=s=u=v$$

donde  $k_4$  es el cumulante 4 de la distribución (5).

Los valores [9] a [12] los sustituimos en la [7 d] y tenemos la función de covarianza centrada:

$$E \hat{P}_n(\lambda_1) \hat{P}_n(\lambda_2) - \left( \frac{\sigma^2}{2\pi} \right)^4 = \left( \frac{1}{2\pi n} \right)^2 \left[ n^2\sigma^4 + nk_4 + \right. \\ \left. \sigma^4 \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n [e^{-i(t-s)(\lambda_1 + \lambda_2)} + e^{-i(t-s)(\lambda_1 - \lambda_2)}] \right] - \frac{\sigma^4}{4\pi^2} = \\ = \frac{k_4}{2\pi n} + \frac{\sigma^4}{(2\pi n)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n [e^{-i(t-s)(\lambda_1 + \lambda_2)} + e^{-i(t-s)(\lambda_1 - \lambda_2)}] \quad [13]$$

(5) M. G. KENDALL: *The advanced theory of statistics*, vol. I, Charles Griffin, pág. 70, 3.ª edición, 1969.

Si  $\{\epsilon_t\}$  fuesen normales, el valor del cumulante  $k_4=0$ .

La función de covarianza [13] para  $\lambda_1 \neq \pm \lambda_2$ , si el cumulante de cuarto orden es finito, el segundo miembro asintóticamente tiende a cero (6).

### 3.9 Función de varianza del estimador $\hat{P}_n(\lambda)$ .

Sin embargo, para  $\lambda_1 = \pm \lambda_2 = \lambda$  tenemos de [13]:

$$\begin{aligned} \sigma_{p_x}^2 = E\hat{P}_n(\lambda)^2 - \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right)^2 &= \frac{k_4}{2\pi n} + \frac{\sigma^4}{(2\pi)^2} + \\ &+ \frac{\sigma^4}{(2\pi n)^2} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n e^{-2(t-s)\lambda t} \end{aligned} \quad [14]$$

El segundo miembro ahora *no tiende asintóticamente a cero*.

Luego la varianza del estimador  $\hat{P}_n(\lambda)$  asintóticamente tiende a

$$\sigma_{p_x}^2 \rightarrow \frac{\sigma^4}{(2\pi)^2} = f(\lambda)^2 \quad [15]$$

y que prueba su inconsistencia. Hannan (7) demuestra la [15], así como la inconsistencia del periodograma modificado y también la incorrelación para  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En el caso del proceso [2d] es sencilla esta demostración como lo hemos hecho y que referido autor generaliza para procesos estacionarios.

4.9 Hemos demostrado dos cuestiones importantes: primera, que la función de covarianza del estimador de la función de densidad espectral para *dos frecuencias cualesquiera diferentes* (no siendo simétricas) *no están correlacionadas*; segunda, que en el *periodograma* del proceso estudiado, *aunque sea un estimador centrado en la función de densidad espectral*, sin embargo *no es consistente*, por lo que precisamos buscar estimadores que gocen de esta propiedad.

## CAPITULO II

### Estimación de la función de covarianza

#### SECCIÓN 1.ª

#### Introducción

1. Expusimos en otro artículo (8) las condiciones de ergodicidad para la función de covarianza, y si las cumple puede estimarse por una realización.

(6) PHOEBUS J. DHRYMES, *ob. cit.*, pág. 426, pues:

$$\sum_{t,s} e^{-i\lambda(t-s)} = \sum_{r=-n+1}^{n-1} [n-|r|] e^{-i\lambda r} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{r=-n+1}^{n-1} \left[1 - \frac{|r|}{n}\right] e^{-i\lambda r} \rightarrow 0$$

(7) E. J. HANAN: *Time series analysis*, Londres, 1960, págs. 52 y 53.

(8) F. J. URBELZ "Introducción a la teoría de procesos estocásticos", *Anales del Instituto de Actuarios*, pág. 207, 1979.

2. En las series económicas disponemos de datos limitados y los errores al estimar las magnitudes del proceso de las covarianzas pudieran ser significativos.

### *Hipótesis previas*

1. Las hipótesis previas las formulamos para procesos estacionarios de segundo orden y siempre consideramos las cumplen, salvo que expresamente se indique lo contrario.

2. Las características de todos los procesos se considerarán:

Para la media:

$$m(t) = E\xi(t) = 0$$

Para la función de covarianza desplazada  $z$ , denominada *lag* o *retardo* (desplazamiento):

$$B(z) = E\xi(t+z)\xi(t)$$

3. La hipótesis adicional (según sea discreta o continua) (9):

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 |B(z)| dz < \infty \quad [1c]$$

$$\sum_{z=-\infty}^{\infty} |z|^2 |B(z)| < \infty \quad [1d]$$

### SECCIÓN 2.<sup>a</sup>

#### *Estimadores centrados de las funciones de covarianza*

1. Para el desplazamiento  $z$  (*lag*), son estimadores centrados:

$$\hat{B}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t+z) \overline{\xi(t)} dt \quad [1c]$$

$$\hat{B}(z) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi(t+z) \overline{\xi(t)} \quad [1d]$$

También gozan de mencionada propiedad los estimadores:

$$\hat{B}(z) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t+z) \overline{\xi(t)} dt \quad [2c]$$

$$\hat{B}(z) = \frac{1}{2T} \sum_{t=-T}^T \xi(t+z) \overline{\xi(t)} \quad [2d]$$

---

(9) Puede emplearse la hipótesis  $\sum |z|^q |B(z)| (q > 0)$ . E. PARZEN: "On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series", *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 28, 1957, páginas 327 a 348.

Todos estos estimadores son centrados y la demostración es simple: no hay más que hallar esperanzas y recordar las características expuestas en las hipótesis previas. Así, por ejemplo, para el estimador [1 c]:

$$E\hat{B}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t+z) \overline{\xi(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T B(z) dt = B(z) \quad \text{c. h. d.} \quad [3]$$

Puede ampliarse el número de estimadores centrados, pero los expuestos son los más frecuentes.

### SECCIÓN 3.<sup>a</sup>

#### *Estimadores asintóticamente insesgados de las funciones de covarianza (10)*

1. Definamos algunos:

$$\hat{B}_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^{T-z} \xi(t+z) \overline{\xi(t)} dt, \quad T > z > 0 \quad [1c]$$

$$\hat{B}_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^{T-|z|} \xi(t) \overline{\xi(t+|z|)} dt \quad |z| < T \quad [2c]$$

Igualmente:

$$\hat{B}_1(z) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-|z|} \xi(t) \overline{\xi(t+|z|)} \quad [3d]$$

$$= 0 \quad \begin{array}{l} z = \pm 0, \pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm (T-1) \\ z = \pm T, \pm (T+1) \pm \dots \end{array}$$

2. También podemos definir estimadores asintóticamente insesgados y utilizados en la práctica:

$$\hat{B}_1(z) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-z} \xi(t+z) \overline{\xi(t)} dt \quad z > 0 \quad [4c]$$

$$\hat{B}_1(z) = \frac{1}{2T} \sum_{i=-T}^{T-z} \xi(t+z) \overline{\xi(t)} \quad 0 \leq z < T \quad [4d]$$

En general, el estimador  $\hat{B}_1(z)$  es asintóticamente insesgado de orden  $T^\alpha$  si ( $\alpha > 0$ ) se cumple:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^\alpha E \{ \hat{B}_T(z) - B(z) \} = c \quad [5]$$

siendo  $c$  una constante.

(10) PARZEN denomina a estos estimadores "funciones de convolución": "The rule of spectral analysis in time series", *Review of the International Statistical*, vol. 35, 2, 1967, pág. 126.

4. Todos los estimadores definidos anteriormente son asintóticamente insesgados de orden  $T$ .

Así, por ejemplo, para [1 c]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TE\{\hat{B}_T(z) - B(z)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \left[ \frac{1}{T} \int_0^{T-z} B(z) dt - B(z) \right] = -z B(z) \quad \text{c. h. d.} \quad [6]$$

#### SECCIÓN 4.<sup>a</sup>

##### *Estimadores consistentes de las funciones de covarianza*

1. En el caso de las funciones de covarianza, para que un estimador  $\hat{B}_T(z)$  sea consistente, debe cumplir:

$$E\{|\hat{B}_T(z) - B(z)|^2\} = \frac{c}{T} \quad [1]$$

Más general: la consistencia es de orden  $T^{2\alpha}$  ( $\alpha$  positivo) si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{2\alpha} E|\hat{B}_T(z) - B(z)|^2 = \text{constante} \quad [2]$$

2. Los esquemas para construir estimadores consistentes algunos se basan en la continuidad de las funciones monótonas,  $F(\lambda)$ , porque si es un estimador consistente:

$$B(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} f(\lambda) d\lambda \quad [3]$$

y

$$\hat{B}_T(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} f(\lambda) d\lambda \quad [4]$$

la convergencia de estas funciones características

$$\hat{B}_T(z) \rightarrow B(z) \quad [5]$$

implica la de sus funciones de espectrales.

3. Las condiciones demostradas por Parzen (11) para que  $\hat{B}_T(t)$  sea un estimador consistente son:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{1/2} E\{|\hat{B}_T(z) - B(z)|\} = 0 \quad [6]$$

(11) E. PARZEN: "On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series", *Ann. Mathem. Statistic*, vol. 28, pág. 330.

y

$$\text{Lím } T \text{ cov} \{ \hat{B}_T(z_1) \hat{B}_T(z_2) \} = \int_{-\infty}^{\infty} [P(z_1, u, u+z_2) - B(z_1) B(z_2)] dz \quad [7]$$

siendo

$$\hat{B}_T(z) = \int_0^{T-z} X(t+z) \overline{X(t)} dt$$

y

$$P(z_1, z_2, z_3) = E X(t) X(t+z_1) X(t+z_2) X(t+z_3) \quad [8]$$

La [6] nos indica el orden de consistencia y la [11] la ergodicidad, y más expresamente, si  $z_1 = z_2 = z$ , el orden de la varianza de  $\hat{B}(z)$  (12).

SECCIÓN 5.<sup>a</sup>

*Estimadores de la función de covarianza de un proceso estacionario de media no nula*

1. Si en el proceso  $\{ \xi(t), t \in T \}$  continuo o discreto modificamos las hipótesis previas y hacemos que la característica media no sea cero:

$$m(t) = \alpha \quad [1]$$

pero si fuese conocida podemos formar estimadores diferentes de los anteriores.

2. Serán centrados los del tipo:

$$\hat{B}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t+z) - \alpha] \overline{[\xi(t) - \alpha]} \quad [2c]$$

o también:

$$\hat{B}(z) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\xi(t+z) - \alpha] \overline{[\xi(t) - \alpha]} \quad [2d]$$

3. Igualmente formaríamos estimadores asintóticamente insesgados, como lo hicimos en la sección 3.<sup>a</sup>

4. Si desconocemos  $\alpha$ , debemos previamente estimarla, y los estimadores de la media pueden ser muy distintos:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt, \quad \bar{x} = \frac{1}{T-z} \int_0^{T-z} \xi(t) dt, \quad \bar{x}_+ = \frac{1}{T-z} \int_z^T \xi(t) dt \quad [3c]$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi(t) \quad ; \quad \bar{x} = \frac{\sum_{t=1}^{T-z} \xi(t)}{T-z} \quad ; \quad \bar{x}_+ = \frac{\sum_{t=z+1}^T \xi(t)}{T-z} \quad [3d]$$

Estos estimadores son centrados y asintóticamente consistentes.

(12) D. R. McNEIL: "Estimating the covariance and spectral density functions from a clipped stationary time series", pág. 196, 1966, *Journal of the Royal Stat. Society*, serie B, 180/195.

5. Estadísticos muy utilizados para estimar las funciones de covarianzas son:

$$\hat{B}_1(z) = \frac{1}{T-z} \int_0^{T-z} [\xi(t+z) - \bar{x}_+] [\xi(t) - \bar{x}] dt \quad [4c]$$

o

$$\hat{B}_1(z) = \frac{1}{n-z} \left\{ \sum_{i=1}^{n-z} \xi(t+z) \xi(t) - \frac{1}{n-z} \sum_{i=1+z}^n \xi(t) \sum_{i=1}^{n-z} \xi(t) \right\} \quad [4d]$$

Estos utilizan las medias muestrales estimadas [3c] o [3d] de los primeros datos  $n-z$  o los siguientes a  $z$ .

Los estadísticos [4] son sesgados, pero asintóticamente centrados.

## SECCIÓN 6.<sup>a</sup>

### *Complemento a los conceptos expuestos de media y función de covarianza muestrales*

1. Estudiamos el caso discreto sin perder generalidad, pues las sumatorias se transforman en integrales para el caso de que el parámetro  $t$  del proceso fuera continuo.

Una media es una combinación lineal:

$$L = \sum_{i=1}^T \beta_i X_i \Rightarrow \quad [1]$$

Tomando esperanzas de la [1] tenemos:

$$E(L) = \sum_i \beta_i E X_i \quad \forall \beta_i \in R \quad [2]$$

y si el proceso fuese estacionario ( $E X_i = \mu$ )  $\Rightarrow$

$$E\{L\} = \mu \sum_{i=1}^T \beta_i \quad [3]$$

2. La función de covarianza es:

$$\sigma_L^2 = E \left[ \sum_{i=1}^T \beta_i (x_i - \mu) \right]^2 = \sum_{t,s} \beta_t \beta_s B(t-s) = \sum_{r=-T+1}^{T-1} B(r) \sum_{s \in S_r} \beta_{t+s} \beta_s \quad [4]$$

siendo

$$S_r = \{1, 2, \dots, T-r\} \quad r \geq 0 \quad \text{y} \quad S_r = \{1-r, 2-r, \dots, T\} \quad r < 0 \quad [5]$$

3. Para que  $L$  sea un estimador centrado en media, la [3] impone la condición:

$$\sum_{i=1}^T \beta_i = 1 \quad [6]$$



4. En caso de ser  $\beta_t = \frac{1}{T}$  se cumple la [6], y la varianza [4] de la *media muestral* en este caso (de la sección 6.<sup>a</sup> del capítulo II) es:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T^2} \sum_{t,s}^T B(t-s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-T+1}^{T-1} \left(1 - \frac{|r|}{T}\right) B(r) \Rightarrow$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{z=-T}^T B(z) = 2\pi f(0) \quad (13) [2]$$

Luego si  $f(0)$  está acotada,  $\sigma_x^2$  tiende a cero con  $T$  y la consistencia es de orden  $T$ .

5. No indicamos la esperanza matemática de  $\hat{B}(z)$  de [4d] de la sección 5.<sup>a</sup>, que puede consultarse en Anderson (págs. 448 y ss.), por ser excesivamente laboriosa y hay que analizar los distintos casos particulares de  $z$ .

Sin embargo, expresaremos la esperanza matemática en términos de la función de densidad espectral (14):

$$E \hat{B}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda z \left\{ \left( 1 - \left[ \frac{\sin \frac{\lambda}{2} (T-Z)}{(T-Z) \sin \frac{\lambda}{2}} \right]^2 \right) \right\} f(\lambda) d\lambda$$

#### SECCIÓN 7.<sup>a</sup>

##### *Comentarios de utilidad práctica*

1. Para estimar la covarianza existen criterios diferentes más o menos justificados.

Tukey (15) menciona que si se dispone de  $n$  datos, moderadamente no se debe de elegir más que un 5 por 100 (máximo un 10 por 100) para determinar los desplazamientos (*lags*) o covarianzas.

$$(13) \text{ Recuérdese que } f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} B(z) e^{-i\lambda z} \Rightarrow$$

cuando  $\lambda \rightarrow 0$  tenemos la [2].

(14) ANDERSON, *ob. cit.*, pág. 450, en el caso real de ser:

$$\hat{B}(z) = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} (X_t - \bar{X}_h) (X_{t+h} - \bar{X}_{h+}) \text{ donde } \bar{X}_h = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} X_t$$

y

$$\bar{X}_{t+h} = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} X_{t+h}$$

(15) R. B. BLACKMAND y J. W. TURKEY: *The measurement of power spectra*, Dover, Nueva York, 1959, pág. 11.

Granger (16) dice que raramente debe ser  $z \leq n/3$  y que para  $n$  no muy grande el máximo de  $z$  sea del orden  $n/5$  o  $n/6$ .

Parzen (17) señala unos puntos truncados y determina tres:  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$ , y que como porcentajes de los datos disponibles  $T$  son:

$$5\% \leq M_1/T \leq 10\% \quad ; \quad 10\% \leq M_2/T \leq 25\% \quad ; \quad 25\% \leq M_3/T \leq 75\%$$

2. Desde el punto de vista económico, si los datos son mensuales, la elección del registro  $T$  es recomendable que siempre sea un múltiplo de doce meses. También debe elegirse para determinar  $M$  que sea múltiplo de doce meses y que  $M$  sea como máximo un 20 por 100 de los datos, y si los datos fuesen semanales es preciso que  $M$  sea múltiplo de los años expresados en semanas.

3. Algunos autores utilizan estimadores sesgados para estimar las funciones de covarianza. Las principales razones expuestas por E. Parzen son: los estimadores de la sección 3.<sup>a</sup> son funciones definidas no negativas y el error mínimo cuadrático es inferior a los de las [3]. Remitimos al lector al trabajo de citado autor.

4. En 1965, Cooley y Turkey (18) introdujeron el algoritmo de la FFT (*Fast Fourier Transform*) para estimadores de periodogramas y aplicándolo también para las funciones de covarianza, obteniendo rapidísimamente las funciones estimadas.

## CAPITULO III

### Estimación del espectro

#### SECCIÓN 1.<sup>a</sup>

#### *Funciones estimadoras de la densidad espectral asintóticamente insesgadas e inconsistentes*

1. En las hipótesis indicadas en el capítulo anterior, sección 1.<sup>a</sup>, para una realización muestral de media teórica conocida tenemos estimadores de longitud  $T$  similares al periodograma modificado para la función de densidad espectral:

$$\hat{f}_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-i\lambda z} \hat{B}(z) dz \quad [1c]$$

$$\hat{f}_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-T+1}^{T-1} e^{-i\lambda z} \hat{B}(z) \quad [1d]$$

$$\hat{B}(z) = 0 \quad |z| \geq T$$

(16) W. J. GRANGER: *Ob. cit.*, pág. 61.

(17) E. PARZEN: "The rule of spectral analysis in time series analysis", *Review of the International Statistical Institute*, vol. 35.2, 1967, pág. 129.

(18) COOLEY y TURKEY: "An algorithm for the machine calculation of complex series", *Math. Compl.*, 19-297/301, 1965.

donde  $\hat{B}(z)$  puede ser cualquier estimador de los estudiados en el capítulo anterior, pero con preferencia las funciones de convolución definidas en la sección 3.<sup>a</sup> de citado capítulo.

2. En el caso de ser el proceso real las [1 c] y [1 d], son las transformadas del coseno:

$$\hat{f}_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \hat{B}_T(z) \cos \lambda z dz \quad \lambda \in R \quad [2c]$$

$$\hat{f}_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-T+1}^{T-1} \hat{B}_T(z) \cos \lambda z \quad -\pi < \lambda \leq \pi \quad [2d]$$

$$\hat{B}_T(z) = 0 \quad z \geq T \quad [3]$$

Si los estimadores elegidos para las funciones de covarianza son insesgados o asintóticamente insesgados, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} E \hat{f}_T(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T E \{ \hat{B}_T(z) \} e^{-i\lambda z} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(z) e^{-i\lambda z} dz = f(\lambda) \quad \lambda \in R \end{aligned} \quad [3c]$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} E \hat{f}_T(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{z=-T+1}^{T-1} e^{-i\lambda z} E B_T(z) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} B(z) = f(\lambda) \end{aligned} \quad [3d]$$

$$-\pi < \lambda \leq \pi$$

Es decir, los estimadores [1] y [2] son asintóticamente insesgados de la función de densidad espectral.

4. La misma propiedad subsiste caso de ser el proceso real y elegir estimadores para las funciones de covarianza asintóticamente centradas.

5. Los mismos inconvenientes expuestos al estudiar el periodograma modificado tienen estas funciones estimadoras.

6. Pero además carecemos de una realización infinita y el tamaño de la muestra es  $T$ . En este caso precisamos la formación de estimaciones ponderativas de la función de densidad espectral sobre un intervalo con el fin de obtener un estimador consistente.

SECCIÓN 2.<sup>a</sup>

*Funciones estimadoras de la función de densidad espectral consistentes.  
Concepto de ventanas espectrales*

1. El planteamiento de nuestro problema *se centra en elegir funciones ponderativas sobre una longitud de frecuencia de banda* ( $\lambda_1, \lambda_2$ ), cuya anchura puede disminuirse para que nos exprese el promedio de densidad espectral *similar a como la función de densidad de probabilidad refleja la idealización* de la altura del histograma.

2. Las funciones ponderativas deberán reunir ciertas condiciones, pero es natural que cuando el número de datos disponibles tiende a infinito y el intervalo de la frecuencia disminuya hasta reducirse teóricamente a un punto, el resultado *del promedio* tienda a la *función de densidad espectral*, siempre que el estimador elegido sea consistente.

Resumiendo: la varianza del estimador promedio debe de ser del orden  $T^{2\alpha}$  para que sea consistente el estimador elegido si la de la media es del orden  $T^\alpha$ .

3. Entre las fórmulas de tipo ponderativo, Parzen (19) define el concepto de *densidad espectral media* para una función  $A(\lambda)$  —continua y acotada— de la forma:

$$J(A) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) f(\lambda) d\lambda \quad [4c]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} A(\lambda) f(\lambda) d\lambda \quad [4d]$$

4. Si en lugar de emplear la función de densidad empleamos una estimación  $\hat{f}_T(\lambda)$ , entonces las anteriores serán:

$$\hat{J}_T(A) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) \hat{f}_T(\lambda) d\lambda \quad [5c]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} A(\lambda) \hat{f}_T(\lambda) d\lambda \quad [5d]$$

Estas expresiones son *promedios espectrales muestrales* con función ponderativa  $A(\lambda)$  y las llama Tukey (20) *ventanas espectrales*.

Si elegimos la ventana  $A(\lambda) = \delta(v - \lambda)$ , siendo  $\delta(v - \lambda)$  la función de Dirac, es natural que por la propiedad de esta función:

$$J_T(A) \sim \hat{f}_T(\lambda)$$

Justificaremos la denominación de ventana en la sección siguiente.

(19) E. PARZEN: "Mathematical considerations in the estimation of spectra", *Technometrics*, vol. 3, núm. 2, mayo 1961, pág. 170.

(20) J. W. TUKEY: *An introduction to the measurement of spectra*, págs. 300-380, U. Grenander, Wiley, Nueva York, 1959.

SECCIÓN 3.<sup>a</sup>*Estimación del espectro en general por distintas ventanas  
y de sus características*1. *Introducción*

1. Recordemos las [2 d] y [2 c] del periodograma modificado (sección 1.<sup>a</sup>) del capítulo primero y sus desarrollos, sin tomar esperanzas [4 c] y [4 d]. Tomemos como estimador de la función de densidad espectral:

$$\hat{f}_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|z|}{T}\right) \hat{B}(z) e^{-i\lambda z} dz \quad [1 c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-T+1}^{T-1} \left(1 - \frac{|z|}{T}\right) B(z) e^{-i\lambda z} \quad [1 d]$$

2. Las estimaciones de las funciones de covarianzas disponibles son  $\hat{B}(z)$ ;  $|z| \leq M < T$ , según los comentarios hechos en el capítulo segundo, sección 7.<sup>a</sup> Esta limitación la justificaremos más adelante.

Llamemos:

$$k(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|z|}{T} & |z| < T \\ 0 & |z| \geq T \end{cases} \quad [2]$$

Sustituyendo [2] en las [1] tenemos la función estimadora de la función de densidad espectral que podemos estimar para unos datos disponibles  $T$ :

$$\hat{f}_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(z) \hat{B}(z) e^{-i\lambda z} dz \quad [3 c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-\infty}^{\infty} k(z) \hat{B}(z) e^{-i\lambda z} \quad [3 d]$$

4. En las [3] a la función [2] daremos mayor generalidad, pero siempre que cumpla determinadas condiciones:

$$\begin{aligned} k(0) &= 1 \\ k(-z) &= k(z) \\ k(z) &= 0 \quad z \geq T \quad (o \ z \geq M < T) \end{aligned} \quad [4]$$

Estas funciones se denominan "ventanas desplazadas" (21) o mejor: generadores de ventanas.

(21) *Lag window.*

5. Aplicando a las [3] el teorema de convolución (22) tenemos (si elegimos las funciones definidas en [5] de la sección 2.<sup>a</sup>):

$$\hat{f}_T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) \hat{f}(\lambda - \nu) d\nu \quad [5c]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} A(\nu) \hat{f}(\lambda - \nu) d\nu \quad [5d]$$

Estas fórmulas son similares a las [4] de la sección anterior.

Siendo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}(z) e^{-i\lambda z} dz \quad \lambda \in R \quad [6c]$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{B}(z) e^{-i\lambda z} \quad -\pi < \lambda \leq \pi \quad [6d]$$

La *ventana espectral* es la función:

$$A(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu z} k(z) dz \quad z \in R \quad [7c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-\infty}^{\infty} e^{-i\nu z} k(z) \quad z \in Z \quad [7d]$$

y vemos por [5] que *es la parte de función de densidad espectral que deja pasar a través de la ventana.*

6. El generador de ventanas  $k(z)$  es la transformada de Fourier de  $A(\lambda)$ :

$$k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\lambda z} A(\lambda) d\lambda \quad z \in R \quad [8c]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda z} A(\lambda) d\lambda \quad z \in Z \quad [8d]$$

(22) Si  $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\nu) f_2(\lambda - \nu) d\nu$  se escribe simbólicamente  $f_1(\lambda) * f_2(\lambda)$

La transformada de Fourier de  $f(\lambda)$  en sentido de las f. c. es:

$$T^{-1}\{f_1(\lambda) * f_2(\lambda)\} = g_1(t) g_2(t) \Rightarrow$$

$$T g_1(t) g_2(t) = f_1(\lambda) * f_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t) e^{-i\lambda t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\nu) f_2(\lambda - \nu) d\nu, \text{ siendo } g_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f_i(\lambda) d\lambda \quad \{i=1,2\}$$

7. Toda ventana espectral tiene que cumplir las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 A(\lambda) &\geq 0 \\
 \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) d\lambda &= 1 \quad (z=0) \\
 A(-\lambda) &= A(\lambda)
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

La ventana de la función [2] es:

$$A(\lambda) = \frac{T \operatorname{sen}^2 \frac{\lambda T}{2}}{2\pi \left( \frac{\lambda T}{2} \right)^2}
 \tag{10}$$

que cumple las condiciones de [9].

Obsérvese que si  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $A(0) = \frac{T}{2\pi} \rightarrow \infty$  si  $T \rightarrow \infty$ , en cuyo caso se asemeja a la función de Dirac.

Es natural considerar que si  $T$  es grande, en un entorno pequeño de  $\lambda$ ,  $\hat{f}(\lambda)$  no oscilará y pasará por la ventana, es decir:

$$E\hat{f}_T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) E\hat{f}(v-\lambda) d\lambda \sim f(\lambda)
 \tag{11}$$

## 2. Esperanzas, varianzas y estimadores espectrales promedios y sus características

1. El estimador de  $\hat{f}_T(\lambda)$  con longitud  $T$  es de orden  $T^\alpha$  si podemos poner:

$$E\hat{f}_T(\lambda) = f(\lambda) + \frac{b}{T^\alpha} \sim f(\lambda) \quad \alpha > 0
 \tag{12}$$

2. La varianza de este estimador es asintóticamente centrado, ya que aproximadamente es:

$$\operatorname{Var} [\hat{f}_T(\lambda)] \approx f^2(\lambda)
 \tag{13}$$

más términos de orden  $\frac{1}{T^{2\alpha}}$  que tienden a cero con  $T$ . Este hecho es característico de que el estimador  $\hat{f}_T(\lambda)$  no es consistente.

3. Bartlett fue el primero que ideó un artificio: en lugar de estimar  $\hat{f}_T(\lambda)$  de una muestra, la dividió en partes. Así, por ejemplo: si  $N=400$ , la divide

en diez series de 40 y calcula para cada subserie el espectro estimado  $\hat{f}_i(\lambda)$  y después la media en la misma frecuencia:

$$\overline{\hat{f}_T(\lambda)} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \hat{f}_i(\lambda) \quad [14]$$

siendo:

$$\hat{f}_i(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{B}_i(z) e^{-i\lambda z} dz \quad [15c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-M}^M \hat{B}_i(z) e^{-i\lambda z} \quad [15d]$$

para  $K$  series cada una de longitud  $M \Rightarrow T = KM$ .

4. El estimador de la *media* espectral muestral de Bartlett es:

$$\overline{\hat{f}_T(\lambda)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{f}_i(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \overline{\hat{B}(z)} e^{-i\lambda z} dz \quad [16]$$

donde:

$$\overline{\hat{B}(z)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{1}{M} \int_{(i-1)M}^{iM-|z|} X(t+z) X(t) dt \quad z \geq 0 \quad [17]$$

5. La esperanza de la media de las funciones de covarianza [17] es:

$$E \overline{\hat{B}(z)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{M} \int_{(i-1)M}^{iM-|z|} B(z) dt = \left( 1 - \frac{|z|}{M} \right) B(z) \quad [18]$$

6. De forma semejante, la esperanza del promedio muestral espectral [16] es:

$$\begin{aligned} E \overline{\hat{f}_T(\lambda)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M E \overline{\hat{B}(z)} e^{-i\lambda z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left( 1 - \frac{|z|}{M} \right) B(z) e^{-i\lambda z} dz \quad [19] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(z) B(z) e^{-i\lambda z} dz \quad [19']$$

donde:

$$k(z) = 1 - \frac{|z|}{M} \quad |z| < M \quad [19'']$$

y siendo  $T = kM$ .

$$= 0 \quad |z| \geq M$$



Siendo la [19] una transformada de Fourier, utilizando las fórmulas de convolución tenemos:

$$E\hat{f}_T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda - \nu) \cdot \frac{M \operatorname{sen}^2 \frac{\lambda M}{2}}{2\pi \left(\frac{\lambda M}{2}\right)^2} d\lambda \quad [20]$$

7. Observemos que  $K(z)$  es la función definida en [2], pero ahora hay que sustituir  $T$  por  $M$ , y en consecuencia las expresiones ponderadas [3 c] y [3 d] con las funciones generatrices de ventanas [4] son promedios espectrales, es decir:

$$\overline{\hat{f}(\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \hat{B}(z) e^{-i\lambda z} \quad z \in R \quad [21 c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-\infty}^{\infty} K(z) \hat{B}(z) e^{-i\lambda z} \quad z \in Z \quad [21 d]$$

siendo  $K(z)$  los denominados generadores de ventanas.

8. La esperanza del promedio espectral muestreado es (previa utilización de la convolución):

$$\begin{aligned} E\overline{\hat{f}(\lambda)} &= E \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) \hat{f}(\lambda - \nu) d\nu \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) \hat{f}(\lambda - \nu) d\nu = \overline{f(\lambda)} \end{aligned} \quad [22 c]$$

y coincidirá con  $\overline{f(\lambda)}$  si es un estimador insesgado. Lo mismo ocurre para el caso discreto, excepto límites.

9. La varianza de  $\overline{\hat{f}(\lambda)}$  depende de la longitud  $T$  y de la elección de la ventana  $A(\nu)$ . El criterio de elección de la ventana está relacionado con las funciones generatrices de ventanas (*lag windows*) y aproximadamente es (23):

$$\operatorname{Var}\{\overline{\hat{f}(\lambda)}\} \approx \frac{f^2(\lambda)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)^2 d\lambda = \frac{f^2(\lambda)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du \quad [23]$$

habiendo utilizado la fórmula de Parseval (24) y *siendo expresada en ciclos la frecuencia*.

(23) JENKINS y WATTS: *Ob. cit.*, págs. 247-251.

(24) TITCHMARSCH: *Theory of fourier integrals*, 2.<sup>a</sup> edic. reimp., Oxford, 1967, pág. 51.

10. Relación entre varianzas. De las [13] y [23] deducimos:

$$\frac{\sigma^2 \{\widehat{f}(\lambda)\}}{\sigma^2 \{f(\lambda)\}} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} K(u)^2 du = \frac{I}{T} \quad [24]$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)^2 d\lambda \quad [25]$$

Si el tamaño de la muestra es  $T$  y utilizamos un máximo de  $M$  funciones de covarianzas estimadas, la relación entre varianzas puede expresarse por:

$$\frac{I}{T} = \frac{M}{T} = \frac{c}{K} \quad \text{y} \quad k = \frac{T}{M} \quad [26]$$

11. La consistencia del promedio del espectro del orden  $n^{2\alpha}$  es:

$$E\{|\widehat{f}(\lambda) - \overline{f(\lambda)}|^2\} < \frac{c}{n^{2\alpha}} \quad \alpha > 0 \quad [27]$$

Se ha planteado el problema de minimizar la expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E\{|\widehat{f}(\lambda) - \overline{f(\lambda)}|^2\} \quad [28]$$

para encontrar la ventana espectral adecuada.

El criterio que minimiza la [28] es (25):

$$k(u) = \frac{B(u)^2}{B(u)^2 + \sigma^2 \{\widehat{B}(u)\}} \quad 0 \leq u \leq T \quad [29]$$

que imposibilita calcular la ventana óptima.

## CAPITULO IV

### Estudio y práctica de la estimación del espectro promedio

#### SECCIÓN 1.ª

#### *Conceptos generales sobre generadores de ventanas*

1. La función  $k(u)$  tiene que ser de cuadrado integrable, definida para todo valor real  $u$  y tal que:

$$\frac{1 - k(u)}{|u|^q} \quad [1]$$

sea una función acotada de  $u$  ( $q > 0$ ).

(25) JENKINS y WATTS: *Ob. cit.*, pág. 275.

2. Si se elige

$$k(u) = k \left( \frac{X}{M} \right) \quad [2]$$

donde  $M$  es constante, de forma que por la [26] de la sección anterior sea:

$$\frac{M}{T} \rightarrow 0 \quad \text{si } T \rightarrow \infty \quad [3]$$

para que el estimador promedio espectral sea consistente.

3. En el caso de ser un proceso discreto la estimación, vimos en [21 d] de la sección anterior que:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-M+1}^{M-1} K_n e^{-i\lambda n} \hat{B}(n) \quad [4]$$

y  $k_n$  puede considerarse como función generadora de ventanas (*lag windows*), siendo la ventana espectral:

$$A_D(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-M+1}^{M-1} K_n e^{-in\lambda} \quad n \in Z \quad [5]$$

4. Si  $k(x)$  es una función continua y

$$K_n = k \left( \frac{n}{M} \right) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} k^2(x) dx < \infty \quad k(0) = 1 \quad [6]$$

y  $k(x)$  un generador de ventanas, es más conveniente considerar, en vez de la ventana discreta  $A_D(\lambda)$ , la

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{-i\lambda x} dx \quad [7]$$

y que aproximadamente es:

$$\frac{1}{2\pi M} \sum_{-M+1}^{M-1} K \left( \frac{n}{M} \right) e^{-i \frac{n}{M} \lambda} = \frac{1}{M} A_D \left( \frac{\lambda}{M} \right) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(u) e^{-i\lambda u} du \quad [8]$$

pues haciendo  $u = \frac{n}{M} \Rightarrow \Delta u = \frac{1}{M} \sim du$ .

De la [8], despejando  $A_D(\cdot)$  y sustituyendo  $\lambda$  por  $\lambda M$ , tenemos:

$$A_D(\lambda) \approx \frac{M}{2\pi} \int_{-1}^1 k(u) e^{-i\lambda M u} du \quad [8']$$

SECCIÓN 2.<sup>a</sup>*Algunos generadores particulares de ventanas*1. *Rectangular* (también denominado de Dirichlet).

Se define por:

$$k(u) = \begin{cases} 1 & |u| \leq 1 \\ 0 & |u| > 1 \end{cases} \quad [1]$$

La ventana espectral es:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-i\lambda u} du = \frac{\text{sen } \lambda}{\pi \lambda} \quad [2]$$

También pudiera definirse:

$$k(u) = 1 \quad ; \quad \left| \frac{u}{M} \right| \leq 1 \quad [3]$$

Entonces la ventana  $A_D(\lambda)$  sería aproximadamente, recordando la [8'] y despejando  $A_D(\lambda)$ , haciendo previamente  $\lambda = \lambda M$ :

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M e^{-i\lambda u} du = \frac{\text{sen } M\lambda}{\pi \lambda} \quad [4]$$

Obsérvese que es el anterior sustituyendo  $\lambda$  por  $M\lambda$ , pero multiplicando por  $M$ .

En la tabla damos las ventanas correspondientes a las covarianzas empleadas ( $M$ ).

2. *Bartlett*:

$$k(u) = \begin{cases} 1 - |u| & |u| \leq 1 \\ 0 & |u| > 1 \end{cases} \quad [5]$$

3. *Tukey* (26) (lo denomina *hanning*):

$$\begin{aligned} k(u) &= \frac{1}{2} (1 + \cos \pi u) & |u| \leq 1 \\ &= 0 & |u| > 1 \end{aligned} \quad [6]$$

Esta ventana no cumple la condición de hacer siempre el espectro positivo (27).

4. *Tukey* (26) (lo denomina *hamming*):

$$\begin{aligned} k(u) &= 0,54 + 0,46 \cos \pi u & |u| \leq 1 \\ &= 0 & |u| > 1 \end{aligned} \quad [7]$$

5. *Tukey generalizado*:

$$\begin{aligned} k(u) &= 1 - 2a + 2a \cos \pi u & |u| \leq 1 \\ &= 0 & u > 0 \end{aligned} \quad [8]$$

para  $a$  constante positiva.

6. *Daniell*:

$$k(u) = \frac{\text{sen } u}{u} \quad [9]$$

7. *Parzen* (1.º) (28):

$$\begin{aligned} k(u) &= 1 - |u|^q & |u| \leq 1 \text{ y } (q \geq 1) \\ &= 0 & \text{en otro caso} \end{aligned} \quad [10]$$

8. *Parzen* (2.º):

$$\begin{aligned} k(u) &= 1 - 6u^2 + 6|u|^3 & |u| \leq \frac{1}{2} \\ &= 2(1 - |u|)^3 & \frac{1}{2} < |u| \leq 1 \\ &= 0 & \text{en otro caso} \end{aligned} \quad [11]$$

En el cuadro siguiente exponemos algunas de estas ventanas.

(26) R. B. BLACKMAN y J. W. TUKEY: *The measurement of power spectra*, Nueva York, Dover Publications, 1959, pág. 98.

(27) E. PARZEN: *The rule of spectral analysis in time series*, ob. cit., pág. 129.

(28) E. PARZEN: *Mathematical considerations...*, ob. cit., pág. 176.

CUADRO 1

Cuadro "lag" y "windows" espectrales (\*)  
(Algunos generadores y ventanas espectrales)

TIPO	GENERADOR $\bar{K}(\cdot)$	VENTANAS $A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{k}(t) e^{-i\lambda t} dt$
Rectangular	$k(u) = \begin{cases} 1 &  u  \leq M \\ 0 &  u  > M \end{cases}$	$\frac{M}{\pi} \left( \frac{\text{sen } \lambda M}{\lambda M} \right)$
Bartlett	$k(u) = \begin{cases} 1 - \frac{ u }{M} &  u  \leq M \\ 0 &  u  > M \end{cases}$	$\frac{M \text{ sen}^2 \frac{\lambda}{2} M}{2\pi \left( \frac{\lambda M}{2} \right)^2}$
Parzen	$k(u) = \begin{cases} 1 - 6 \left( \frac{ u }{M} \right)^2 + 6 \frac{ u ^3}{M} &  u  \leq \frac{M}{2} \\ 2 \left( 1 - \frac{ u }{M} \right)^3; \frac{M}{2} \leq u < M & \\ 0 &  u  \geq M \end{cases}$	$\frac{3M}{8\pi} \left( \frac{\text{sen } \frac{\lambda M}{4}}{\frac{\lambda M}{4}} \right)^4$

(\*) JENKINS, *ob. cit.*, pág. 244, rectificado en cuanto a la variable  $\lambda$ , ya que utiliza la frecuencia medida en ciclos.

SECCIÓN 3.<sup>a</sup>

Gráficas de algunas ventanas

1. En principio, mostramos en la figura 1 el gráfico correspondiente a la ventana relativa al lag window de Bartlett:

$$K(u) = \begin{cases} 1 - \frac{|u|}{M} & |u| < M \\ = 0 & |u| \geq M \end{cases} \quad [1]$$

Observemos que los ceros de esta ventana son:

$$\lambda_k = \frac{2\pi k}{M} \quad k \pm 1, \pm 2, \pm \dots \quad [2]$$

y por la simetría del área está prácticamente centrada entre los puntos:

$$\frac{-2\pi}{M} \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{M} \quad [3]$$

La figura 1 corresponde a la ventana de Bartlett para  $M=10$ .

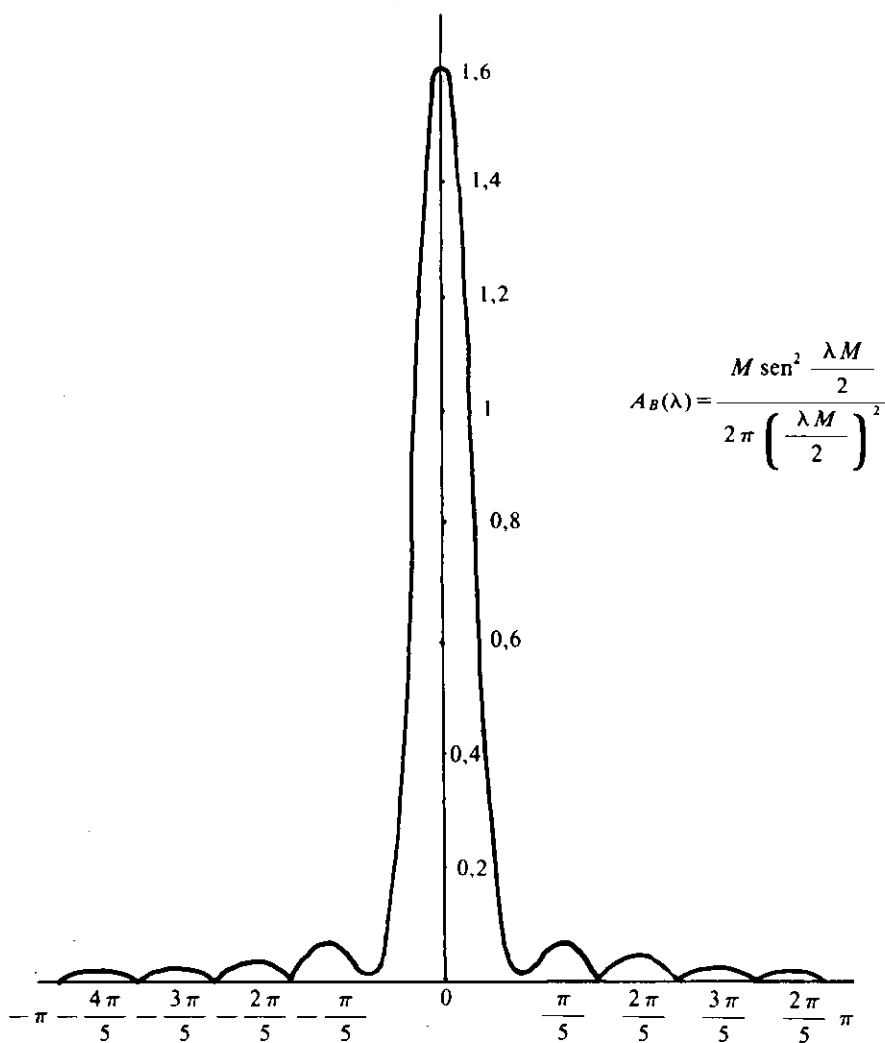


FIGURA 1

La expresión de la ventana se deduce del generador [18]:

$$\begin{aligned}
 A(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(u) e^{-i\lambda u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(1 - \frac{|u|}{M}\right) e^{-i\lambda u} du = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^M \left(1 - \frac{u}{M}\right) (e^{-i\lambda u} + e^{-i\lambda u}) du = \frac{1}{\pi} \int_0^M \left(1 - \frac{u}{M}\right) \cos \lambda u du = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \left(1 - \frac{u}{M}\right) \frac{\sin \lambda u}{\lambda} \right]_0^M + \frac{1}{M} \int_0^M \frac{\sin \lambda u du}{\lambda} \right\} = \\
 &= -\frac{[\cos \lambda u]_0^M}{\pi M \lambda^2} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\lambda M}{2}}{\pi M \lambda^2}
 \end{aligned}$$

2. En la figura 2 representamos las gráficas de las ventanas rectangular (R), Bartlett (B) y Parzen (P) (2.º) para un mismo valor de  $M$ . Por simetría de las ventanas representamos el semieje positivo.

Existen características comunes y diferencias importantes.

La ventana rectangular se concentra en torno al origen más que las otras dos ventanas. Observemos que toma valores negativos y que aproximadamente la concentración del área unidad está entre las frecuencias angulares:

$$-\frac{\pi}{M}, \quad +\frac{\pi}{M} \quad [5]$$

Si la frecuencia fuese medida en ciclos, la concentración del área sería entre las frecuencias:

$$-\frac{1}{2M}, \quad +\frac{1}{2M} \quad [5']$$

En la ventana de Bartlett la concentración del área está entre los límites frecuenciales angulares:

$$-\frac{2\pi}{M}, \quad +\frac{2\pi}{M} \quad [6]$$

y si estuviere medida en ciclos sería entre las frecuencias:

$$-\frac{1}{M}, \quad +\frac{1}{M} \quad [6']$$



Finalmente, la ventana de Parzen es la de menor concentración del área alrededor del origen. Aproximadamente la superficie unitaria está entre las frecuencias angulares:

$$-\frac{3\pi}{2M}, \quad +\frac{3\pi}{2M} \quad [7]$$

o entre las frecuencias medidas en ciclos:

$$-\frac{3}{2M}, \quad +\frac{3}{2M} \quad [7']$$

Ventanas espectrales para un mismo valor de  $M$  (29):

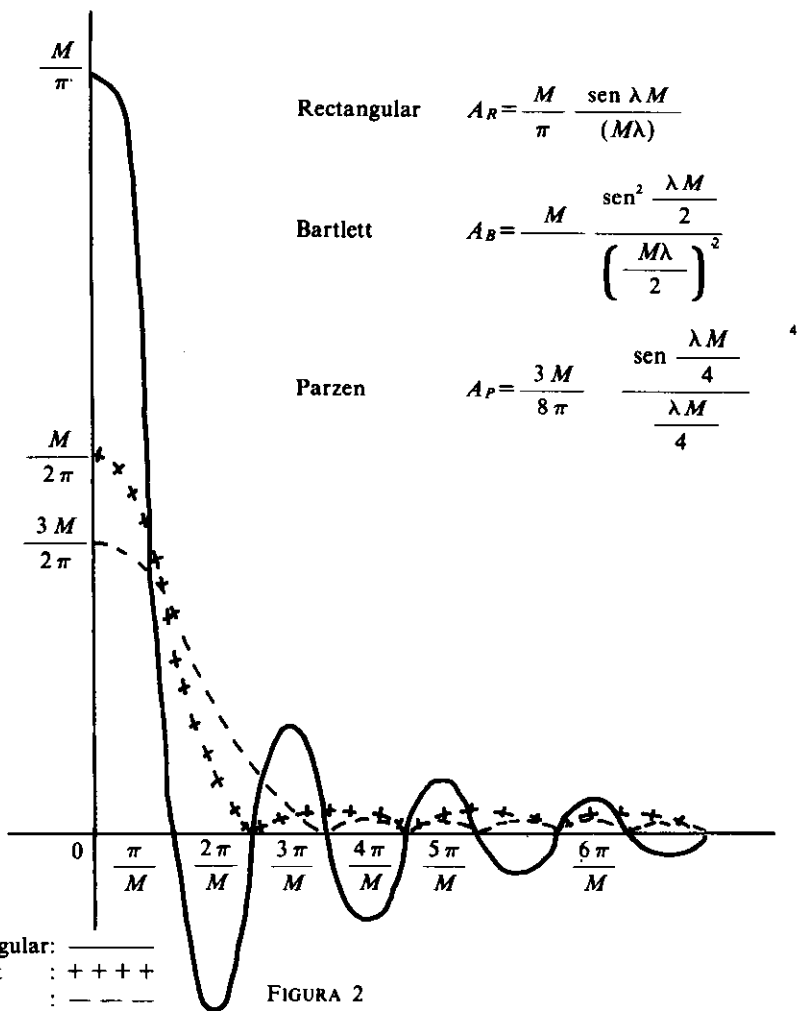


FIGURA 2

(29) JENKINS y WATTS: *Ob. cit.*, pág. 246.

En todas las ventanas la medida de los intervalos decrece cuando aumenta  $M$ , pero las ponderaciones del espectro se concentran en una frecuencia de banda que depende de la "anchura de la ventana" y a través de ésta pasa el espectro muestral promediado.

SECCIÓN 4.<sup>a</sup>*Fórmulas para determinar el espectro promedio muestral*

1. La estimación del espectro utilizando *funciones de convolución* para la estimación de covarianzas (capítulo II, sección 3.<sup>a</sup>) y con el generador rectangular [3] de la sección 2.<sup>a</sup>:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \widehat{B}_1(z) e^{-i\lambda z} dz \quad [1c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-M+1}^{M-1} \widehat{B}_1(z) e^{-i\lambda z} \quad [1d]$$

En el caso real tenemos:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \widehat{B}_1(z) \cos \lambda z dz \quad [2c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-M+1}^{M-1} \widehat{B}_1(z) \cos \lambda z \quad [2d]$$

*Observaciones importantes*

1.<sup>a</sup> Las estimaciones de las covarianzas para lag superiores a  $M$  se desprecian.

2.<sup>a</sup> Si se eligen estimadores de covarianzas sesgadas pueden utilizarse referidas fórmulas.

3.<sup>a</sup> Si las covarianzas estimadas fuesen centradas por ser:

$$\begin{aligned} \widehat{B}_1(z) &= \frac{1}{T} \int_0^{T-z} X_{t+z} X_t dt = \left(1 - \frac{z}{T}\right) \cdot \frac{1}{T-z} \int_0^{T-z} X_{t+z} X_t dt = \\ &= \left(1 - \frac{z}{T}\right) \widehat{B}(z) \end{aligned} \quad [3]$$

los estimadores  $\hat{B}_1(z)$  en las fórmulas anteriores se sustituirían por la [3]. Así, por ejemplo, en la [4 c] sería:

$$\overline{\hat{f}(\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(1 - \frac{|Z|}{T}\right) \hat{B}(z) e^{-i\lambda z} dz \quad [4c]$$

4.<sup>a</sup> El algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*), de Cooley y Tukey, se emplea para el cálculo rapidísimo de espectros.

3. Estimación del espectro utilizando la *ventana de Bartlett* y *estimadores de la función de covarianza centrados*:

$$\overline{\hat{f}(\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(1 - \frac{|Z|}{M}\right) \hat{B}(Z) e^{-i\lambda z} dz \quad [5c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-M+1}^{M-1} \left(1 - \frac{|Z|}{M}\right) \hat{B}(z) e^{-i\lambda z} \quad [5d]$$

En el caso real, como  $\hat{B}(z) = \hat{B}(-z)$ , las anteriores se reducen:

$$\overline{\hat{f}(\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(1 - \frac{|Z|}{M}\right) \hat{B}(z) \cos \lambda z dz \quad [6c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-M+1}^{M-1} \left(1 - \frac{|Z|}{M}\right) \hat{B}(z) \cos \lambda z dz \quad [6d]$$

Las observaciones hechas anteriormente son utilizadas aquí.

Así, si en lugar de emplear un estimador centrado de la covarianza  $\hat{B}(z)$  empleamos uno sesgado, recordando la [3], sustituiríamos  $\hat{B}(z)$  en función de las  $\hat{B}_1(z)$ . Para la [5 d], por ejemplo, tendríamos:

$$\overline{\hat{f}(\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-M}^M \frac{1 - \frac{|Z|}{M}}{1 - \frac{|Z|}{T}} \hat{B}_1(z) \cos \lambda z \quad [7d]$$

4. *Bartlett modificó su fórmula empleando funciones de convolución*, y así eliminó el divisor  $1 - \frac{|Z|}{T}$ . Por ejemplo, al utilizar el generador modificado, la [5 c] es

$$\begin{aligned} \overline{\hat{f}(\lambda)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(1 - \frac{|Z|}{T}\right) \left(1 - \frac{|Z|}{M}\right) \hat{B}(z) e^{-i\lambda z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(1 - \frac{|Z|}{M}\right) \hat{B}_1(z) e^{-i\lambda z} dz \end{aligned} \quad [5c']$$

Todas las fórmulas finales, como la [5 d], carecen de divisor, y algunos autores no hacen distinción con la [5 c'] y puede compararse con la [7 d].

5. *Estimación del espectro utilizando la ventana de Parzen (1.ª) y función de convolución.*

Si del generador de Parzen [10] de la sección 2.ª hacemos  $q=1$ , es el de Bartlett modificado.

Para el estimador del espectro en el caso real y utilizando el generador de Parzen mencionado y  $q=2$  tenemos:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(1 - \frac{Z^2}{M^2}\right) \widehat{B}_1(z) \cos \lambda z \quad [8c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-M}^M \left(1 - \frac{Z^2}{M^2}\right) \widehat{B}_1(z) \cos \lambda z \quad [8d]$$

No repetimos las fórmulas para los otros casos, ni tampoco ponemos las estimaciones de las funciones de convolución de las covarianzas

$$\widehat{B}_1(z)$$

en función de las covarianzas centradas  $\widehat{B}(z)$ .

6. *Estimación del espectro por la ventana sugerida por Parzen (M par) y para proceso real.* Del segundo generador [11] de la sección 2.ª tenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{-M/2}^{M/2} \left(1 - 6 \frac{Z^2}{M^2} + 6 \frac{|Z|^3}{M^3}\right) \widehat{B}_1(z) \cos \lambda z + \\ & + \frac{2}{2\pi} \sum_{r=\frac{M}{2}+1}^M \left(1 - \frac{Z}{M}\right)^3 \widehat{B}_1(z) \cos \lambda z + \\ & + \frac{2}{2\pi} \sum_{r=-M}^{-\frac{M}{2}-1} \left(1 - \frac{|Z|}{M}\right)^3 \widehat{B}_1(z) \cos \lambda z \end{aligned} \quad [9d]$$

Son válidas las observaciones precedentes respecto de sustitución de  $\widehat{B}_1(z)$  por  $\left(1 - \frac{|Z|}{T}\right) \widehat{B}(z)$  y de depreciarse las funciones de covarianza para desplazamientos  $|Z| > M$ .

No insistimos sobre las otras ventanas ya indicadas por la sencillez de su aplicación.

Algunas propiedades de las ventanas espectrales se condensan en el cuadro:

CUADRO 2

Descripción	Relación entre I/T varianzas	Grados de libertad	Anchura de la ventana estandarizada	$I = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du$
Rectangular	$2 \frac{M}{T}$	$T/M$	$0,5/M$	$2 M$
Bartlett	$0,667 \frac{M}{T}$	$3 T/M$	$1,5/M$	$0,667 M$
Parzen (2.º)	$0,539 \frac{M}{T}$	$3,71 T/M$	$1,86/M$	$0,539 M$

*Notas explicativas*

1.ª La relación entre las varianzas son las del promedio espectral y la de la función espectral, es decir, la [26] de la sección 3.ª del capítulo III, siendo  $T$  la longitud del registro e  $I$  la [25] de mencionada sección y que figura en el cuadro.

2.ª La función de densidad espectral muestral  $\hat{f}(\lambda)$  sigue la  $\chi^2$  con dos grados de libertad el cociente:

$$\frac{2\hat{f}(\lambda)}{f(\lambda)} \quad [10]$$

3.ª El estimador  $\overline{\hat{f}(\lambda)}$  promedio de densidad espectral la expresión:

$$v = \frac{\overline{\hat{f}(\lambda)}}{f(\lambda)} \quad [11]$$

sigue la distribución  $\chi^2_v$  con  $v$  grados de libertad (30). Los grados de libertad se determinan aproximadamente por:

$$v \approx 2 \frac{E\{|\overline{\hat{f}(\lambda)}|\}^2}{\sigma^2\{\overline{\hat{f}(\lambda)}\}} \quad [11']$$

De la [13], [23] y [24] de la sección 3.ª del capítulo III, y si

$$E\overline{\hat{f}(\lambda)} \approx \hat{f}(\lambda) \quad [12]$$

los grados de libertad son aproximadamente:

$$v \approx 2 \frac{f^2(\lambda)}{\frac{f^2(\lambda)}{T} I} = 2 \frac{T}{I} \quad [13]$$

siendo  $I$  la [25] de citada sección y capítulo.

(30) JENKINS: *Ob. cit.*, págs. 231 y 252.

En el generador rectangular

$$I = \int_{-M}^M du = 2M \quad [14]$$

sustituido en [13] nos da  $T/M$ , que es el que figura en el cuadro 2.

4.<sup>a</sup> En resumen, el cociente

$$\frac{\overline{\hat{f}(\lambda)}}{f(\lambda)} = \frac{\chi^2 v}{v} \quad [15]$$

se distribuye como una media de una  $\chi^2_v$  con  $v$  grados de libertad, determinándose  $v$  por

$$v \approx \frac{2T}{I} \quad [16]$$

5.<sup>a</sup> Intervalo de confianza para la función de densidad espectral. Fijado  $\alpha$ , estableceremos intervalos de confianza para la función de densidad espectral:

$$\frac{\overline{v\hat{f}(\lambda)}}{\chi^2_v \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} > f(\lambda) > \frac{\overline{v\hat{f}(\lambda)}}{\chi^2_v \left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad [17]$$

y nos da la confianza que en el 100  $(1 - \alpha)$  por 100 de los casos se encuentre entre mencionados extremos el valor teórico poblacional de la función de densidad espectral  $f(\lambda)$ .

6.<sup>a</sup> La anchura de la ventana se expresa en ciclos. Véanse fórmulas [5], [6] y [7] de la sección 3.<sup>a</sup> y el siguiente párrafo.

7.<sup>a</sup> *Anchura de las ventanas utilizadas:*

1. Hemos indicado que  $\overline{\hat{f}(\lambda)}$  era un promedio y dijimos en el párrafo 2 de la sección 3.<sup>a</sup> que se tomaba un intervalo del eje de frecuencias para este promedio.

2. Para dar el concepto de anchura (31) de la ventana utilizada emplearemos la ventana de Daniell, que es la más simple:

$$A(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{h} & -\frac{h}{2} < \lambda < \frac{h}{2} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad [18]$$

Es decir, a través de esta "ventana rectangular" para todo el espectro estimado en el intervalo  $-\frac{h}{2} < \lambda < \frac{h}{2}$  se calcula la media (semejante a la altura del histograma en la base dada).

(31) Este término se denomina *bandwidth* en la literatura inglesa.

3. La varianza del promedio muestral del espectro utilizando la ventana de Daniell, según las [24] y [25] de la sección 3.<sup>a</sup> del capítulo anterior, es:

$$\sigma^2 \overline{\hat{f}(\lambda)} \approx \frac{\overline{\hat{f}(\lambda)^2}}{T} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{h^2} d\lambda = \frac{\overline{\hat{f}(\lambda)^2}}{T} \cdot \frac{1}{h} \quad [19]$$

4. La anchura del intervalo es  $h$ , que puede ser una forma de dar la idea cómo se determina el y el área de la ventana, la unidad (base  $h \times$  altura  $\frac{1}{h}$ ).

5. De la relación entre las varianzas del promedio espectral muestral y de la estimación del espectro anteriormente citadas, [24] y [25], y del concepto de anchura de la ventana de Daniell, se define anchura de la ventana  $A(\lambda)$  por la expresión:

$$h = \frac{1}{I} \quad [20]$$

6. En el cuadro se indica la anchura de cada ventana, y en principio pudiera tomarse como tal a la distancia entre los dos ceros simétricos conteniendo *el origen de la ventana medida en ciclos*. Así, para la rectangular:

$$\left( -\frac{1}{2M}, \frac{1}{2M} \right)$$

Para la de Bartlett:

$$\left( -\frac{1}{M}, \frac{1}{M} \right)$$

aunque ya decimos esto no es más que una idea aproximada, porque depende de la forma de la ventana, según expusimos en el párrafo 3, y puede comprobarse examinando las representaciones gráficas de la sección 3.<sup>a</sup>

7. Las unidades de medida de la *anchura de las ventanas*, según las exposiciones [5], [6] y [7] de la sección 3.<sup>a</sup>, nos confirma que en el cuadro 2 se expresa la medida de la frecuencia en ciclos. Para que la *medida* de la anchura de la ventana sea *homogénea* con la unidad de medida utilizada en nuestras fórmulas y estar la frecuencia medida en radianes, hemos de multiplicar la anchura de la ventana que figura en el cuadro 2 por  $2\pi$ .

SECCIÓN 6.<sup>a</sup>

*Estimación de la función de densidad espectral mixta.  
Representaciones de procesos mutuos*

1. Cuando tratamos de dos procesos  $\{x_t, y_t, t \in R\}$  de naturaleza estacionaria, estos procesos tienen las representaciones espectrales:

a) *De los procesos:*

$$x_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\xi_x(\lambda) \quad t \in R \quad [1]$$

$$y_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\xi_y(\lambda) \quad t \in R \quad [2]$$

b) *De las covarianzas en el caso de ser absolutamente continuos los espectros:*

$$B_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_x(\lambda) d\lambda \quad [3]$$

$$B_{yy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_y(\lambda) d\lambda \quad [4]$$

Estas dos funciones se denominan *autocovarianzas* por algunos autores. Nosotros las hemos denominado simplemente *covarianzas* porque no existía posibilidad de confusión. Las otras dos funciones propiamente se denominan *covarianza mutua del proceso*, y si son de tipo estacionario, se definen y su representación espectral es:

$$E Y_{s+t} \bar{X}_s = B_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_{yx}(\lambda) d\lambda \quad [5]$$

$$E X_{s+t} \bar{Y}_s = B_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_{xy}(\lambda) d\lambda \quad [6]$$

Si  $t \in Z$ , los límites de estas integrales es el intervalo  $(-\pi, \pi)$ .

Las funciones de covarianza  $B_{yx}(t)$  y  $B_{xy}(t)$  no son iguales y es sencillo probar que están relacionadas por la expresión en la forma más general:

$$\overline{B_{xy}(-t)} = B_{yx}(t) \quad [7]$$

indicando la barra encima el número conjugado de  $B_{xy}(-t)$ .

Esta relación nos permite, dada una de ellas, determinar la otra.

Si los procesos  $\{X_t, Y_t, t \in R\}$  son estacionarios, tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{B_{xy}(-t)} = B_{yx}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_{yx}(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \overline{f_{xy}(\lambda)} d\lambda \Rightarrow \\ f_{yx}(\lambda) &= \overline{f_{xy}(\lambda)} \end{aligned} \quad [8]$$



e implica que las funciones de densidad espectrales de  $(y, x)$  o de  $(x, y)$  son conjugadas; no es preciso sino estimar una de ellas y conocemos la otra.

2. Si escribimos la función de densidad mutua:

$$f_{xy}(\lambda) = c(\lambda) - iq(\lambda) \quad [9]$$

a la parte real de la función espectral se la denomina *coespectro* y es función de la frecuencia; y a la función  $q(\lambda)$  se la denomina *cuadratura del espectro*.

Las funciones  $c(\lambda)$  y  $q(\lambda)$  tienen las propiedades

$$c(\lambda) = c(-\lambda) \quad ; \quad q(-\lambda) = -q(\lambda) \quad [10]$$

3. Tres conceptos se deducen de las expresiones anteriores:

De la [10] deducimos la fase:

$$\gamma(\lambda) = \text{arg} \frac{q(\lambda)}{c(\lambda)} \quad [11]$$

y es una función que depende de la frecuencia  $\lambda$ .

En los procesos de tipo económico tiene importancia porque nos indica la relación entre las variables y su posible retraso o retardo (medido en frecuencias).

El segundo concepto es la amplitud:

$$A(\lambda) = \sqrt{c(\lambda)^2 + q(\lambda)^2} \quad [12]$$

El tercer concepto es la coherencia, semejante al coeficiente de correlación de dos variables:

$$\gamma(\lambda) = \frac{f_{xy}(\lambda) f_{yx}(\lambda)}{f_{xx}(\lambda) f_{yy}(\lambda)} = \frac{|f_{xy}(\lambda)|^2}{f_{xx}(\lambda) f_{yy}(\lambda)} = \frac{c(\lambda)^2 + q^2(\lambda)}{f_{xx}(\lambda) f_{yy}(\lambda)} \quad [13]$$

recordando las [8] y la [9].

### *Estimaciones de las funciones de covarianza*

1. Todo lo expuesto en el capítulo II es aplicable para las estimaciones de las funciones de autocovarianza mixta.

2. Si las medias teóricas de los procesos  $\{x_t, y_t, t \in R\}$  son nulas, podemos formar estimadores centrados o asintóticamente centrados. Ejemplos de los primeros son:

$$\hat{B}_{xy}(t) = \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} X_{s+t} \cdot \bar{Y}_s ds \quad [14]$$

$$\hat{B}_{xy}(t) = \frac{1}{2T-t} \int_{-T}^{T-t} X_{t+s} \cdot \bar{Y}_s ds \quad [15]$$

Comprobemos la propiedad mencionada para el primero de estos dos estimadores. Tomando esperanzas tenemos:

$$E \hat{B}_{xy}(t) = \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} (EX_{s+t} \bar{Y}_s) ds = B_{xy}(t) \quad [16]$$

c. h. d.

En el caso de desconocerse las medias formaríamos estimadores asintóticamente consistentes, y remitimos al lector al capítulo II para o repetir fórmulas semejantes.

### *Estimaciones de las funciones de densidad espectral mixta media*

1. En esta sección, y por brevedad, hemos expuesto fórmulas para el proceso mixto  $\{X_t, Y_t, t \in R\}$ . Indudablemente ahora expondremos las fórmulas para el espectro cuando  $t \in R$  o  $t \in Z$ .

Así, las estimaciones de las expresiones recordando el capítulo III y funciones de convolución:

$$\hat{f}_{xy}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \hat{B}_{xy}(z) e^{-i\lambda z} dz \quad [17c]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{z=-\infty}^{+\infty} K(z) \hat{B}_{xy}(z) e^{-i\lambda z} \quad [17d]$$

donde  $K(z)$  son los generadores de ventanas *lag window*, según expusimos en la sección 3.<sup>a</sup> del capítulo III.

Las expresiones precedentes nos permiten: estimar la función de densidad espectral mutua; descomponer esta función en dos funciones: la parte real será la estimación del *coespectro*, y el valor real de la parte imaginaria cambiado de signo es la *función de la cuadratura del espectro*.

Por las definiciones de coespectro, cuadratura del espectro, fase y coherencia, estimada la función de densidad espectral mixta, las obtendremos todas ellas.

2. Estimada  $f_{xy}(\lambda)$ , obtendremos sencillamente la de  $f_{yx}(\lambda)$  por ser su conjugada.

La estimación del coespectro y cuadratura del espectro puede obtenerse directamente: el primero, por la transformada del coseno, y el segundo, de la del seno de la función de covarianza con las ventanas indicadas.

La función estimada de la fase se obtiene hallando el arco tangente del cociente: cuadratura del espectro entre coespectro [11].

La coherencia es sencilla: sustituir en [13] los valores estimados.

*Consideraciones finales*

1. Las funciones de covarianza pueden estimarse por puntos (en un registro de tipo continuo) o por una integral de naturaleza estocástica y que para una realización es una función del tiempo.

2. En estas estimaciones debemos precisar la longitud del *registro del tiempo*:

$$T = N \Delta t \quad [18]$$

donde  $N$  es el número de puntos y  $\Delta t$  el intervalo de tiempo entre dos muestras. Por ejemplo,  $\Delta t = 1$  día;  $\Delta t = 1$  semana;  $\Delta t = 1$  mes, etc.

En estos casos  $T$  se denomina *dominio de la ventana*.

En los fenómenos económicos el intervalo entre las muestras  $\Delta t$  suele ser el día, aunque puede reducirse a la hora excepcionalmente, y mejor el mes.

3. En el dominio de la frecuencia nos encontramos con los dos casos expuestos:  $t \in R$  o  $t \in Z$ .

También aquí dividiremos en puntos el dominio de la frecuencia y denominamos

$\Delta \lambda$ , el intervalo de longitud de la frecuencia.

$2\Delta \lambda$  indica el primer armónico;  $3\Delta \lambda$ , el segundo, etc.

La reducción de  $\Delta \lambda$  nos permitirá dibujar la gráfica del espectro, pero se recordará que pudiera en este caso no ser consistente.

El número de puntos escogidos es  $\frac{N}{2}$ , es decir, la mitad de los datos originales (véase el punto 5).

4. Importa aclarar el concepto de frecuencia y "frecuencia angular", porque se adoptan fórmulas distintas para la estimación del espectro.

a) La primera basada en el concepto *fundamental de frecuencia*, como inversa del período, e indica el número de ciclos recorridos en la unidad de tiempo ( $T$  período):

$$\lambda = \frac{1}{T} \quad [19]$$

Si  $t \in Z$ , la frecuencia varía entre  $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq +\frac{1}{2}$ .

Si  $t \in R$ , la frecuencia varía entre  $-\infty < \lambda < +\infty$ .

Tanto si el parámetro  $t$  pertenece a una sucesión de números enteros como si el parámetro  $t$  pertenece al conjunto de números reales, las fórmulas se distinguen viendo si la frecuencia está multiplicada por  $2\pi$  o no. En el primer caso utiliza el concepto expuesto. En el segundo, el concepto que exponemos a continuación.

b) La *frecuencia angular* expresa el número de circunferencias (expresado *no en ciclos, sino en radianes*), y se define por

$$\lambda = \frac{2\pi}{T} \quad [20]$$

Las variaciones de  $\lambda$  son:

Para  $t \in Z$ ,  $-\pi \leq \lambda \leq +\pi$ .

Para  $t \in R$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$ .

Esta concepción la hemos adoptado siguiendo a prestigiosos autores y, además, por el hecho de su similitud y relación entre las funciones características y la función de densidad de probabilidad.

No existe ningún inconveniente en utilizar nuestras fórmulas o viceversa, pues esta relación es muy simple, pero advertimos que la frecuencia (medida en ciclos) es diferente a la también denominada por nosotros frecuencia (medida en radianes).

El intervalo de frecuencia está relacionado con el registro del tiempo medido por medio de las fórmulas [19] o [20], y en el caso de frecuencia angular, [20], el límite de variación  $\lambda$  es porque el máximo valor es  $\pi$ ; luego:

$$\begin{aligned} -\pi < * \lambda < \pi &\Rightarrow \\ K \frac{2\pi}{T} < \pi &\Rightarrow \\ K < \frac{T}{2} \end{aligned} \quad [21]$$

es decir, la longitud del tiempo se reduce a la mitad.

6. Las funciones generatrices de ventanas truncan valores de covarianzas para estimar mejor el espectro y se aplican igualmente a las funciones de densidad mixta o cruzada.

7. En un proceso vector multivariante  $-X(s)'$  es el vector fila—

$$\{ X_k(t), t \in R \} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad [22]$$

formado por  $n$  procesos componentes, *si es estacionario* tendremos:

$$Ex(t+s)' \overline{x(s)} = \{ B(t) \} = \begin{vmatrix} B_{11}(t), & B_{12}(t), & \dots, & B_{1n}(t) \\ B_{21}(t), & B_{22}(t), & \dots, & B_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1}(t), & B_{n2}(t), & \dots, & B_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad [23]$$

En la matriz [23] los elementos  $B_{ji}(-t)$ ,  $B_{ji}(t)$  se relacionan por la igualdad  $B_{ij}(t) = \overline{B_{ji}(-t)}$  [24], donde si tenemos un vector de  $n$  componentes,  $B_{ij}(t)$  nos indica la covarianza de los dos procesos  $\{ x_i(t), X_j(t), t \in R \}$ , componentes ambos del proceso anterior [22].



- BOCHNER, S., y KAWATA, T.: "A limit teoreme for the periodogram", *The Annals of Mathematical Statistics*, 1958.
- BARTLETT, M. S., y MEDHI, J.: "On the efficiency of procedure for smoothing periodograms from time series with continuos spectra", *Biometrika*, 1955, págs. 143-150.
- DANIELS, H. E.: "The estimation of spectral densities", *Journal of the Royal Statistical Society, serie B*, 1962, núm. 1, págs. 185-198.
- DHRYMER, PHOEBUS J.: *Econometrics. Statistical foundations and applications*, Harper International Edition, 1970.
- FISCHMAN, G. S.: *Spectral methods in econometrics*, Harvard University Press, 1969.
- GOODMAN, N. R.: "Some comments of spectral analysis of time series", *Technometrics*, mayo 1961.
- HANNAN, E. J.: "The estimation of seasonal variation in economic time series", *J. Am. Stat. Assoc.*, vol. 58, núm. 301, marzo 1963, págs. 31-44.
- JENKINS, G. M.: "General considerations in the analysis of spectra", *Technometrics*, vol. 3 (1961), págs. 133-166.
- *Holden-Day*, 2.<sup>a</sup> ed., 1969.
- KLEIN, L. R.: "The estimation of distributed lag", *Econometrika*, vol. 26, núm. 4, octubre 1953, págs. 553-565.
- LEO J. TICK: *Estimation of coherency*. Advanced Seminar on Spectral analysis of Time Series. Ed. Bernard Harris Wiley, 1966, págs. 133 y ss.
- LOMNICKI, Z. A., y ZAREMBA: "On estimating the spectral density function of a stochastic process", *Journal of the Royal Statistical Society, serie B*, vol. 19, núm. 1, 1957, págs. 13-37.
- LUKACS, E.: *Characteristic functions*, Charles Griffin, 1970, 2.<sup>a</sup> ed., Londres.
- MCNEIL, D. R.: "Stimating the covarianza and spectral density functions from a clipped stationary time series", *Journal of the Royal Statistical Society, serie B*, 1966, págs. 180-195.
- PARZEN, E.: "Mathematical considerations in the estimation of spectra", *Technometrics*, vol. 3 (1961), págs. 167-190.
- "On asymptotically efficient consistent estimates of the spectral density functions of a stationary time series", *Journal of the Royal Statistical Society, serie B*, vol. 20, núm. 2, 1957, págs. 303-323.
- "On consistent estimates of the spectrum of a stationary time o series", *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 28, 1957, págs. 327-348.
- TITCHMARSH, E. C.: *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford, 2.<sup>a</sup> ed., 1967, y Clarendon Press.
- TUKEY, J. W.: *An introduction to the calculations of numerical spectrum analysis*. Advancer Seminar on Spectral Analysis of Time Series (B. Harries, J. Wiley and Sons, Nueva York), 1967, págs. 25-46.
- *An introduction to the measurement of spectra*, U. Frenander, Wiley, Nueva York, 1959.
- TUKEY, J. W., y BLACKMAN, R. M.: *The measurement of power spectra*, Dover Publications, Nueva York.
- TUKEY, J. W., y COOLEY: "An algorithm for the machine calculation of complex series", *Math. Comp.*, 19-297/301, 1965. (Conocido por FFT.)
- WISE, J.: "The autocorrelation function and the spectral density function", *Biometrika*, 1955, págs. 151-159.